

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLVII

1950

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

(2^o semestre 1950)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1950

Digitized by the Internet Archive
in 2023

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1950 - Luglio-agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Fisica. — *Coesione, forze nucleari e legge di Newton.* Nota (*)
del Socio QUIRINO MAJORANA.

La legge dell'attrazione universale di Newton non può invocarsi, per spiegare le grandi forze che si constatano, studiando la coesione dei corpi solidi, ed ancor meno quelle che si presume debbano dar luogo alla costituzione dei nuclei atomici (nel qual caso si ha a che fare anche con forze elettriche). Per chiarire questa asserzione, possiamo rilevare anzitutto, che la rottura per trazione di una sbarra, dipende esclusivamente dalla natura della materia immediatamente prossima alla sezione di rottura. Poichè sappiamo che la coesione cessa praticamente del tutto, quando nel corpo solido esista un'incrinatura di spessore ϵ , piccolissimo (diciamo, per esempio di un micron; ma può forse bastare anche molto meno), si deve ammettere che tale coesione corrisponde ad una forza attrattiva che ha sede soltanto fra due strati, dell'ordine del detto spessore, posti in grande vicinanza. Si comprende, così, perchè il carico di rottura della sbarra sia indipendente dalla lunghezza di questa.

Per mettere meglio in raffronto l'ordine di grandezza di tale carico, con quello che si potrebbe prevedere, applicando la legge di Newton, possiamo domandarci quanta materia si deve supporre ammassata in vicinanza del detto strato ϵ , perchè questo rimanga fissato ad essa col valore di quel carico. Ammettiamo che lo spessore ϵ , di area di 1 cm^2 , sia aderente su di una massa sferica, di raggio R , che abbia densità δ , identica a quella dello strato stesso. Questo ha così la massa $m = \delta \epsilon$, e la forza newtoniana con cui la sfera lo attira sarà $F = \frac{4}{3} \pi C \delta m R$, dove C è la costante di gravitazione o di Cavendish. È facile vedere che se, invece della sfera, si usa uno strato a facce piane e parallele di estensione indefinita e di spessore R , quella forza ha un valore poco diverso e cioè $2 \pi C \delta m R$. Ora,

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1950.

l'esperienza fa vedere che, per effetto della coesione, lo strato ε resta fissato al resto della materia ad esso identica, con una forza dell'ordine di una tonnellata (cioè 10^9 dine), se ci si riferisce ad un carico di rottura come quello dell'argento, che ha densità $\delta = 10$, circa. Tenendo conto che $C = 6,8 \cdot 10^{-8}$, $\delta = 10$, $m = 10^{-3}$ gr, si trova $R = 3,5 \cdot 10^{17}$ cm. Questo valore corrisponde al raggio di una sfera parecchi milioni di volte quello del Sole, che peraltro, ha densità media di 1,4 invece di 10. Si ricordi inoltre, che abbiamo fatto lo spessore $\varepsilon = 1\mu$, cioè 10.000 volte maggiore della distanza fra i nuclei degli atomi; ma si può presumere che tal valore sia troppo grande. Per cui R risulterebbe ancora maggiore di quanto si è detto.

In altro modo, si può compiere il raffronto. Suppongasi che due grandi sfere di raggio R e densità δ , siano in contatto il quale, per lievissimo schiacciamento, sia di 1 cmq. Applicando la legge di Newton, si vede che R deve essere di 24 m, perchè, nella superficie di contatto, si manifesti uno sforzo di una tonnellata. Ciascuna sfera peserebbe mezzo milione di tonnellate, circa.

Tutto ciò conferma quanto è stato detto in principio, che cioè la legge di Newton non è affatto applicabile, nel cercar di spiegare la coesione dei corpi solidi. Per vero, si potrebbe pensare che il carattere discontinuo della struttura della materia, possa permettere di ricorrere ancora a quella legge. Infatti, in conseguenza di tale discontinuità, si hanno corpuscoli materiali (i nuclei degli atomi) relativamente prossimi; essi sono discosti per distanze dell'ordine di 10^{-8} cm. Ma un calcolo grafico, che sarebbe troppo lungo riportare, fa vedere che, trattandosi di una massa regolarmente discontinua, quale è quella costituita da atomi, l'applicazione della legge di Newton porta a prevedere sforzi di poco superiori a quelli ottenibili per la massa continua.

Resta dunque fissato che le forze di coesione dei corpi solidi (ed a maggior ragione quelle nucleari) sono dovute ad un'azione a distanza che, nei suoi effetti, appare essenzialmente diversa da quella scoperta da Newton. Questa conclusione, sulla quale non può esistere alcun dubbio, mi induce ad esporre qualche considerazione generale, sulle azioni a distanza che si svolgono senza alcun mezzo interposto, constatabili in fisica. Come è noto, quando, un paio di secoli fa, ci si volle render conto dei fenomeni ottici, si avanzò l'ipotesi dell'etere cosmico. Questa, sulla fine del secolo scorso, aveva raggiunto quasi l'assoluta certezza. Mi piace ricordare quanto allora mi diceva Galileo Ferraris: «... *Stiamo quasi per toccare con la mano l'etere...*». A tale ipotetico mezzo, si attribuiva la proprietà di lasciar trasmettere le azioni a distanza: elettriche, magnetiche, elettromagnetiche. Il fisico aveva, inoltre, la suggestione che anche la forza gravifica o newtoniana potesse trasmettersi, grazie ad un'altra proprietà dell'etere, sia pur diversa da quella elettromagnetica. Si trattava però di un sospetto generico, senza l'appoggio di alcun fatto sperimentale o di concrete concezioni teoriche. Ma, al principio di questo secolo, la concezione eterea è sostanzialmente caduta, in conseguenza dell'esperienza di Michelson e Morley. Si ha oggi la convinzione che l'etere non esiste, e che le azioni a distanza si svolgano, in conseguenza di peculiari proprietà della materia. Masse materiali neutre, elettriche, magnetiche, fanno sentire i loro effetti a distanza, attraverso lo spazio in cui nulla esiste.

Ora, la nostra intuizione è soddisfatta, quando consideriamo la trasmissione di energia a distanza: luce, onde elettromagnetiche. Allora, si dice, si ha a che fare con un *quid*, i fotoni, che viaggia con una certa velocità. Ma, nei tre casi statici prima ricordati, non si suole ammettere che si abbia a che fare con qualcosa che si muova, portandosi da un punto all'altro dello spazio; si dice ciò, seguendo le ipotesi sinora fatte. Di tali casi, manca dunque una soddisfacente teoria.

Per esaminare meglio la questione, osserviamo ora come, in prima indagine, si rilevi una caratteristica comune delle tre azioni statiche a distanza: gravifica, elettrica, magnetica. Si sa, che la legge di Newton fu estesa da Coulomb alle azioni elettriche e magnetiche. Essa può definirsi quale una necessaria legge geometrica, ligia alla nostra concezione euclidea dello spazio (dello spazio non euclideo, diremo in seguito). Tale concezione è radicata nella nostra mente; ed i ragionamenti spaziali e temporali si basano su di essa. Ammesso che l'azione a distanza sia dovuta alla emissione di un *quid* da un centro (quale potrebbe essere anche l'eccitazione dinamica di un mezzo); poichè sappiamo che le superficie di sfere concentriche crescono col quadrato dei loro raggi; ne deriva la citata legge. Questa vale anche nel senso dinamico, di emissione energetica.

L'abolizione dell'ipotesi eterea sbocca naturalmente nel quesito di sapere, come materia possa agire su altra materia discosta, senza un mezzo interposto. Si suole rispondere ad esso, dicendo che un corpo è circondato o si circonda del suo campo, trascinandoselo nei suoi movimenti. Tale campo può essere, naturalmente, gravifico, elettrico, magnetico, o presentare più di una di tali caratteristiche. Ciò si dice, prescindendo dal campo dei fotoni, che è essenzialmente dinamico, e della cui natura ci sembra di renderci meglio conto. Un simile giudizio è strettamente legato alla constatazione di fatti sperimentali; ma non ci aiuta a comprendere quale sia la natura di tali campi, che, da caso a caso, hanno caratteristiche differenti. Queste differenze corrispondono non solo ai tre tipi di campi suddetti, ma, nel caso di quello gravifico, leggi, apparentemente diverse, governano le azioni a grandi distanze (astronomiche o di laboratorio) e quelle di coesione o nucleari.

Il problema, di stabilire la natura dei differenti campi di forza, è dunque aperto. Ritengo che il parlare di spazi euclidei o no, non serva a chiarire la natura dei detti campi. La dizione *spazio curvo* non può riferirsi che alla constatazione della azione a distanza, della quale si può avere già notizia, grazie all'esperienza ed all'osservazione. Così, se lo spazio intorno al Sole è chiamato curvo, ciò corrisponde semplicemente al campo gravitazionale che circonda quell'astro, e del quale nessuno dubita. La locuzione nulla aggiunge a chiarimento di tale fatto. Ed inoltre, se intendiamo per *curvatura dello spazio* qualcosa che dipende dalle linee di forza gravitazionali, come, la stessa parola può riferirsi al caso di forza elettrica o di forza magnetica? Non si può, evidentemente rappresentare con una pura ed unica qualità geometrica dello spazio, fatti fisici tanto diversi. Sembra dunque, per l'economia del nostro pensiero, molto più semplice, ritenere che lo spazio corrisponda sempre alla nostra intuizione euclidea. Non v'ha alcuna ragione che essa possa mai venir contraddetta: avviene soltanto che lo spazio possa contenere un qualcosa di statico o di dinamico, che dà luogo a manifestazioni differenti, da caso a caso.

Sappiamo che uno dei problemi più difficili (e che forse non verrà risolto ancora per molto tempo) della fisica moderna, è quello di stabilire la vera natura dei campi di forza, nell'interno dei nuclei atomici. Si sa soltanto che si tratta di forze che si manifestano con grandissima intensità, alle brevissime distanze, dentro i nuclei atomici (10^{-11} o 10^{-12} cm). Si ritiene che l'equilibrio della struttura di un nucleo dipenda da una sorta di compromesso, possibile per i vari elementi chimici ed i loro isotopi, tra le forze elettriche e quelle di tipo newtoniano, che si manifestano per la presenza di protoni e neutroni. Ma nulla di preciso si può dire circa tale compromesso, specialmente quando si tratta di nuclei via via più pesanti. Questo difetto della nostra conoscenza potrà in qualche modo venir rimosso o menomato, dalla scoperta di nuovi fatti. Ma intanto, nulla vieta la ricerca di qualche nuova ipotesi, basata sul nostro puro razioicinio.

Mi riferisco soltanto alle forze attrattive, non di natura elettrica. Si è detto, che esse si manifestano con intensità enormemente più intensa, quando si tratti di distanze brevi o brevissime, fra le masse agenti. Da ciò, si suole dedurre che si debba trattare di azioni diverse, da quelle newtoniane. Per vero, una tale conclusione non soddisfa la nostra più semplice intuizione. Perchè, attraverso lo spazio vuoto, tra due masse materiali, si dovrebbero manifestare azioni di natura differente, a seconda che si tratti di grandi o di piccole distanze? Ciò non appare probabile. È da credersi, al più, che alle piccole distanze, intervenga qualche causa, che modifichi lo svolgersi di quelle azioni. In tal senso, si può fare qualche nuova ipotesi, sulla attendibilità della quale, potrebbero ottenersi, in seguito, opportuni controlli. Ma prima di procedere a ciò, siamo nella necessità di dare una spiegazione, sia pur formale, del modo con cui si svolge l'attrazione newtoniana. Scartata la ipotesi eterea, e non volendo ricorrere ad azioni ultramondane (Lesage), del tutto improbabili, non rimane che ammettere la esistenza di un *quid*, come potrebbe essere un fluido *sui generis*, circondante, in maniera via via più diradata, col crescere della distanza, le masse materiali attirantesi. Inoltre, questo fluido deve avere una qualità (densità?) che, in certo modo, si accresca, col crescere del valore di ciascuna massa. Una seconda ipotesi consiste, nell'ammettere che l'incontro di fluidi appartenenti a masse diverse, o, forse, di ciascuno dei due fluidi con l'altra massa, dia luogo alla forza attrattiva newtoniana, di coesione, nucleare. Indagare il modo con cui si manifesta tale forza, non è per ora possibile, forse in conseguenza della nostra abitudine di considerare i fenomeni meccanici comuni.

AmMESSO ciò, ci si domanda quale possa essere la natura di tali fluidi. Per analogia, a quanto in altri casi si è finito per ammettere, si può supporre che debba trattarsi, ancor qui, di struttura corpuscolare. Realmente, la fisica teorica ammette la possibilità di esistenza dei *gravitoni*, che costituirebbero i *quanti dei campi gravitazionali*. Ma si tratta, per ora, di ipotesi molto vaga, che nondimeno vogliamo accettare. Sorge allora il quesito, di spiegare come questi gravitoni possano mantenersi libratì nel vuoto, tutto intorno alla materia. Che questo avvenga, non pare per ora accettabile, a meno che si facciano altre ipotesi. Sembra perciò più comprensibile, che sia la materia, ad emettere continuamente tali corpuscoli. Tale emissione non si esaurirebbe affatto, durante i tempi corri-

spondenti alle nostre osservazioni. L'emissione stessa avverrebbe in linea retta, da parte della materia, in tutte le direzioni: ciò darebbe luogo alla legge di Newton. Ma ciò varrebbe per le grandi distanze, fra le masse attiranti. Per le piccole, occorre far qualche ipotesi aggiuntiva. Se si ammette che le traiettorie dei gravitoni possano venir incurvate, dalla presenza della materia attirata, questa potrebbe essere colpita da maggior quantità di gravitoni; si accrescerebbe così, la forza prevedibile newtoniana. È plausibile ammettere, che un tale processo si svolga in modo più efficace, quando le masse attiranti sono vicine; esso è massimo per i nuclei atomici, le cui particelle sono quasi a contatto.

Giunti a simili ammissioni, è forse lecito formulare un'altra ipotesi. La materia avrebbe dunque la proprietà di emettere fluido gravifico, e, nello stesso tempo, di riceverne e di assorbirne. In questo giuoco, essa può diventare sede di forze anche assai considerevoli, come nel caso dei nuclei atomici. Ciò si dice, benché l'interazione elettrica repulsiva, fra i protoni, debba alquanto limitare quella fra neutroni, e fra neutroni e protoni. È un fatto concreto che in tali condizioni, la materia è soggetta ad una considerevole azione, che manca se essa è dispersa in maggiore spazio. Ora, per esempio, nel caso dell'elio, si ha il ben noto fatto della diminuzione di massa, interpretato da Einstein con la liberazione di energia. Ma a tale ipotesi, si può sostituire l'altra, secondo cui la menomazione apparente della massa sia dovuta alle circostanze in cui essa si trova; cioè alla grande sollecitazione statica delle forze attrattive. Queste sono enormemente superiori, rispetto a quelle immaginabili, nel caso in cui essa si trovasse, per esempio, alla superficie dei più grandi astri. Una tale ammissione corrisponderebbe al principio nuovo, per cui: *una massa materiale, con le sue caratteristiche di peso e di inerzia, apparirebbe alquanto ridotta, quando è soggetta a grandi forze attrattive.*

È da avvertire che tale ipotesi è conciliabile con la formazione di energia libera, dopo che le forze attrattive hanno agito. È una necessità, che il lavoro compiuto da tali forze compaia in qualche modo. E, mentre ciò avviene, la diminuzione di massa corrispondente alla ipotesi fatta (il noto *difetto di massa*), rappresenterebbe semplicemente un fatto contemporaneo, anziché la causa della comparsa di energia. Si vede dunque come la nuova ipotesi risponda meglio al principio di causalità, che non la asserita trasformazione della massa in energia.

Infatti, nella teoria che ora si propone (che, del resto, potrebbe subire qualche modificazione) tutto appare conseguente. Siamo stati indotti a dare una spiegazione del fenomeno attrattivo gravitazionale, con l'ammettere l'emissione di un fluido di gravitoni, riuscendo così ad eliminare l'ipotesi eterea; si è ammesso poi, che la trasmissione ed il successivo assorbimento di questo fluido verrebbero in certo modo modificati, dalla materia che ne sarebbe colpita, spiegando così le maggiori forze di coesione e nucleari; ed infine, si è ammesso che la materia che si trova soggetta a grandi forze attrattive, ci apparirebbe alquanto diminuita nel suo valore (sia pesante che inerte), come realmente ci dice l'esperienza, con la constatazione del *difetto di massa*. La disponibilità di energia, che si osserva non appena tali forze attrattive si manifestano e si stabilizzano, è una conseguenza necessaria, voluta già dalle teorie classiche, di tutto l'immaginato processo.

Per contro, nell'ipotesi, oggi generalmente accettata, della trasformazione di materia in energia (e viceversa), nessuna precisa ipotesi si fa sulle cause di questa trasformazione. Si valuta il fatto del difetto di massa quale inoppugnabile risultato sperimentale. Ma nessuna soddisfacente spiegazione si dà per esempio, del fatto per cui il protone, se libero, ha la massa 1,00812, e se costituisce (insieme con un altro protone e con due neutroni) l'elione, ha circa la massa 1,0009. Tale diminuzione corrisponde realmente alla sparizione di una parte della *sostanza* che costituisce il protone (parte che si sarebbe trasformata in energia)? Oppure, tale *sostanza* perderebbe in parte le sue qualità di peso e di inerzia, apparendo quale una massa più leggera? In ogni caso, perchè la presenza degli altri tre corpuscoli impedisce che il protone si ricostituisca? La teoria che qui si propone dà logica e semplice ragione dei fatti: la forte attrazione tiene vincolati i quattro componenti, ed in conseguenza di ciò, per il nuovo principio enunciato, essi appaiono più leggeri e meno inerti.

In linea di semplice orientamento e con grossolana approssimazione, mediante la teoria proposta, si può calcolare quale sia la forza con cui, per esempio, un neutrone rimane fissato ad un protone, quando si forma un elione. Basta, all'uopo, ricordare che il difetto di massa di tale nucleo è circa $1/130$ della massa totale, delle quattro particelle elementari. Supponendo che nella formazione dell'elione talune particelle si attirino reciprocamente, con una forza dell'ordine di 10^5 dine, si spiega la liberazione di energia, nella misura di quella che si osserva sperimentalmente. In tale processo, le particelle precipiterebbero l'una sull'altra, con una velocità uguale ad $1/12$ di quella della luce.

Certamente, le suggestive verifiche sperimentali della formula $E = mc^2$, possono a prima vista, lasciar poco credito a questa nuova teoria. Ma occorre tener conto che non deve esser difficile, interpretare tali verifiche altrimenti; esse potrebbero così servire di appoggio alle vedute che ho avanzato.

Relativamente a tali vedute, debbo esporre un'ulteriore riserva. Se, realmente gli ipotetici gravitoni vengono deviati dal loro percorso dalla materia, ciò corrisponde ancora ad una sorta di azione a distanza, sia pur più ridotta, rispetto a quelle che si considerano, cercando di spiegare tutto il fenomeno gravifico. Si vede con ciò, che il problema primitivo ricompare. Non è il caso, per ora, di perfezionare, sotto tal riguardo, la teoria proposta, perchè sarà bene prima esaminare se altre pregiudiziali, di carattere fondamentale, si oppongono alla teoria stessa. La scienza di oggi, con lo straordinario suo progresso sperimentale e teorico, ha molto ampliato la nostra conoscenza. Ma nel far ciò, ci pone altresì nuovi problemi da risolvere, tanto più difficili, in quanto si riferiscono al mondo dell'infima struttura della materia, delle cui caratteristiche non abbiamo sempre diretto controllo. Un simile caso sembra ancora verificarsi in quanto si è esposto.

Fisica. — *Sulle origini dei raggi cosmici.* Nota (*) del Corrisp.
ALESSANDRO AMERIO.

L'esame delle varie teorie elettriche e magnetiche sviluppate per ricercare le origini dei raggi cosmici mi ha suggerito che questi raggi possano avere più di una causa e che una di queste sia stata trascurata.

Tutte le teorie sono fondate su giuochi di particelle elettrizzate, in moto entro campi elettrici od entro campi magnetici variabili, campi che si estendono al sistema planetario o a tutta la Galassia.

A me è parso che fosse trascurata una causa motrice ed è la radiazione emessa dalle stelle, perciò ho voluto esaminare l'effetto di questa tenendo conto della pressione di radiazione.

È noto che questa pressione su una superficie grande è data dalla densità della energia che si trova nella immediata vicinanza della superficie colpita.

Se però questa superficie è molto piccola rispetto alle lunghezze d'onda incidenti la pressione è evanescente. Se la superficie colpita è sferica, secondo K. Schwarzschild, la pressione cresce rapidamente al crescere del raggio, fino a che questo sia circa un terzo della lunghezza d'onda incidente, poi decresce al crescere del raggio e tende rapidamente al suo valore limite.

Se si vuol tener conto di questa pressione bisogna fare assegnamento su particelle aventi dimensioni dell'ordine delle lunghezze d'onda e quindi trascurare particelle elementari, atomi e molecole.

Ora nello spazio siderale si trovano diffusi, non uniformemente, corpuscoli di varia grandezza e l'esame della luce diffusa fa vedere che le dimensioni sono prevalentemente dell'ordine di mille Å.

Se si fa il conto di quanto avviene alla superficie del Sole si vede che per una sfera di tale diametro e densità unitaria la pressione di radiazione è circa 18 volte la gravità e perciò se detta particella venisse proiettata dal Sole con una certa velocità iniziale, a meno di incontri con altre particelle, essa verrebbe respinta dal Sole da una forza 18 volte superiore alla gravità e si muoverebbe con moto accelerato fino a che, diminuendo la pressione della radiazione in causa del movimento, si raggiungesse un moto uniforme.

Se questa particella venisse proiettata dal Sole con piccola velocità, essa arriverebbe a distanza tanto grande da essere praticamente infinita, con una velocità di meno di 3000 Km. al secondo, che è trascurabile rispetto a quelle dei raggi cosmici.

Ma il Sole è una stella a temperatura moderata e di diametro relativamente piccolo; la densità della radiazione e quindi la pressione che essa esercita, è molto piccola. Però queste grandezze crescono con la quarta potenza della temperatura assoluta e poichè vi sono stelle molto più calde e molto più grandi del Sole ho voluto calcolare quali risultati si potrebbero ottenere in alcuni casi particolari.

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1950.

Alla cortesia del prof. Zagar devo un elenco di una trentina di stelle molto calde e per alcune di queste ho voluto fare i calcoli delle velocità finali che acquisterebbero granuli sferici aventi diametri intorno a mille Å e densità unitaria, nell'ipotesi che partano con velocità trascurabili.

Osservo subito che se per il Sole, la pressione di radiazione è circa 18 volte la gravità per sfere di mille Å di diametro, per una stella avente una temperatura quadrupla di quella del Sole, a parità delle altre circostanze, la gravità diventa assolutamente trascurabile e meglio si dica per temperature superiori. Se poi si tiene conto che le masse delle stelle sono dello stesso ordine di quella del Sole e che i loro raggi per le più calde in media devono essere superiori a quello del Sole si vede che anche per esse si può trascurare l'effetto della gravità.

Le dimensioni di questi granuli sono tali da risentire in pieno l'effetto delle radiazioni delle stelle più calde del Sole perchè il diametro è dell'ordine delle lunghezze delle onde che sono emesse col massimo dell'energia.

Se si indica con m_0 la massa da fermo della sferetta, con v la sua velocità istantanea, con c la velocità della luce nel vuoto, con f la forza repulsiva agente, con r la distanza dal centro della stella, l'equazione che si stabilisce senz'altro è

$$(1) \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv + \frac{v^2}{c^2} \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}} dv = f \frac{dr}{v}$$

la quale si semplifica in

$$(2) \quad \frac{m_0 v}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}} dv = f dr.$$

Se σ è la costante di Kurlbaum, s la sezione meridiana della sfera, R il raggio della stella, T la sua temperatura superficiale e a un coefficiente minore di 1 di cui parlerò in seguito per giustificare il valore, la forza f è data da

$$f = \frac{a\sigma T^4 s R^2}{3 \cdot 10^{10} r^2}.$$

Bisogna osservare che questa forza non sarà operante immediatamente vicino alla stella se questa è molto calda, ma solo a cominciare da quella distanza R_1 dal centro, alla quale possa già sussistere lo stato liquido.

Nell'integrazione di quest'equazione va quindi fatto variare r non dal raggio R della stella ma a partire da quel particolare valore R_1 cui corrisponde la temperatura $T_1 < T$ alla quale possa sussistere lo stato liquido.

Le cose stanno come se alla stella di raggio R e temperatura T se ne sostituisse una di raggio R_1 e temperatura T_1 .

Risulta dalle osservazioni della corona solare interna che essa ha uno spettro costituito da qualche riga di emissione, segno di presenza di gas, con un debole sfondo continuo sul quale si sovrappone un debole spettro solare polarizzato. Lo sfondo continuo e lo spettro solare polarizzato sono prova che nella corona è presente qualche particella di materia condensata. Si può ammettere che queste

particelle in moto entro vapori abbiano la temperatura di questi. Sia T_2 questo valore che assumo come la massima temperatura a cui può esistere una massa liquida.

Se ora consideriamo una particella *nel vuoto* sottoposta ad una radiazione, come ho dimostrato⁽¹⁾, la temperatura che essa assume è varia a seconda della forma. Se essa è sferica di raggio ρ ed è investita da una radiazione che nel totale corrisponda ad una temperatura T_1 essa assorbe in ragione di

$$\pi \rho^2 T_1^4$$

ed emette in ragione di

$$4 \pi \rho^2 T_2^4$$

ne viene

$$(3) \quad T_1 = T_2 \sqrt{2}$$

cioè la temperatura della radiazione incidente è maggiore della temperatura della sfera. Ammesso quindi che questa possa esistere alla temperatura di 5600° ne viene per T_1 circa 8000° vale a dire che si può avere una sfera liquida nel vuoto in prossimità di una sfera sulla quale la densità della radiazione corrisponda alla temperatura di 8000° .

Qual'è il raggio di questa sfera?

Se R è il raggio della stella che ha la temperatura $T > 8000^\circ$ e quindi ha la radiazione totale proporzionale a T^4 , la potenza totale irradiata sarà $4 \pi R^2 \sigma T^4$.

Nello spazio circostante l'energia è distribuita come se fosse emessa da una sfera di raggio R_1 alla temperatura T_1 tale che sia

$$R_1^2 T_1^4 = R^2 T^4$$

da cui

$$(4) \quad R_1 = R \frac{T^2}{T_1^2}$$

Nell'integrazione dell'equazione (2) bisognerà quindi far variare r da R_1 a ∞ . Se si pone

$$(5) \quad F = \frac{\sigma}{4 \cdot 10^{10} \rho} T^4$$

la formula risolutiva per la velocità finale diventa

$$(6) \quad V = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left[1 + a \frac{FR}{c^2} \frac{T_1^2}{T^2}\right]^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{a\sigma}{4 \cdot 10^{10}} \frac{R}{\rho c^2} T^2 T_1^2\right]^2}}$$

Il coefficiente a che riduce l'effetto della pressione è dovuto a questo fatto: esso sarebbe eguale ad uno se la radiazione agisse su una superficie ferma. In realtà agisce su una superficie che finisce collo sfuggire molto velocemente rispetto alla radiazione che l'investe e perciò il valore di a diminuisce tendendo a zero

(1) « Annali di Geofisica », 1948. Due estensioni del concetto di temperatura.

col tendere della velocità a quella della luce. Se questo fosse il valore finale della velocità, ad a si potrebbe attribuire il valore $1/2$.

Ma le velocità finali, pure essendo grandi, sono sempre notevolmente inferiori a quella della luce. Non sapendo il valore finale, ho fatto il calcolo in due tempi: nel primo ho dato ad a il valore $1/2$ e con questo ho calcolato le velocità corrispondenti per sfere aventi diametri di 2000, 1000, 500 Å. Tenuto conto dei valori trovati per queste velocità ho determinati, caso per caso, i nuovi valori da dare ad a con i quali ho rifatto i calcoli e infine ho verificato, in base ai nuovi valori delle velocità, se i valori adottati per a erano accettabili.

Così ho ottenuto la tabella unita.

| STELLA | T | R \odot | V in 10^{10} cm/sec per granuli | | | Energie in 10^{15} E. V. | | | Energie per atomo in 10^8 E. V. | | |
|-------------------|--------|-----------|--------------------------------------|------|-------|-------------------------------|------|------|--------------------------------------|------|------|
| | | | d=2000 | 1000 | 500 Å | | | | | | |
| Antares . . | 4000 | 450 | 0,14 | 0,19 | 0,27 | 2,3 | 0,59 | 0,16 | 0,38 | 0,75 | 1,58 |
| β Centauro. | 21000 | 11 | 0,24 | 0,34 | 0,48 | 7,5 | 1,9 | 0,48 | 1,2 | 2,5 | 4,9 |
| NGC 2244,8 | 31600 | 7,25 | 0,28 | 0,42 | 0,61 | 10,1 | 3,0 | 0,77 | 1,9 | 3,6 | 7,9 |
| » 6871,5 | » | 15,1 | 0,42 | 0,59 | 0,80 | 23,5 | 5,6 | 1,4 | 3,8 | 7,1 | 13,9 |
| » 2262,1 | 35500 | 19,1 | 0,53 | 0,76 | 0,98 | 37,7 | 9,4 | 2,1 | 5,6 | 12,0 | 21,8 |
| » 2264,60 | 48000 | 6,61 | 0,42 | 0,60 | 0,80 | 23,5 | 5,9 | 1,4 | 3,8 | 7,5 | 14,0 |
| » 2240,15 | 63000 | 4,57 | 0,44 | 0,65 | 0,86 | 26,0 | 7,1 | 1,6 | 4,1 | 9,0 | 16,1 |
| » 6853 | 75000 | 5 ? | 0,57 | 0,78 | 1,05 | 43,6 | 10,3 | 2,5 | 6,95 | 13,1 | 25,1 |
| » 2438 | 85000 | » | 0,64 | 0,80 | 1,15 | 54,3 | 12,7 | 3,0 | 8,7 | 16,1 | 30,5 |
| » 1952 | 100000 | » | 0,75 | 1,0 | 1,32 | 75,4 | 17,7 | 4,2 | 12,0 | 22,5 | 42,4 |
| » 6545 | 140000 | » | 0,99 | 1,31 | 1,68 | 137,0 | 31,0 | 7,6 | 21,8 | 39,4 | 77,8 |

In questa ho messo come prima la stella Antares per far vedere che nonostante l'immensità del suo diametro che è circa 450 volte quello del Sole, data la sua modesta temperatura (circa 4000°) essa non può partecipare al fenomeno che molto debolmente.

La prima colonna ci dice quale stella si è considerata, la seconda la sua temperatura, la terza il raggio avendo preso per unità quello del Sole, le tre successive le velocità finali calcolate per i tre tipi di granuli supposti; le tre seguenti, le energie acquistate dai singoli granuli espresse in 10^{15} E. V. ed infine le ultime tre le energie che sono acquistate dai singoli nuclei atomici del granulo, fatta l'ipotesi che essi siano di calcio.

Per le quattro stelle più calde non conosco i raggi e nel calcolo ho supposto che sia eguale a cinque volte il raggio solare. Come si vede dalla (6) la velocità finale è praticamente proporzionale alla radice quadrata del raggio della stella e l'energia al raggio stesso; supponendo un raggio doppio, l'energia all'incirca raddoppierebbe. Ora la media dei raggi delle stelle meno calde favoritemi dal prof. Zagar è oltre 10 volte quella del Sole; è probabile quindi che dette stelle più

calde abbiano raggi probabilmente più che decupli di quello del Sole, perchè per potere giungere a temperature tanto elevate durante la sua evoluzione una stella deve avere masse e dimensioni notevolmente superiori a quelle del Sole che è una stella di massa e volume piccoli, mentre è poco calda. Pertanto anche se le temperature di alcune di queste stelle sono state valutate in eccesso, come mi pare possibile, si giungerebbe sempre a valori finali molto elevati.

Infine anche se si dovesse partire da una temperatura alquanto più bassa di quella supposta per l'esistenza dello stato liquido non si cambierebbe l'ordine di grandezza per le velocità e per le energie.

Nè i valori riportati nella tabella sono da considerare come i massimi valori che corrispondono alle condizioni supposte per le stelle.

Infatti essi sono stati dedotti avendo ammesso che la densità della radiazione sia una funzione continua. Essi sono quindi una media statistica dei vari valori che avrebbero raggiunto velocità ed energie che possono essere diverse da una sfera ad un'altra eguale, perchè ognuna può essere colpita da un numero di fotoni più o meno grande e le differenze possono essere notevolissime.

Inoltre non si è tenuto conto delle velocità di proiezione. Queste sul Sole sono in genere molto modeste, potendo giungere a qualche migliaio di chilometri per secondo, ma nelle protuberanze possono assumere valori molto maggiori.

Una riduzione nei valori delle velocità e delle energie calcolate può essere prodotta da ionizzazione delle molecole vaganti (in grande prevalenza idrogeno) ma data l'enorme massa dei granuli essa diventa trascurabile; infine osservo che è poco probabile un incontro con altri granuli, perchè tutti fortemente elettrizzati positivamente dall'azione fotoelettrica.

Questi granuli possono quindi pervenire all'atmosfera terrestre con grandissime velocità e con energie che possono superare i 10^{17} E.V. e penetrando in essa potranno seguire delle vicende complesse che però, dato il grande numero di atomi di ogni granulo, finiranno con l'essere tutte molto simili.

Il granulo arriverà prima all'atmosfera di idrogeno quasi puro molto rarefatto; ne attraverserà tutto lo spessore che è di oltre 200 km. fino a circa 80 km. dal suolo. A questa altezza la pressione è di 0,02 mm. le molecole hanno distanze medie di cm. 10^{-5} pari alla media dei diametri dei granuli. È quindi certo che ognuno di essi ionizzerà il gas, ma c'è anche qualche probabilità che un suo nucleo urti contro un protone e lo liberi proiettandolo in avanti con velocità maggiore della sua. Poi il granulo passerà nella sottile zona dove c'è una discreta percentuale di elio, preceduto dai protoni già liberati e qui ionizzerà l'elio ed è probabile che qualche suo nucleo proietti, con aumentata velocità, qualche elione, sicchè penetrerà nello strato di azoto preceduto dai protoni già liberati e da particelle α molto più veloci di quelle emesse dal radio, perchè anche più veloci di quelle dei nuclei urtanti. Queste particelle α e i nuclei del granulo, nell'azoto potranno spezzare qualche atomo generando protoni, neutroni, mesoni, fotoni di grande energia per due motivi: uno perchè queste parti essendo di piccola massa rispetto a quella del nucleo urtato vengono proiettate con velocità aumentata; secondo, perchè come risulta dalle vecchie esperienze di Rutherford, la frattura degli atomi di azoto

avviene come una vera esplosione in cui l'energia delle particelle residue viene incrementata dalla eventuale diminuzione della massa finale.

L'ipotesi fatta è quindi in grado di spiegare le grandi velocità e le conseguenti grandi energie dei singoli raggi cosmici, perchè queste possano anche, nel complesso, superare quelli dei singoli nuclei urtanti. Ma il granulo considerato non esaurisce la sua energia nell'urto di uno dei suoi nuclei contro un nucleo atomico dell'aria, perchè quel nucleo è legato al granulo dal debole legame molecolare, perciò il granulo continuerà con la stessa velocità mentre il nucleo che aveva urtato o verrà staccato o spezzato alla sua volta. Quanto è avvenuto per un nucleo potrà quindi verificarsi migliaia di volte e trasferire allo sciame di particelle che genera gran parte della propria energia che come abbiamo visto, può anche superare 10^{17} E.V. Il granulo può quindi generare uno dei grandi sciame che hanno estensioni di centinaia di metri o di chilometri e potrà svilupparsi il processo a cascata.

Il granulo esaurirà la propria energia in parte con questi urti, in parte ionizzando l'aria, alla fine per attrito e il residuo cadrà come pulviscolo meteorico.

L'ipotesi presentata permette di spiegare alcuni particolari. Per esempio essa spiega immediatamente perchè l'azione del Sole appare così debole: se esso agisce direttamente è solo in grazia di qualche eruzione che sia proprio rivolta in modo che alcuni prodotti giungano alla Terra, ciò che è eccezionale perchè in generale le eruzioni proiettano materia ed elettroni in direzioni troppo divergenti; tutto il resto della materia lanciata dal Sole e che è troppo lento per contribuire alla radiazione cosmica, non viene sufficientemente accelerato dalla pressione della luce.

Altro particolare è la piccola prevalenza di cariche positive che si osserva nella radiazione cosmica: essa è ovvia perchè il granulo giunge all'atmosfera terrestre fortemente carico di elettricità positiva, in grazia dell'energico effetto fotoelettrico sopportato durante tutto il viaggio nel vuoto sotto l'azione delle radiazioni u. v.; che abbondano nello spazio interstellare. Il granulo disgregandosi darà origine a particelle prevalentemente positive.

Consideriamo la direzione: questa deve essere molto diversa da quella in cui osserviamo la stella origine, per due ragioni: anzitutto perchè il granulo viaggia con velocità che in media è molto minore della luce; secondariamente perchè il suo moto può essere influenzato dal fatto che può passare vicino ad altri granuli e se questi sono egualmente diretti determinano una divergenza; infine perchè il granulo è investito dai raggi di altre stelle; quest'azione sarà generalmente molto debole, eccetto che per quei granuli che siano diretti presso a poco verso altre stelle; queste potranno deviare il granulo e talvolta contribuire ad incrementarne l'energia.

La quasi perfetta isotropia dello spazio rispetto alla radiazione cosmica è una conseguenza immediata, perchè le stelle efficaci sono diffuse un pò dovunque.

Infine l'ipotesi avanzata spiega in modo esauriente la presenza di nuclei pesanti, come quello del ferro. Questo ferro si trova nel granulo (il ferro meteorico è abbondante) e può esserne sbalzato in uno dei tanti urti che possono avvenire. La sua energia potrebbe essere di molti B. E.V.

Resterebbe così eliminata la difficoltà prospettata dal Fermi nella sua ingegnosa teoria di immettere nel giuoco dei campi magnetici immaginati, un nucleo di ferro con sufficiente energia.

CONCLUSIONI:

1° L'origine prima della radiazione cosmica è l'emissione di materia da parte delle stelle;

2° piccoli granuli materiali possono venire fortemente accelerati dalla pressione di radiazione da parte di stelle che siano ad un tempo molto calde e molto grandi. Le energie di questi granuli possono superare notevolmente 10^{17} E.V. e per ogni nucleo atomico anche decine di B. E.V.

Stelle giganti ma di temperature inferiori a quelle del Sole sono inefficaci, e per contro le *novae* e le *supernovae* possono contribuire.

3° Penetrando nell'atmosfera questi granuli possono generare grandi sciame di particelle elementari ed immettere nella radiazione cosmica nuclei pesanti.

Astrofisica. — *L'espansione dell'Universo e la pressione della luce.* Nota (*) del Corrisp. ALESSANDRO AMERIO.

La luce che viene dalle lontanissime nebulose ha spettri le cui righe presentano regolari spostamenti verso la parte meno rifrangibile. Ciò venne generalmente interpretato come prodotto dall'effetto Doppler e perciò come prova dell'espansione dell'Universo. Secondo i dati spettrografici quest'espansione avverrebbe con una velocità tanto maggiore quanto più grande è la distanza della nebulosa. Non volendo dare questa interpretazione al fatto sperimentale, si è pensato che lo spazio vuoto trasmetta le vibrazioni con una certa fluorescenza; non si vedeva però con quale fondamento teorico.

Nella mia Nota precedente *Sulle origini della radiazione cosmica* (1) ho fatto vedere come piccoli granuli materiali possono essere fortemente accelerati dalla pressione della luce. Quanto ho dimostrato per granuli aventi dimensioni dell'ordine di 100 \AA , potrebbe verificarsi, con altro procedimento, anche per particelle elementari elettrizzate investite da fotoni, come avviene ad esempio nell'effetto Compton, coi raggi X.

In ognuno dei casi i fotoni incidenti cedono parte della loro energia al corpuscolo investito e per conseguenza la loro frequenza deve diminuire. Quando il corpuscolo è lento, la frazione di energia che gli viene ceduta dal fotone incidente è maggiore che quando è veloce e si muove nella stessa direzione del fotone e perciò è anche maggiore la diminuzione di frequenza subita dal fotone incidente. Esso passa in ogni caso da una frequenza ν ad una ν_1 , secondo la nota relazione

$$h\nu - h\nu_1 = E$$

dove E è l'energia ceduta.

In ogni caso un fotone dopo avere investito un corpuscolo e ceduta parte della sua energia, ne potrà investire un altro e poi ancora, con una probabilità tanto maggiore quanto maggiore sia il suo cammino. Nè la probabilità degli

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1950.

(1) Vedi mia Nota precedente.

investimenti è tanto piccola se si pensa che l'abbondanza di questi granuli attribuisce allo spazio intersiderale una densità media di $10^{-25} \dots 10^{-26}$ circa, il che porta a pensare in media uno di questi granuli in ogni cubo di m 80 di lato ⁽²⁾; in molte regioni essi sono molto più fitti che in altre ed allora rendono addirittura opaco lo spazio.

Si può dire che siccome in media il numero dei corpuscoli investiti, elementari o no, cresce con la lunghezza del cammino della luce, così di pari passo diminuisce la frequenza, vale a dire questa diminuisce tanto più quanto più lontano sia l'astro che si considera. Pertanto per un osservatore, *ovunque sia situato*, la frequenza della luce che gli perviene dagli astri sarà *in media* tanto più ridotta quanto maggiore sarà la distanza dell'astro che glie la invia e perciò quell'osservatore giudicando in base all'effetto Doppler si riterrà al centro dell'espansione dell'Universo. Questa verrebbe così ad avere infiniti centri di espansione.

Ecco quindi in qual modo lo spazio può presentare quella specie di fluorescenza a cui ho accennato prima. Essa è dovuta al fatto che la luce negli spazi intersiderali incontra un immenso numero di particelle: elettroni, atomi, molecole, corpuscoli di dimensioni varie, dell'ordine di un migliaio di Å.

Questo fatto fa quindi spostare verso il rosso lo spettro delle nebulose lontane e questo spostamento è, grosso modo, tanto maggiore quanto maggiore sia la distanza sicchè se la distribuzione di questa materia fosse omogenea, gli spostamenti sarebbero sempre rigorosamente crescenti con le distanze e attribuendoli all'effetto Doppler darebbero il risultato noto.

L'espansione dell'Universo è in accordo con la teoria della relatività e non sarebbe logico prendere posizione contro questa deduzione in senso assoluto, perchè ne mancano gli elementi.

Solo voglio porre in evidenza due circostanze:

1° gli spostamenti osservati nelle righe potrebbero anche non essere altro che conseguenza del decadimento della frequenza dovuto alla causa citata, ciò che spiegherebbe perfettamente la geocentricità apparente;

2° la geocentricità o l'eliocentricità sono con ogni probabilità puramente apparenti perchè non hanno alcuna base astronomica, visto che il Sole, date le sue condizioni e la sua posizione nella Galassia non è altro centro che del suo sistema!

Sfortunatamente ciò che sappiamo per ora dello spazio interstellare non è ancora tale da permettere un calcolo attendibile degli spostamenti che si possono prevedere. Bisognerebbe essere più sicuri del numero di urti cui può andare soggetto un fotone, cioè del numero di particelle che può incontrare, delle loro masse e delle dimensioni.

Solo in questo caso si potrebbe calcolare la variazione media della frequenza per una data radiazione, ammessa una eguale distribuzione dei corpuscoli. Sottraendo questa diminuzione dai valori dati dalle osservazioni spettroscopiche si potrebbe arrivare alla variazione dovuta effettivamente all'effetto Doppler. Potrebbero allora risultare delle differenze che per ora sfuggono, dati i grandi valori che si osservano per gli spostamenti totali, e quindi si avrebbero altri valori per la velocità di fuga e da essi si potrebbe al caso dedurre il centro dell'espansione.

(2) *L'espace interstellaire*. Mineur.

Chimica fisica. — *Su una riga Raman caratteristica delle aldeidi e dei chetoni*^(*). Nota di GIOV. BATTISTA BONINO, EOLO SCROCCO, PAOLO CHIORBOLI, presentata^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Lo spettro Raman delle molecole di tipo $X-CO-Y$ ha attirato in modo speciale l'attenzione dei fisici e dei chimici. È noto infatti che lo studio di una speciale frequenza di oscillazione dello spettro molecolare di questo tipo di composti è risultato particolarmente significativo specie per seguire sperimentalmente fenomeni di perturbazione del gruppo funzionale $C=O$. Tali perturbazioni sono di interesse chimico in quanto ritrovano spesso un netto riscontro nella fenomenologia chimica dei prodotti sopra schematizzati.

Questa frequenza di oscillazione molecolare è la cosiddetta « frequenza del gruppo $C=O$ » che cade a circa $1650-1800\text{ cm}^{-1}$. Una sua caratteristica assai interessante è l'apparente insensibilità rispetto alle « masse » degli atomi o dei gruppi legati al $C=O$. Così già Kohlrausch e Pongratz⁽¹⁾ nel 1934 cercavano di interpretare le variazioni della frequenza del $C=O$ nelle molecole del tipo $X-CO-Y$ solo come conseguenza delle variazioni della forza di richiamo del $C=O$ indipendentemente dalle masse dei sostituenti. È noto che, per esempio, passando dall'acetone (sostituente: CH_3 , massa 15) al fosgene (sostituente: Cl , massa 35,5) non solo la frequenza del $C=O$ non mostra una diminuzione, nonostante il forte aumento della massa, ma segna un aumento, elevandosi da 1706 cm^{-1} per l'acetone a 1810 cm^{-1} per il fosgene.

Sono note a tale proposito anche le ricerche di Kohlrausch e Köppl⁽²⁾ che mettono in evidenza come la cosiddetta frequenza del $C=O$ a 1700 cm^{-1} circa nelle molecole di aldeidi e di chetoni alifatici ($X-CO-H$, $X-CO-CH_3$) resti invariata all'allungarsi della catena alchilica satura X . La detta frequenza, che vale 1711 cm^{-1} nel metil-etil-chetone, resta ancora a 1710 cm^{-1} nell'etil-nonil-chetone per quanto la massa del gruppo X sia passata da 17 per il gruppo etilico ($-C_2H_5$) a 127 per il gruppo nonilico ($-C_9H_{19}$). Così nelle aldeidi $X-CO-H$ la frequenza del $C=O$, che vale 1722 cm^{-1} nell'aldeide propionica ($X=C_2H_5$), resta a 1721 cm^{-1} nell'aldeide decilica dove $X=C_9H_{19}$.

Anche recentemente Kohlrausch⁽³⁾ rileva che per ciascuna delle due serie delle aldeidi e dei chetoni (metilchetoni) alifatici saturi gli scarti medi della posizione della riga Raman caratteristica del $C=O$ dal suo valore medio, quali emergono da misure di alta precisione di spettrografia Raman, sono inferiori a due numeri d'onda.

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » della Università di Bologna).

(**) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) KOHLRAUSCH e PONGRATZ, « Z. phys. Chem. » [B], 27, 182 (1934).

(2) KOHLRAUSCH e KÖPPL, « Z. phys. Chem. » [B], 24, 370 (1934).

(3) KOHLRAUSCH, « Acta Phys. Austriaca », 1, 112 (1947).

A questa « fissità » della frequenza del $C=O$, al variare della massa dei sostituenti, fa invece riscontro una netta perturbazione quando il radicale X porta un doppio legame etilenico « coniugato » al $C=O$. Così, mentre la frequenza del $C=O$ dell'aldeide butirrica (C_3H_7-CO-H) cade a 1718 cm^{-1} , quella dell'aldeide crotonica ($CH_3-CH=CH-CO-H$) cade a 1685 cm^{-1} , con una diminuzione di ben 33 numeri d'onda. Nella serie dei chetoni la frequenza del $C=O$ cade a 1710 cm^{-1} nel metil-propil-chetone e scende a 1668 cm^{-1} nell'etiliden-acetone ($CH_3-CH=CH-CO-CH_3$) diminuendo di 42 numeri d'onda. Dunque, in condizioni corrispondenti di struttura molecolare, la variazione delle masse non incide sulla frequenza del $C=O$, mentre vi incide seriamente la presenza di un doppio legame coniugato al $C=O$ stesso.

Se il doppio legame etilenico, come avviene per esempio nel citronellale e nell'aldeide 10-undecilenica non è coniugato al gruppo carbonilico, la frequenza

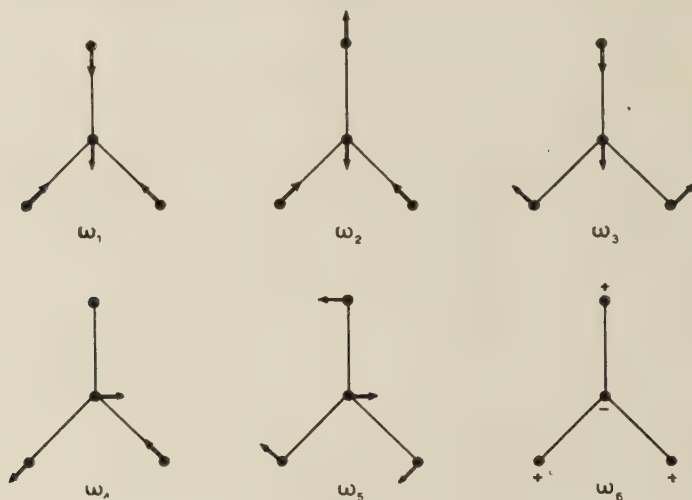


Fig. 1.

caratteristica di questo gruppo corrisponde a quella delle aldeidi alifatiche sature (1719 cm^{-1} per il citronellale, 1721 cm^{-1} per l'aldeide 10-undecilenica, etc.) annullandosi così ogni perturbazione.

Non si dovrebbe neppure passare sotto silenzio che lo spettro dell'aldeide formica mostra una frequenza a 1744 cm^{-1} che Sutherland e Dennison⁽⁴⁾ mettono senz'altro in relazione con la forza di richiamo del gruppo $C=O$.

Lo studio della dipendenza della frequenza del $C=O$ dalle masse dei sostituenti è stata ripresa da un punto di vista più teorico e razionale da Lechner⁽⁵⁾ e poi in modo anche più diligente da Burkard⁽⁶⁾. Nella fig. 1 sono riprodotti i vari tipi di oscillazioni delle molecole $\begin{matrix} X \\ \diagup \\ C=O \\ \diagdown \\ X \end{matrix}$. La « frequenza del $C=O$ » corrisponde al tipo di oscillazione ω_2 .

(4) SUTHERLAND e DENNISON, « Proc. Roy. Soc. » (London) [A] 148, 261 (1934).

(5) LECHNER, « Wien. Ber. », 141, 633 (1932).

(6) BURKARD, « Proc. Ind. Acad. », 8, 365 (1938).

Burkard sviluppa la nota teoria dei sistemi di forze di valenza già schematizzata da Bjerrum⁽⁷⁾ nel 1914 e giunge alle seguenti formule:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= f_{1,2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) + f_{1,3} \left(\frac{1}{m_3} + \frac{2}{m_1} \cos^2 \beta \right) + \\
 &\quad + \frac{2D+d}{l_2^2} \left(\frac{1}{m_3} + \frac{2}{m_1} \sin^2 \beta \right) \\
 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 &= f_{1,2} f_{1,3} \left(\frac{1}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos^2 \beta \right) + \\
 &\quad + f_{1,2} \frac{2D+d}{l_2^2} \left(\frac{1}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{2}{m_1 m_2} \sin^2 \beta \right) + \\
 &\quad + f_{1,3} \frac{2D+d}{l_2^2} \left(\frac{1}{m_2^2} + \frac{2}{m_1 m_3} \right) \\
 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= f_{1,2} \cdot f_{1,3} \frac{2D+d}{l_2^2} \left(\frac{1}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_3^2} + \frac{2}{m_1 m_2 m_3} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

in cui è $\lambda_i = (2\pi c \omega_i)^2$.

Le masse m_1, m_2, m_3 , le forze di richiamo f_i e le costanti di deformazione d e D sono schematicamente rappresentate nella fig. 2. Il risultato a cui si per-

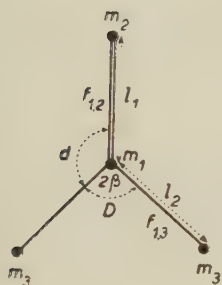


Fig. 2.

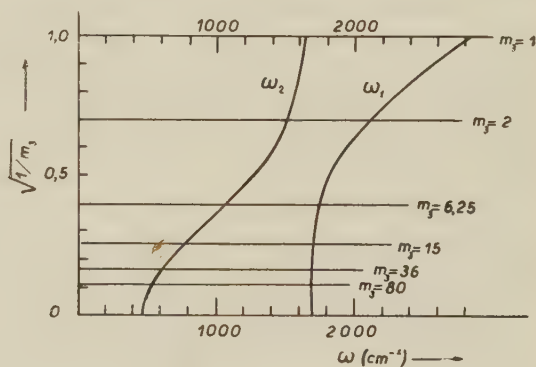


Fig. 3.

viene col calcolo di Burkard è molto interessante. Nella figura 3 è riportato l'andamento delle frequenze ω_1 e ω_2 in funzione di m_3 per molecole $\left. \begin{matrix} m_3 \\ m_3 \end{matrix} \right\} \text{C}=\text{O}$ quale si deduce dalle (1).

Si osserva, per valori di m_3 compresi tra 1 e 2, una debole dipendenza tra la massa m_3 e la frequenza ω_2 ($\text{C} \longleftrightarrow \text{O}$); tale dipendenza si accentuerebbe per valori crescenti di m_3 per attenuarsi poi rapidamente quando il valore di m_3 supera le 35-36 unità.

Viceversa ω_1 varierebbe fortemente con m_3 , fino a che m_3 raggiunge valori di circa 6. Da $m_3 \cong 6$ a $m_3 = \infty$, campo che corrisponde ai casi da noi trattati,

(7) BJERRUM, « Vorh. d. d. phys. Ges. », 16, 737 (1914).

la frequenza ω_1 , che ora diventa senz'altro una « frequenza C=O »⁽⁸⁾, resta invece praticamente costante.

Ad un esame degli spettri Raman di aldeidi e chetoni, anche in relazione alle loro caratteristiche chimiche e chimico-fisiche si deve concludere che la frequenza a $1650-1800\text{ cm}^{-1}$ è da attribuire al gruppo C=O. Questa spiegazione assume una netta evidenza studiando aldeidi e chetoni col C=O particolarmente perturbato.

A questo riguardo può essere interessante ricordare che recenti esperienze di H. Seewann-Albert⁽⁹⁾ mettono in evidenza che la riga Raman C=O che compare nettissima ed intensa a $1740-1760\text{ cm}^{-1}$ nel bromalio e nel cloralio anidri, scompare nel bromalio e nel cloralio idrati nelle cui molecole appunto più non sussiste il gruppo tipico C=O.

Ad ogni modo si dovrà ancora indagare su questo punto.

Una larga esperienza tratta da una numerosissima serie di spettri Raman porta, come si è visto, Kohlrausch⁽¹⁰⁾⁽³⁾ a concludere sull'« insensibilità » della frequenza del C=O rispetto alle masse dei sostituenti. Questo Autore ed i suoi collaboratori sono d'avviso di ricercare dunque le ragioni delle variazioni di tale frequenza in fattori costitutivi che si riferiscano invece esclusivamente alle forze di richiamo.

Il caso si proietta perciò nel più vasto problema delle cosiddette « frequenze caratteristiche » di certi gruppi o legami chimici. Su questo problema fino dal 1930-31 aveva attirato l'attenzione un chiaro spettroscopista, cioè il prof. Mecke⁽¹¹⁾.

Questo Autore in un successivo lavoro del 1936⁽¹²⁾ rende ragione della indipendenza della frequenza di oscillazione così detta del C=O al variare della lunghezza delle catene legate all'atomo di carbonio carbonilico.

Mecke, nello sviluppo della sua teoria, mette in evidenza che la massima importanza si deve attribuire agli atomi direttamente legati al carbonio carbonilico mentre gli altri atomi della catena non intervengono in prima approssimazione.

Una tale indipendenza della « frequenza del C=O » dalla massa del sostituyente X e dalla lunghezza delle catene può anche essere interpretata, per il nostro caso, applicando le note formule di Sutherland e Dennison⁽⁴⁾ sotto speciali condizioni semplificatrici.

È forse più immediata qui l'applicazione elementare delle formule semplificate pubblicate da Matossi e Aderhold⁽¹³⁾ per interpretare il caso analogo dello

spettro molecolare delle strutture $\begin{array}{c} \text{Cl} \\ \diagup \\ \text{S}=\text{O} \\ \diagdown \\ \text{Cl} \end{array}$ e $\begin{array}{c} \text{Cl} \\ \diagup \\ \text{S}=\text{S} \\ \diagdown \\ \text{Cl} \end{array}$.

(8) Ved. per esempio HERZBERG, *Infrared and Raman spectra of polyatomic Molecules*, Van Nostrand, New York 1946, p. 200.

(9) SEEWANN e ALBERT, « Acta Phys. Austriaca », 1, 346 (1948).

(10) KOHLRAUSCH e PONGRATZ, « Z. phys. Chem. » [B], 27, 176 (1934). Ved. pure SEEWANN, ALBERT e KAHOVEC, « Acta Phys. Austriaca », 1, 352 (1948).

(11) MECKE, « Z. Electrochem. », 36, 589 (1930). Ved. pure *Molekülstruktur* in « Leipziger Vorträge », p. 50 (Hirzel, Leipzig 1931).

(12) MECKE, « Z. f. Phys. », 104, 291 (1936).

(13) MATOSSÌ e ADERHOLD, « Z. f. Phys. », 68, 692 (1931).

L'insensibilità della frequenza del $C=O$ rispetto alle masse dei sostituenti al carbonio carbonilico è anche appoggiata dalle eleganti esperienze di Trenkler⁽¹⁴⁾ sulle oscillazioni di macromodelli molecolari. Questo autore conclude le sue esperienze perfettamente d'accordo con tutti gli spettroscopisti Raman: «...für eine Änderung in der Höhe der $C=O$ —Frequenz nicht die Massen der Substituenten X und Y in Molekül $X-CO-Y$ massgebend sind, sondern in wesentlichen deren konstitutiver Einfluss auf die Festigkeit der $C=O$ —Bindung durch den Wert von f_1 ...».

La teoria di Mecke sovra ricordata è ripresa ed applicata ai composti di tipo $\begin{smallmatrix} X \\ \diagdown \\ X \end{smallmatrix} > C=O$ in una recente opera di J. P. Mathieu⁽¹⁵⁾. Questo Autore conclude la sua trattazione nel senso di attribuire le variazioni della frequenza $C=O$ negli ordinari composti aldeidici e chetonici ad un effetto dovuto soltanto a variazioni della forza di richiamo del $C=O$ (vedi loc. cit. p. 436).

Nella presente serie di Note noi abbiamo seguito questa ipotesi di lavoro e, in via di prima approssimazione, ci siamo chiesti se le variazioni di $f_{1,2}$, quali si possono dedurre dalle variazioni degli indici di legame π nei casi di coniugazione e di iperconiugazione al $C=O$, siano sufficienti a renderci conto delle influenze costitutive dei vari sostituenti sulla frequenza «carbonilica» del gruppo $C=O$.

Abbiamo visto che i risultati sono formalmente soddisfacenti e ci incoraggiano ad approfondire questa ricerca sul piano di una interpretazione più quantitativa e razionale del fenomeno studiato.

Endocrinologia. — *Sull'assorbimento per via peritoneale di emulsioni di grasso in cavie spāncreate e florizinate* (*). Nota^(**) di UGO LOMBROSO e SANDRO PONTREMOLI, presentata dal Socio U. LOMBROSO.

L'assorbimento peritoneale è stato oggetto di ricerche da parte di numerosi Autori e ciò si comprende facilmente perchè come vedremo l'assorbimento per questa via è molto rapido e si ottiene non soltanto per sostanze solubili in acqua ma anche per quelle insolubili o per materiale corpuscolare.

Dallo spoglio della letteratura relativa all'argomento si rileva qualche discrepanza fra gli Autori non per il fenomeno di assorbimento in sè sul quale sono tutti perfettamente d'accordo, ma per quelle che sono le vie seguite dalle sostanze assorbite, se cioè prevalga la via linfatica o piuttosto quella sanguigna.

In genere la maggior parte degli Autori propende per la via linfatica ed ancora alcuni di essi sostengono che nel fenomeno dell'assorbimento peritoneale sono in

(14) TRENKLER, «Phys. Zeit.», 36, 424 (1931).

(15) J. P. MATHIEU, *Spectres de vibration et symetrie*, Hermann, Parigi 1945.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1950.

particolare modo impegnati a linfatici della superficie diaframmatica (Reklinghausen⁽¹⁾, Roakensky⁽²⁾, Wegner⁽³⁾, Bizzozero e Salvioli⁽⁴⁾, Pawlowsky⁽⁵⁾, Beck⁽⁶⁾, Muscatello⁽⁷⁾, Cohseim⁽⁸⁾, Sulzer⁽⁹⁾, Schülze⁽¹⁰⁾, Arbeiter⁽¹¹⁾, Magnus⁽¹²⁾, Oselladore⁽¹³⁾, Yoshifusa Sato⁽¹⁴⁾).

L'assorbimento poi da parte dei linfatici sarebbe in modo speciale influenzato dalla espansione e retrazione dei tessuti nei quali i linfatici stessi sono situati e la corrente linfatica sarebbe il risultato di tale compressione. Questo meccanismo d'assorbimento sarebbe secondo gli stessi Autori (L. Allen, E. Vogt⁽¹⁵⁾) identico per le altre cavità sierose.

A conferma di ciò starebbe l'osservazione di H. A. Menghe⁽¹⁶⁾ secondo cui l'anestesia che stimolerebbe l'attività diaframmatica determinerebbe anche una maggiore velocità nell'assorbimento linfatico degli animali.

Altri Autori considerano invece che l'assorbimento avvenga esclusivamente per via sanguigna.

Così Laird⁽¹⁷⁾ iniettando nel peritoneo sostanze tossiche osservò una rapidissima comparsa di lesioni epatiche proprie di tali sostanze; mentre la legatura della vena porta determinava un notevole ritardo nella comparsa di tali lesioni, riproducibili nella stessa entità e con la stessa velocità solo iniettando le sostanze tossiche direttamente nella vena porta. Altri Autori come Starling e Tubby⁽¹⁸⁾, Hamburger⁽¹⁹⁾, Klapp⁽²⁰⁾ traggono le loro conclusioni dall'osservazione che a dotti linfatici legati l'assorbimento avviene con la medesima rapidità e la comparsa nelle urine delle sostanze iniettate non subisce ritardo alcuno.

Altri Autori ancora prospettano che la via sanguigna sia la più importante e la più rapida rispetto a quella linfatica che d'altra parte non negano (Dubar e Remy⁽²¹⁾, Donati⁽²²⁾, Fumagalli⁽²³⁾).

(1) REKLINGHAUSEN, « Virchow's Arch. », 26, 162 (1863).

(2) ROAKENSKY, « Virchow's Arch. », 64, 186 (1875).

(3) WEGNER, « Langenbeck Arch. », 20, 51 (1875).

(4) BIZZOZERO e SALVIOLI, « Arch. per le Sc. Med. », 1 (1876-77).

(5) PAWLOWSKY, « Virchow's Arch. », 117, 469 (1889).

(6) BECK, « Wiener Klin. Wochens. », 46, 823 (1893).

(7) MUSCATELLO, « Arch. per le Sc. Med. », 19 (1895).

(8) COHSEIM, « Centralblatt für Physiol. », 12, 401 (1895).

(9) SULZER, « Virchow's Arch. », 143, 99 (1896).

(10) SCHÜLZE, « Z. für Tuberk. », 1, fasc. 5 (1906).

(11) ARBEITER, « Virchow's Arch. », vol. 200 (1906).

(12) MAGNUS, « Deutsche Z. für Chir. », 175, 145 (1922).

(13) OSELLADORE, « Arch. per le Sc. Med. », 47 (1925).

(14) YOSHIFUSA SATO, *Mitteilung über Allgemeine Pathologie und Pathologische Anatomie*, 1934.

(15) L. ALLEN and E. VOGT, « Am. J. of Physiol. », 119, 776 (1937).

(16) H. A. MENGHE, « Arch. of Surgery », 34, 839 (1937).

(17) LAIRD, « Virchow's Arch. », 291, fasc. 1-2 (1933).

(18) STARLING e TUBBY, « J. of Physiol. », 16, 140 (1894).

(19) HAMBURGER, « Arch. f. Anat. u. Physiol. », 281, 1895 e 302 (1896).

(20) KLAPP, « Mitteil. a. d. Grenzgeb. u. d. Med. u. Chir. », 10, 254 (1902).

(21) DUBAR e REMY, « J. Anat. et Physiol. », 18 (1882).

(22) M. DONATI, *Chirurgia dell'Addome*, U. T. E. T. 1914.

(23) FUMAGALLI, *Relazione al XXXIX Congr. Soc. It. Chirurgia Romana*, 1932.

Ricerche sistematiche sull'assorbimento del grasso introdotto in finissime emulsioni non ci risultano; solo sporadicamente tale fenomeno è stato osservato già nelle antiche ricerche di Recklinghausen⁽¹⁾, Wegner⁽²⁾ con emulsioni evidentemente grossolane data l'epoca e con esito positivo e rapido. Circa il meccanismo col quale avviene l'assorbimento ricorderemo che di fronte alla tendenza della maggior parte degli Autori di considerarlo come un fenomeno determinato da fattori fisici o meccanici il Donati⁽²⁴⁾ ed il Kaplan⁽²⁴⁾ accennano l'ipotesi che il peritoneo intervenga direttamente con « una attività vitale propria dell'endotelio che lo riveste in armonia con una sua funzione fisiologica ».

Uno di noi in una precedente Nota ha studiato il comportamento di fini emulsioni di olio di cocco introdotte nel peritoneo⁽²⁵⁾.

Da queste ricerche emerse che la velocità di assorbimento era veramente eccezionale; infatti 50-60 cc di un'emulsione di olio di cocco al 30 % introdotti nel peritoneo di cavia del peso medio di 500 gr. scomparivano nella misura del 90 % circa. Dopo 7 ore dall'iniezione endoperitoneale si potevano recuperare gr. 0,7-1,3 di grasso (8 esperienze).

Meno assorbite apparvero emulsioni di olio di oliva, infatti sperimentando con la stessa quantità e per lo stesso periodo di tempo fu possibile recuperare oltre il 20 % del grasso introdotto (2 esperienze).

Questo assorbimento è veramente impressionante perchè se noi somministriamo una eguale quantità di grasso ad una cavia per sonda gastrica è molto facile provocare una diarrea ed una espulsione di grasso per via intestinale molto ma molto superiore.

Abbiamo creduto interessante di riprendere queste stesse indagini sperimentando invece che con cavie normali con cavie spancreate e cavie florizinate.

Questa impostazione sperimentale poteva presentare un certo interesse paragonandola con ricerche eseguite precedentemente⁽²⁶⁾ dal Lombroso e collaboratori con emulsioni di grasso introdotte in ansa alla Vella. Da queste ricerche si dimostrò che se si sperimenta in un cane normale si ottiene un notevole assorbimento, se il cane è spancreato tale assorbimento viene a mancare.

Questo risultato concludeva una antica concezione del Lombroso secondo la quale il pancreas esplica per via endocrina una importante funzione nel metabolismo dei lipidi che si manifesta oltre che nel metabolismo intermedio anche modificando la capacità della mucosa intestinale ad assorbire il grasso. Per molti decenni questa concezione era stata contrastata perchè la maggioranza degli studiosi riteneva la presenza del secreto pancreatico esterno nel lume intestinale condizione necessaria e sufficiente per l'assorbimento dei grassi, e che se l'assorbimento del grasso avveniva anche dopo legatura dei dotti pancreatici questo doveva pur sempre pervenire nel lume intestinale dopo il suo riassorbimento per via sanguigna.

(24) KAPLAN, « J. Med. de l'Acc. des Sciences de l'Ukraine », 6, 423 (1936).

(25) S. PONTREMOLI e L. ARRIGO, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. » in corso di stampa.

(26) U. LOMBROSO, L. BELLINI, S. FILLIPON, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 12, 579 (1937), e *ibid.*, 12, 580 (1937).

In seguito l'assorbimento di emulsioni di grasso da parte di un segmento di intestino anche senza presenza di secreto pancreatico o di bile è stata ampiamente confermata da ricerche eseguite da Frazer⁽²⁷⁾.

Anche con la somministrazione di florizina si ottennero risultati simili a quelli ottenuti con la spancreatizzazione⁽²⁸⁾. Lo studio delle eventuali modificazioni della velocità di assorbimento dei grassi introdotti nel peritoneo dopo estirpazione subtotale del pancreas o avvelenamento con florizina ci parve quindi meritasse il prezzo dell'opera.

Infatti interessava controllare se un assorbimento che si svolge sicuramente al di fuori di ogni partecipazione del secreto pancreatico esterno risentisse o no gli effetti della deficienza della funzione endocrina del pancreas come d'altra parte avveniva per le sostanze grasse introdotte in un'ansa alla Vella.

CONDIZIONI SPERIMENTALI. - Cavie maschi del peso medio di 500 gr. circa alimentate con dieta prevalentemente glucidica (crusca e verdura) vennero divise in due gruppi.

Gli animali del primo gruppo vennero operati di pancreatectomia (spancreatizzazione subtotale dato che i rapporti anatomici di questo animale non permettono una estirpazione totale).

Nei giorni successivi all'intervento, mantenendo costante la dieta abbiamo controllato l'eliminazione totale urinaria del glucosio e solo in alcuni animali abbiamo riscontrato una modestissima glicosuria.

Dopo quattro giorni dall'operazione si praticò una iniezione endoperitoneale del grasso emulsionato.

Gli animali del secondo gruppo vennero iniettati il primo giorno con una dose di florizina in sospensione oleosa corrispondente a 500 mg pro-kg e ripartita in due iniezioni. La mattina successiva veniva ripetuta una iniezione corrispondente a metà dose. Si dosava la quantità di glucosio eliminata nelle urine ottenendo valori oscillanti tra il 25-30 ‰ con una eliminazione media di gr. 2-2,5 di glucosio nelle 24 h.

Quindi due ore dopo l'iniezione di florizina si introduceva il grasso emulsionato nel peritoneo.

In ogni animale dei due gruppi vennero iniettati 50 cc di emulsione al 30 % di olio di cocco. La quantità di olio introdotto (15 cc) corrispondeva ad un peso di gr. 13,5. Tale emulsione veniva preparata con l'aggiunta dell'1 % dell'emulsionante neutro Esperis in omogeneizzatore Heros fino a raggiungimento di una emulsione stabile.

Dopo 7 ore dall'iniezione gli animali venivano uccisi per dissanguamento, si prelevava il grasso rimasto nel peritoneo sul quale si procedeva dopo estrazione alcolica al dosaggio quantitativo.

I risultati ottenuti sono riportati nella tabella nella quale figurano anche i valori dell'assorbimento nelle cavie normali che nella Nota precedente⁽²¹⁾ non erano stati riportati.

(27) A. C. FRAZER, « Arch. Sc. Physiol. Paris », vol. 2, 15 (1948).

(28) S. FILIPPON L. BELLINI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », 13, 178 (1938)

TABELLA I.

| CAVIE NORMALI | | | | CAVIE SPANCREATE | | | | CAVIE FLORIZINATE | | | |
|---------------|------|--|---------------------|------------------|------|--|---------------------|-------------------|------|--|---------------------|
| N° | Peso | cc emulsione iniettati | grasso ritrovato gr | N° | Peso | cc emulsione iniettati | grasso ritrovato gr | N° | Peso | cc emulsione iniettati | grasso ritrovato gr |
| 1 | 520 | 50 cc emulsione al 30 % pari a 13,500 gr olio cocco | 1,12 | 1 | 506 | 50 cc emulsione al 30 % pari a 13 500 gr olio cocco | 10,2 | 1 | 478 | 50 cc emulsione al 30 % pari a 13,500 gr olio cocco | 12,0 |
| 2 | 480 | | 0,70 | 2 | 495 | | 9,5 | 2 | 510 | | 12,2 |
| 3 | 510 | | 0,90 | 3 | 510 | | 8,7 | 3 | 500 | | 11,8 |
| 4 | 470 | | 0,76 | 4 | 480 | | 10,0 | 4 | 480 | | 11,4 |
| 5 | 500 | | 0,96 | 5 | 490 | | 8,6 | 5 | 520 | | 12,7 |
| 6 | 477 | | 1,00 | | | | | | | | |
| 7 | 500 | | 0,75 | | | | | | | | |
| 8 | 515 | | 0,87 | | | | | | | | |
| media | 478 | | 0,882 | | 496 | | 9,4 | | 497 | | 12,02 |

Le cifre riportate nella tabella possono avere un fattore di correzione di qualche decigrammo in quanto la raccolta del grasso sparso nel peritoneo non è sempre perfetta e qualche traccia di grasso può sfuggire.

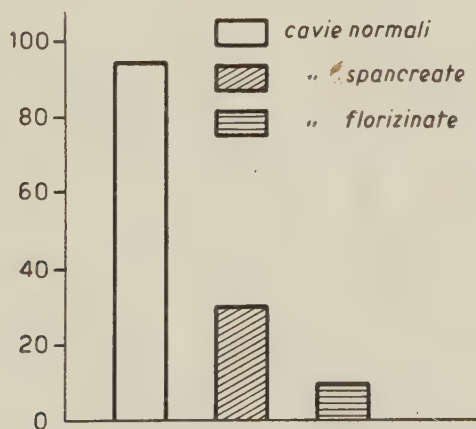


Fig. 1. - % assorbimento peritoneale di emulsione di grasso dopo 7 ore dell'iniezione.

Concludendo: Il risultato più interessante delle ricerche che abbiamo esposte è che l'estirpazione del pancreas, ed in questo caso l'esclusione della sua funzione endocrina e di questa soltanto, provoca un profondo abbassamento della capacità del peritoneo di cavia ad assorbire il grasso emulsionato. Qualche differenza in più o in meno di assorbimento che abbiamo osservato si deve al fatto che l'estir-

pazione totale del pancreas nelle cavie non è possibile e ne rimangono quindi frazioni che possono variare da caso a caso; vale a dire rimanere in misura differente ancora una frazione di funzione endocrina dell'organo.

In tutte queste cavie non abbiamo mai osservato un vero diabete ma tuttalpiù una lieve transitoria glicosuria il che ci fa sospettare che sia rimasta ancora una certa attività, endocrina del pancreas. La mancanza di una vera glicosuria rende tanto più interessante questo risultato in quanto ci dimostra che non è un fenomeno secondario al disturbo del metabolismo dei glucidi (come era stato prospettato da qualche Autore per spiegare il disturbo dell'assorbimento dei grassi negli animali spancreati). Il fenomeno del mancato assorbimento da parte del peritoneo si è dimostrato ancor più elevato negli animali florizinati nei quali si può quasi affermare che l'assorbimento per questo periodo di tempo è stato pressochè nullo.

In ulteriori ricerche di prossima pubblicazione daremo notizie sulle variazioni chimiche del grasso ritrovato (punto di Jodio ed indice di saponificazione) che a nostro avviso potranno forse darci una qualche spiegazione del fenomeno qui descritto.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Equazioni differenziali. — *Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee.* Nota II di EUGENIO LEVI, presentata (*) dal Corrisp. G. ASCOLI.

5. LEMMA II. — *Dato il sistema:*

$$(D') \quad v_i' = \rho_i v_i + \sum \psi_{ij}(x) v_j$$

se esistono n costanti reali k_1, k_2, \dots, k_n tali che le funzioni $\psi_{ij} x^{k_i - k_j}$ sono assolutamente integrabili tra x_0 e $+\infty$, il sistema ammette n soluzioni ${}_h v_i$ linearmente indipendenti tali che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} {}_h v_i e^{-\rho_i x} x^{k_i - k_h} = \delta_{ih}.$$

Le equazioni (D'), moltiplicate per $e^{-\rho_i x}$ e integrate, danno luogo alle equazioni integrali:

$$(8) \quad v_i(x) = \gamma_i e^{\rho_i x} + \sum_{j=1}^n \int_{c_j}^x e^{\rho_i(x-\xi)} \psi_{ij}(\xi) v_j(\xi) d\xi,$$

dove le γ_i e le c_i sono costanti, per il momento indeterminate.

Mostreremo ora che, fissato un indice h tra 1 e n , si può ricavare una soluzione di questo sistema corrispondente alle posizioni:

$$\gamma_i = \delta_{ih}, c_i = \infty \quad \text{se} \quad R\rho_i > R\rho_h \quad \text{oppure} \quad R\rho_i = R\rho_h \quad \text{e} \quad k_i \geq k_h$$

$$\gamma_i = 0, c_i = x_1 \geq x_0 \quad \text{e} \quad > 0 \quad (\text{da precisare}) \quad \text{in ogni altro caso.}$$

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950. — La Nota I è pubblicata in questi « Rendiconti », vol. VIII, fasc. 5, pp. 465-470 (1950).

Poniamo per questo:

$${}_h v_i = e^{Q_h x} x^{k_h - k_i} {}_h u_i;$$

il sistema si trasforma allora nell'altro:

$$(9) \quad {}_h u_i(x) = \delta_{ih} + \sum_j \int_{c_i}^x e^{(Q_i - Q_h)(x - \xi)} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{k_i - k_h} \psi_{ij}(\xi) \xi^{k_i - k_j} {}_h u_j(\xi) d\xi,$$

che ha la forma considerata nel n. 1 e a cui, come ora vedremo, è applicabile il lemma I, almeno per una scelta conveniente di x_1 . Si ha infatti qui

$$K_{ij}(x, \xi) = e^{(Q_i - Q_h)(x - \xi)} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{k_i - k_h} [\psi_{ij}(\xi) \xi^{k_i - k_j}]$$

che è prodotto di due fattori, il primo dei quali vale 1 per $\xi = x$ e, come si può facilmente verificare, pur di prendere x_1 abbastanza grande, ha modulo non crescente nell'intervallo di integrazione nei casi in cui è $c_i = \infty$, non decrescente nei casi in cui è invece $c_i = x_1^{(5)}$; sicchè tale modulo è sempre ≤ 1 . Quanto al secondo fattore, esso è, per ipotesi, assolutamente integrabile tra x_0 e $+\infty$, onde, aumentando ancora eventualmente x_1 , si potrà soddisfare alla condizione

$$\sum_j \int_{(c_i, x)} |\psi_{ij}(\xi)| \xi^{k_i - k_j} d\xi < \lambda < 1.$$

Rimarrà così soddisfatta per il nostro caso la condizione (A) del lemma I; la verifica delle altre è immediata.

Il sistema (9) ammette dunque una soluzione limitata (e una sola). Si ha poi, sostituendo nelle equazioni stesse e supponendo $|{}_h u_i| < C$:
per quelle in cui è $c_i = \infty$:

$$|{}_h u_i - \delta_{ih}| \leq C \sum_j \int_x^\infty |\psi_{ij}(\xi)| \xi^{k_i - k_j} d\xi$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} {}_h u_i(x) = \delta_{ih};$$

per quelle in cui è $c_i = x_1$

$$|{}_h u_i| < C \sum_j \int_{x_1}^x e^{(R_{Q_i} - R_{Q_h})(x - \xi)} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{k_i - k_h} |\psi_{ij}(\xi)| \xi^{k_i - k_j} d\xi.$$

(5) Occorre precisamente che x_1 non sia inferiore al massimo dei rapporti $(k_j - k_h)/(R_{Q_h} - R_{Q_j})$ a divisore non nullo.

Scomponendo l'intervallo d'integrazione nei due x_1 $|\sqrt{x_1 x}$ e $|\sqrt{x_1 x}| x$, e tenendo conto della proprietà di monotonia accennata più sopra, si vede che le due parti dell'integrale sono rispettivamente maggiorate da

$$C \sum_i e^{(R_{Q_i} - R_{Q_h})(x - \sqrt{x_1 x})} \left(\sqrt{\frac{x}{x_1}} \right)^{k_i - k_h} \int_{x_1}^{\infty} |\psi_{ij}(\xi)| \xi^{k_i - k_j} d\xi \quad \text{e} \quad C \sum_i \int_{\sqrt{x_1 x}}^{\infty} |\psi_{ij}(\xi)| \xi^{k_i - k_j} d\xi$$

e tendono ambedue a zero per $x \rightarrow \infty$. Poichè questo secondo caso può avvenire solo se $i \neq h$, si ha dunque in ogni caso:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} {}_h u_i(x) = \delta_{ih} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} {}_h v_i(x) e^{-Q_h x} x^{k_i - k_h} = \delta_{ih}.$$

Bisogna ancora dimostrare che le soluzioni così definite sono linearmente indipendenti. Indicando, in generale, con $W(hy_i)$ il determinante delle n^2 funzioni indicate in parentesi, si ha:

$$W[{}_h v_i(x)] = e^{(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)x} W[{}_h v_i(x) e^{-Q_h x}] = e^{(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)x} W[{}_h u_i(x)],$$

perchè si passa dal secondo al terzo determinante moltiplicando le righe ordinatamente per $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_n}$, e le colonne ordinatamente per $x^{-k_1}, x^{-k_2}, \dots, x^{-k_n}$.

Ora $\lim W[{}_h u_i(x)] = 1$, quindi $W[{}_h u_i(x)] \neq 0$ e così $W[{}_h v_i(x)]$.

6. Nel sistema (C') siano ora assolutamente integrabili tra x_0 e $+\infty$ le quantità $\varphi_{ij} x^{\mu-1}$, dove μ è il massimo tra gli esponenti dei divisori elementari della matrice $A = \|a_{ij} - \delta_{ij} \rho\|$. Nel sistema (J') da esso dedotto mediante la trasformazione (2) saranno ancora assolutamente integrabili le quantità $\bar{\varphi}_{ij} x^{\mu-1}$. Con la sostituzione (5) si passa di qui al sistema (D'), ove le ψ_{ij} sono date dalle (7); e da queste, quando si ponga

$$k_i = \lambda_i - \alpha_i$$

si ha:

$$\psi_{ij} x^{k_i - k_j} = \sum_{l,s} \varepsilon_{il} \varepsilon_{sj} x^{\lambda_i - \alpha_l + \alpha_s - \lambda_j} (-1)^{i-l} \bar{\varphi}_{ls}$$

Osservando ora che i soli termini significativi del sommatorio sono quelli in cui l appartiene al gruppo di i , s a quello di j , ed è $l \geq i, s \geq j$, si riconosce subito che l'esponente di x nel secondo membro è maggiorato da $\lambda_i - 1$ e quindi da $\mu - 1$; perciò le $\psi_{ij} x^{k_i - k_j}$ sono assolutamente integrabili tra x_0 e $+\infty$. Si può allora applicare il lemma II. Il sistema (D') ha dunque n soluzioni linearmente indipendenti tali che per la h -ma di esse

$$\lim_{x \rightarrow \infty} {}_h v_i e^{-Q_h x} x^{(\lambda_i - \alpha_i) - (\lambda_h - \alpha_h)} = \delta_{ih}$$

ossia

$${}_h v_i = e^{Q_h x} x^{(\lambda_h - \alpha_h) - (\lambda_i - \alpha_i)} (\delta_{ih} + o(1)).$$

Essendo poi

$${}_h y_i = \sum_s b_{is} {}_h Y_s = \sum_s b_{is} \sum_l \varepsilon_{sl} x^{s-l} {}_h v_l = \sum_l {}_h v_l \sum_s b_{is} \varepsilon_{sl} x^{s-\alpha_l}$$

risulta:

$$(9) \quad \begin{aligned} {}_h y_i &= \sum_l e^{\alpha_h x} x^{(\lambda_h - \alpha_h) - (\lambda_l - \alpha_l)} (\delta_{lh} + o(1)) \sum_s b_{is} \varepsilon_{sl} x^{\alpha_s - \alpha_l} = \\ &= e^{\alpha_h x} x^{\lambda_h - \alpha_h} \sum_{s, l} (\delta_{lh} + o(1)) b_{is} \varepsilon_{sl} x^{\alpha_s - \lambda_l}. \end{aligned}$$

Ora il primo termine della (9)

$$e^{\alpha_h x} x^{\lambda_h - \alpha_h} \sum_{s, l} \delta_{lh} b_{is} \varepsilon_{sl} x^{\alpha_s - \lambda_l} = e^{\alpha_h x} \sum_s b_{is} \varepsilon_{sh} x^{\alpha_s - h}$$

dà la h -ma soluzione ${}_h y_i^*$ del sistema (C), corrispondente alla soluzione (3) del sistema (J), la quale, tenendo conto del significato di ε_{sh} si può scrivere:

$$(10) \quad {}_h y_i^* = e^{\alpha_h x} \sum_0^{\lambda_h - \alpha_h} b_{i, h+v} \frac{x^v}{v!}$$

dove i termini di ordine massimo hanno i coefficienti $b_{i, h - \alpha_h + \lambda_h}$ che, per un dato h , per l'invertibilità della (2), non sono tutti nulli. Si può dunque dire che il vettore

$${}_h y^* = \{ {}_h y_i^* \}$$

è dell'ordine di $e^{\alpha_h x} x^{\lambda_h - \alpha_h}$.

Il secondo termine della (9) è invece $o(e^{\alpha_h x} x^{\lambda_h - \alpha_h})$, perchè se $\varepsilon_{lh} \neq 0$ è $\alpha_s - \lambda_l = \alpha_s - \lambda_s \leq 0$; si può dunque dare alla (9) la forma vettoriale:

$$(11) \quad {}_h y = {}_h y^* + o(|{}_h y^*|)^{(6)}$$

e si manifesta così la perfetta corrispondenza asintotica tra gli integrali dei sistemi (C) e (C'). Si ha dunque:

Se nel sistema (C') sono assolutamente integrabili tra x_0 e $+\infty$ le quantità $\varphi_{ij} x^{\mu-1}$, dove μ è il massimo tra gli esponenti dei divisori elementari della matrice $\|a_{ij} - \delta_{ij}\rho\|$, il sistema possiede n soluzioni linearmente indipendenti per le quali vale la formula asintotica (11) (le componenti di ${}_h y^*$ essendo date dalle (10)) e quindi l'altra

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{{}_h y_i}{e^{\alpha_h x} x^{\lambda_h - \alpha_h}} = b_{i, h - \alpha_h + \lambda_h} \quad (7).$$

7. Il risultato ottenuto è applicabile alle equazioni di ordine n . L'equazione:

$$(E) \quad y^{(n)} = \sum_{r=1}^n p_r y^{(n-r)}$$

(6) Una forma equivalente è:

$$\sum_i |{}_h y_i - {}_h y_i^*| = o\left(\sum_i |{}_h y_i^*|\right).$$

(7) Si noti che $h - \alpha_h + \lambda_h$ è il massimo tra gli indici del gruppo a cui appartiene h ; esso non varia al variare di h nel gruppo.

posto: $y_r = y^{(n-r)}$ ($r = 1, 2, \dots, n-1$), $y_n = y$ dà luogo al sistema:

$$(C) \quad \begin{cases} y'_i = \sum_r p_r y_r \\ y'_i = y_{i-1} \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

e analogamente per l'equazione variata:

$$(E') \quad y^{(n)} = \sum_r [p_r + \varphi_r(x)] y^{(n-r)}.$$

Si può agevolmente verificare che, nella sostituzione: $y_i = \sum b_{is} Y_s$ (12) che riduce il sistema (C) alla forma canonica (J), i coefficienti b_{is} sono definiti dalle:

$$(13) \quad b_{is} = \sum_{l=0}^{\lambda_s - \alpha_s} \binom{n-i}{l} \rho_s^{n-i-l} c_{s+l}$$

con c_s arbitrarie, purchè non siano nulle quelle corrispondenti alle equazioni finali di ciascun gruppo, cioè per le quali è $\alpha_s = \lambda_s$ (8). Si possono in particolare prendere queste c_s finali uguali a 1, e le altre nulle.

Allora, considerando l'equazione variata (E') si ha che: *se sono assolutamente integrabili da x_0 a $+\infty$ le quantità $\varphi_r(x) \cdot x^{\lambda-r}$ dove λ è la massima molteplicità delle radici, l'equazione (E') ammette n soluzioni linearmente indipendenti $y, {}_1y, {}_2y, \dots, {}_ny$ per le quali risulta:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h^y}{e^{\rho_h x} \cdot x^{\lambda_h - \alpha_h}} = b_{n, h - \alpha_h + \lambda_h} = c_h - \alpha_h + \lambda_h$$

e inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h^{y(r)}}{e^{\rho_h x} \cdot x^{\lambda_h - \alpha_h}} = b_{n-r, h - \alpha_h + \lambda_h} = \rho_h^r \cdot c_h - \alpha_h + \lambda_h.$$

Come ben s'intende, il risultato è compreso in quelli ottenuti da Faedo (9).

(8) L'espressione (13) delle b_{is} si ottiene imponendo che risultino verificate le equazioni del sistema (C), esclusa per ora la prima, quando si pongono le (12) e, secondo le (J): $Y'_s = \rho_s Y_s + \varepsilon_s Y_{s-1}$. Ne deriva la formula di ricorrenza: $b_{i-1, s} = \rho_s b_{is} + \varepsilon_{s+1} b_{i, s+1}$ e di qui le (13). Si accerta poi agevolmente che anche la prima delle equazioni (C) è soddisfatta, in quanto, eseguendo la sostituzione (12), i coefficienti delle Y_s nei due membri risultano uguali, se si tiene conto che ρ_s è radice di molteplicità λ_s dell'equazione caratteristica $y^n = \sum \rho_r y^{n-r}$ e quindi è radice anche delle equazioni che si ottengono derivandola a membro a membro $\lambda_s - 1$ volte. La condizione che le c_s finali di ogni gruppo, siano $\neq 0$, è necessaria per la invertibilità della sostituzione (12), altrimenti la matrice $\|b_{is}\|$ avrebbe una colonna di zeri. Si vede poi che è anche sufficiente, osservando che, se una combinazione lineare $\sum_{i=1}^n q_i b_{is}$ ($s = 1, \dots, n$) è nulla, risulta, dopo facili passaggi, che tutte le radici dell'equazione caratteristica sono pure radici, e con la stessa molteplicità, dell'equazione: $\sum_{i=1}^n q_i y^{n-i} = 0$, che è di grado $n-1$; ne consegue che le q_i sono tutte nulle.

(9) Precisamente esso si trova in S. FAEDO, *Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari*. «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», ser. VIII, vol. II, fasc. 6, p. 762 (1947).

8. Si può inoltre ritrovare un altro risultato ottenuto da Ghizzetti ⁽¹⁰⁾ per l'equazione variata di un'equazione di ordine n con radice ennupla nulla.

Nell'equazione:

$$y^{(n)} = \sum_r \varphi_r(x) y^{(n-r)}$$

siano assolutamente integrabili sino all'infinito le quantità $\varphi_r(x) x^{r-1}$. L'equazione dà luogo al sistema:

$$y'_1 = \sum_r \varphi_r(x) y_r \quad y'_i = y_{i-1} \quad (i = 2, \dots, n)$$

che ha già la forma (J'), con un unico gruppo di equazioni e:

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = 0 \quad \bar{\varphi}_{1j}(x) = \varphi_j(x) \quad \bar{\varphi}_{ij}(x) = 0 \quad \text{per } i > 1.$$

Con la trasformazione (5) si perviene al sistema (D') dove è ora, in base alle (7):

$$\psi_{ij}(x) = \sum_s \varepsilon_{is} \varepsilon_{sj} (-1)^{i-1} x^{i-1+s-i} \varphi_s(x)$$

e quindi:

$$\psi_{ij}(x) \cdot x^{j-i} = \varepsilon_{i1} (-1)^{i-1} \sum_s \varepsilon_{sj} \varphi_s(x) x^{s-1}.$$

L'assoluta integrabilità delle $\varphi_s(x) x^{s-1}$ comporta quindi quella delle $\psi_{ij}(x) \cdot x^{j-i}$, e applicando il lemma II con $k_i = -i$, si ha che il sistema (D') ammette n soluzioni indipendenti ${}_h v_i$ tali che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} {}_h v_i x^{h-i} = \delta_{ih}.$$

Essendo allora

$${}_h y_i = \sum_s \varepsilon_{is} x^{i-s} {}_h v_s$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} {}_h y_i x^{h-i} = \sum_s \varepsilon_{is} \delta_{sh} = \varepsilon_{ih}$$

e quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{{}_h y^{(r)}}{x^{n-r-h}} = \varepsilon_{n-r, h}$$

così come per l'equazione a coefficienti costanti $y^{(n)} = 0$, per la quale si ha:

$${}_h y^* = \frac{x^{n-h}}{(n-h)!}$$

e quindi:

$${}_h y^{*(r)} = x^{n-h-r} \varepsilon_{n-r, h}.$$

La coincidenza nel comportamento asintotico fra le equazioni (E) e (E') si ha in tal caso con una condizione più lata perchè l'equazione (E) corrisponde a un sistema già a forma canonica (J).

(10) A. GHIZZETTI, *Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee*. « Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni », VIII, pp. 28-42 (1949).

Matematica (Geometria). — *Intorno alle involuzioni piane* $I_n^{2(n-1)}$.
Nota di ARNO PREDONZAN, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. In una recente Nota B. Segre⁽¹⁾ ha definito le involuzioni I_n^d , di ∞^d gruppi G_n di n punti di un piano Π , per induzione rispetto a d nel modo seguente:

1° Una I_n^0 non è che un gruppo non ordinato di n punti, distinti o coincidenti arbitrariamente fra loro, di Π .

2° Una I_n^1 è una serie d'equivalenza g_n^1 su di una curva, eventualmente riducibile, di Π .

3° Una I_n^d , per $d \geq 2$, è un sistema algebrico puro ∞^d di G_n di Π , tale che i resti di un generico punto P di Π rispetto ai suoi G_n costituiscano una I_{n-1}^{d-2} .

Sulle involuzioni più volte infinite si conosce sino ad ora, oltre a quello citato in⁽¹⁾, un solo ulteriore lavoro — dovuto pure a B. Segre — nel quale vengono dimostrati alcuni teoremi relativi alla I_9^{16} dei gruppi di punti associati rispetto alle cubiche di un piano ed alla I_8^{21} dei gruppi di punti associati rispetto alle quadriche nello spazio⁽²⁾.

Nella presente Nota considero involuzioni piane $I_n^{2(n-1)}$, relativamente alle quali dimostro la seguente proposizione:

Se la I_2^2 , residua rispetto ad una data $I_n^{2(n-1)}$ ($n \geq 3$) di un gruppo generico G_{n-2} di $n-2$ punti di un piano Π , ammette una curva di punti uniti di cui una componente irriducibile F sia indipendente dalla particolare scelta di G_{n-2} (e cioè non vari su Π con G_{n-2}), la I_2^2 stessa è del tipo di Jonquières⁽³⁾ e la curva F risulta cremonianamente equivalente ad una retta.

Un esempio di $I_n^{2(n-1)}$ godente della proprietà suddetta è dato dalla totalità $\infty^{2(n-1)}$ delle n -uple di punti di un piano euclideo aventi un assegnato baricentro; invero, la I_2^2 residua rispetto a tale $I_n^{2(n-1)}$ di un generico gruppo G_{n-2} di $n-2$ punti del piano è un'omotetia armonica⁽⁴⁾.

(*) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) B. SEGRE, *Osservazioni sulle involuzioni piane più volte infinite*. «Boll. U. M. I.», ser. III, anno III (1948).

(2) B. SEGRE, *Intorno ad un problema di Lebesgue sui gruppi di punti associati*. «Rend. Acc. dei Lincei» (1948).

(3) Ossia ammette un fascio $|C^s|$ di curve razionali unite. Mediante una trasformazione cremoniana T che muti il fascio $|C^s|$ in un fascio di rette per un punto \bar{O} , essa I_2^2 si trasforma in una $I_2^2 = T I_2^2 T^{-1}$ la cui curva di punti uniti risulta di ordine s con \bar{O} di molteplicità $s-2$ o $s-1$. In questo tipo di involuzione si comprende anche l'omologia armonica, per la quale la curva di punti uniti è di ordine $s=1$ (asse di omologia) e il punto \bar{O} (centro di omologia) ha per questa curva molteplicità $s-1=0$, cioè non le appartiene. Ved., ad esempio, F. CONFORTO, *Le superficie razionali*, Bologna, Zanichelli, p. 353 (1939).

La trasformazione cremoniana $\bar{\Omega}$ definita dalla I_2^2 è una trasformazione di Jonquières (o un'omologia armonica se $s=1$) per la quale, ove si indichi con t il suo ordine, \bar{O} risulta punto fondamentale di molteplicità $t-1$. Ved., ad esempio, L. GODEAUX, *Géométrie algébrique*, vol. II, Masson, Paris, pp. 175-176 (1949).

(4) Questo esempio è già stato considerato da B. SEGRE, al n. 5 della nota citata in⁽¹⁾.

Considererò dapprima il caso $n = 3$ — relativo cioè ad una I_3^4 — provando per esso che il genere p di F deve soddisfare alla limitazione $p \leq 1$ (n. 2) e che la I_2^2 generica risulta del tipo di Jonquières (n. 3); dimostrerò poi (n. 5), poggiando su alcuni risultati stabiliti nel n. 4, che è solo possibile l'eventualità $p = 0$ e che la F è cremonianamente trasformabile in una retta. Ne dedurrò infine (n. 6), con procedimento d'induzione rispetto ad n , la proprietà precedentemente enunciata per $n \geq 3$ qualunque.

2. Si consideri una I_3^4 su di un piano Π , ossia una totalità ∞^4 di terne di punti P, P_1, P_2 tali che due qualunque di essi, scelti su Π in posizione generica, determinino univocamente il rimanente. Indicheremo con $I_2^2(P)$ l'involuzione I_2^2 residua rispetto alla I_3^4 di un generico punto P di Π , in guisa che nella $I_2^2(P)$ al punto P_1 verrà a corrispondere involutoriamente il punto P_2 .

Supponiamo che le $I_2^2(P)$ che si ottengono al variare di P in Π , ammettano una medesima curva irriducibile F , di ordine r , di punti uniti, senza però escludere che per la generica $I_2^2(P)$ possa esistere, oltre ad F , un'ulteriore curva di punti uniti (variabile o no con P) irriducibile o riducibile ed eventualmente comprendente anche un numero finito di punti.

Detto p il genere di F , vogliamo provare l'impossibilità della limitazione $p \geq 2$. A tal'uopo, suppostala per assurdo verificata, si indichi con Σ_{p-1} il sistema lineare (di dimensione $p-1 \geq 1$) delle curve di ordine $r-3$ aggiunte pure a F , e sia C la curva generica di detto sistema nel caso che esso risulti irriducibile; mentre nel caso che Σ_{p-1} venga ad essere composto con le curve di un fascio, C starà ad indicare la curva generica di quest'ultimo. A norma di un risultato dovuto al Castelnuovo, la curva C risulta unita per la generica $I_2^2(P)$ ⁽⁵⁾.

Sia Σ un fascio di curve C estratto da Σ_{p-1} (o eventualmente coincidente con esso) e siano C_P, C_{P_1} le due curve di Σ passanti rispettivamente per due punti P, P_1 generici di Π . Nella I_3^4 alla coppia PP_1 viene ad associarsi un punto P_2 che, dovendo appartenere alla C_P e alla C_{P_1} in quanto corrispondente di P e P_1 rispettivamente nelle $I_2^2(P_1)$ e $I_2^2(P)$, verrebbe ad essere punto base di Σ ; ma ciò è assurdo, data la genericità di P, P_1 . Si conclude che deve sempre risultare $p \leq 1$.

3. Vogliamo ora stabilire che una I_2^2 di Π che ammette una curva di punti uniti U , di cui una componente irriducibile F (coincidente eventualmente con U) sia di genere $p \leq 1$, è del tipo di Jonquières. E infatti, se così non fosse, essa I_2^2 dovrebbe risultare cremonianamente equivalente ⁽⁶⁾ o

a) all'involuzione caratteristica di una rete Σ_2 di cubiche per sette punti base, rappresentabile su di un piano doppio $\bar{\Pi}$, dotato di quartica \bar{D} di diramazione e le cui rette sono immagini delle cubiche di Σ_2 ; oppure

b) all'involuzione determinata da un sistema lineare Σ_3 (di dimensione tre) di sestiche per otto punti base doppi, rappresentabile su un piano doppio Π^* ,

(5) G. CASTELNUOVO, *Sulle trasformazioni cremoniane del piano che ammettono una curva fissa*. «Rend. Acc. dei Lincei» (1892); o *Memorie Scelte*, Bologna, Zanichelli, Mem. XIX (1937).

(6) Ved. F. CONFORTO, loc. cit. in (5), pp. 383-391.

avente come curva D^* di diramazione una sestica con due punti tripli R, R' infinitamente vicini e le cui coniche per R, R' sono immagini delle sestiche di Σ_3 . Sarà lecito supporre \bar{D} e D^* prive di componenti multiple ⁽⁷⁾.

Poggeremo l'argomentazione dei due successivi capoversi sul fatto che una trasformazione cremoniana Δ , a punti fondamentali distinti, muta un piano doppio Π' , dotato di curva D' di diramazione, in un piano doppio Π'' la cui curva di diramazione D'' è composta della trasformata mediante Δ di D' e delle curve fondamentali corrispondenti ai punti fondamentali di Δ che abbiano molteplicità dispari per D' ⁽⁸⁾.

Poichè $p \leq 1$, nell'ipotesi *a*) \bar{D} ha almeno un punto A di molteplicità i , con $2 \leq i \leq 3$, non potendo verificarsi l'eventualità $i = 4$ in quanto un piano doppio la cui quartica di diramazione si riduce a quattro rette per un punto non è razionale ⁽⁹⁾. Se $i = 2$, il fascio di rette per A è tale che la sua retta generica incontra \bar{D} in due punti variabili con essa, per cui al fascio suddetto corrisponde in Π un fascio di curve razionali. Ad analoga conclusione si giunge se $i = 3$, ove si osservi che, con una trasformazione quadratica che abbia un punto fondamentale in A e i due rimanenti in posizione generica su $\bar{\Pi}$, la \bar{D} si muta in una sestica con un punto quadruplo.

Nell'ipotesi *b*), il punto R (o R') può avere molteplicità i , con $4 \leq i \leq 5$, rimanendo anche qui esclusa l'eventualità $i = 6$ per motivo analogo a quello del caso *a*) ⁽¹⁰⁾. Con una trasformazione quadratica Δ^* avente un punto base in R (o R') e gli altri due, R_1, R_2 , in posizione generica su Π^* , la D^* si muta in una curva dell'ottavo ordine con un punto R'' di molteplicità sei, per cui al fascio di rette per R'' corrisponde su Π un fascio di curve razionali.

Se poi i punti R, R' rimangono tripli, D^* non può avere, fuori di R, R' , un punto A^* , di molteplicità $i > 3$, senza spezzarsi in componenti multiple; e poichè quest'ultima eventualità è stata esclusa, rimangono solo le possibilità $i = 2, 3$. In entrambi i casi, con la trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali in R, R', A^* , la D^* si muta in una quartica di diramazione ⁽¹⁰⁾, sicchè si ricade nell'ipotesi *a*).

Si può pertanto concludere che la I_2^2 , ove sia $p \leq 1$, possiede sempre un fascio di curve razionali unite, cioè è del tipo di Jonquières.

4. Si supponga ora la curva F di genere $p = 1$.

La generica $I_2^2(P)$, essendo del tipo di Jonquières (n. 3), ammette un fascio $|C^a|_P$ di curve razionali unite C^a (di ordine a). La sua curva totale di punti uniti, U_P , che coincide con la F o la comprende come parte, può mutarsi, mediante una trasformazione cremoniana T che riduca $|C^a|_P$ ad un fascio di rette per un punto \bar{O} (corrispondente in T di un punto O base del fascio $|C^a|_P$), in una \bar{U}_P di ordine s con \bar{O} di molteplicità $s - 2$ o $s - 1$ [ved. ⁽³⁾]. Ad F la T fa corrispondere una curva \bar{F} , d'ordine c , coincidente o facente parte della \bar{U}_P , per

(7) Ved. F. CONFORTO, loc. cit. in (3), p. 394.

(8) Ved. F. CONFORTO, loc. cit. in (3), p. 396.

(9) Ved. F. CONFORTO, loc. cit. in (3), p. 415.

(10) Ved. F. CONFORTO, loc. cit. in (3), pp. 436-437.

la quale il punto \bar{O} risulta di molteplicità $c - 2$, l'eventualità $c - 1$ - e quindi quella $s - 1$ per la \bar{U}_p - rimanendo esclusa dall'ipotesi $p = 1$. Sempre in virtù della stessa ipotesi, \bar{F} ha, fuori di \bar{O} , $c - 3$ punti doppi, per cui esiste la sua curva prima aggiunta di ordine $c - 3$, ma mancano ovviamente le successive. Tanto basta per affermare che la \bar{F} - e quindi la F - è cremonianamente equivalente ad una cubica ⁽¹¹⁾. Sarà pertanto lecito supporre nel seguito che la curva F sia una cubica generale.

Indicata con $|C^m|_p$ la rete omaloidica di curve C^m (di ordine m) associata alla trasformazione cremoniana involutoria Ω_p definita dalla generica $I_2^2(P)$, si dicano $A_1^p, A_2^p, \dots, A_v^p$ i suoi punti base, di molteplicità rispettive r_1, r_2, \dots, r_v . Per l'omaloidicità di $|C^m|_p$ deve risultare

$$(1) \quad \sum_{i=1}^v r_i = 3(m - 1).$$

Inoltre, poichè la Ω_p trasforma la cubica F in sè, deve essere

$$(2) \quad 3m - \sum_{i=1}^{\mu} s_i = 3,$$

dove s_1, s_2, \dots, s_{μ} ($\mu \leq v$) sono le molteplicità di quei punti A_i^p che giacciono sulla F . Dal confronto delle (1), (2) segue

$$\sum_{i=1}^v r_i = \sum_{i=1}^{\mu} s_i,$$

e quindi:

(i) *tutti i punti base della rete $|C^m|_p$ appartengono alla cubica F .*

Siano ora $B_1^p, B_2^p, \dots, B_{\sigma}^p$ i punti base del fascio $|C^a|_p$, di molteplicità rispettive $u_1, u_2, \dots, u_{\sigma}$. Per la razionalità della generica C^a si ha $\sum_{i=1}^{\sigma} u_i(u_i - 1) = (a - 1)(a - 2)$, ed è inoltre $\sum_{i=1}^{\sigma} u_i^2 = a^2$, sicchè

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{\sigma} u_i^2 = 3a - 2.$$

Poichè la $I_2^2(P)$ induce sulla generica C^a una g_2^1 , il numero dei punti in cui la C^a stessa incontra la curva di punti uniti F fuori dei punti base di $|C^a|_p$ non può superare due, ossia

$$(4) \quad 3a - \sum_{i=1}^{\lambda} v_i \leq 2,$$

essendo $v_1, v_2, \dots, v_{\lambda}$ ($\lambda \leq \sigma$) le molteplicità di quei punti B_i^p che appartengono ad F . Dalle (3), (4) si deduce

$$\sum_{i=1}^{\sigma} u_i \leq \sum_{i=1}^{\lambda} v_i,$$

(11) Ved., ad esempio, ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Vol. III, Bologna, Zanichelli, pp. 190-191 (1924).

e qui non può che valere il segno di eguaglianza, eppertanto *non vi sono punti base del fascio $|C^a|_P$ fuori di F , e inoltre la generica C^a ha con F due intersezioni (generalmente distinte) variabili con essa.*

Come ovvia conseguenza dell'ultima affermazione, discende che:

(ii) *se per due diverse scelte del punto P su Π le $I_2^2(P)$ corrispondenti mutano in sé la medesima C^a , esse subordinano su questa la stessa g_2^1 .*

Stabiliremo ora che:

(iii) *tutti i punti base del fascio $|C^a|_P$ sono fondamentali per Ω_P .*

Detta $\bar{\Omega}_P$ la trasformazione cremoniana involutoria definita dalla $\bar{I}_2^2(\bar{P}) = \text{TI}_2^2(P) T^{-1}$ [ved. (3)], si supponga, per assurdo, che esista un punto base, Q , di $|C^a|_P$ che non sia fondamentale per Ω_P . Potranno presentarsi due casi:

a) Q non è fondamentale per T ;

b) Q è fondamentale per T .

Nell'ipotesi a), Q coincide con O ed è quindi mutato in \bar{O} da T ; $\bar{\Omega}_P$ fa corrispondere ad \bar{O} una curva fondamentale \bar{H} , e quest'ultima viene trasformata da T^{-1} in una curva H o in un punto Q' , che non può coincidere con Q non essendo questo fondamentale per T . Segue che nella $\Omega_P = T^{-1}\bar{\Omega}_P T$, al punto Q viene a corrispondere la curva H o il punto Q' , in contrasto col fatto che Q , appartenente ad F perchè base del fascio $|C^a|_P$, è punto unito (non fondamentale) per Ω_P .

Nell'ipotesi b), sia \bar{K} la curva fondamentale corrispondente a Q in T , e si indichi con \bar{Q} un punto generico di questa. La T^{-1} muta \bar{Q} in Q ; Ω_P lascia fisso Q , e a questo in T corrisponde \bar{K} . Nella $\bar{\Omega}_P = T\Omega_P T^{-1}$, a \bar{Q} viene dunque a corrispondere la curva \bar{K} , il che è assurdo data la genericità di \bar{Q} su \bar{K} .

Le contraddizioni a cui si è giunti in a), b), vengono a provare l'assurdità dell'ipotesi iniziale, per cui rimane stabilita la proposizione (iii).

5. Vogliamo qui provare che è assurda l'ipotesi $p = 1$.

A tale scopo si supponga dapprima che le Ω_P siano tali che almeno un loro punto fondamentale A_h^P ($1 \leq h \leq v$) risulti variabile con P su F . Da ciò segue che vi sono ∞^1 posizioni P' di P , costituenti una curva γ , per le quali le $\Omega_{P'}$ corrispondenti hanno come fondamentale un punto \bar{P}_1 fissato in posizione generica su F . In ogni $I_2^2(P')$ al punto \bar{P}_1 viene a corrispondere una curva δ , fondamentale per la associata trasformazione $\Omega_{P'}$. Dico che, al variare di P' su γ , la curva δ rimane fissa. E infatti, se così non fosse, essa curva descriverebbe un sistema ∞^1 , Σ_δ , in guisa che, per un punto \bar{P}_2 , genericamente scelto su Π , passerebbe almeno una curva $\bar{\delta}$ di Σ_δ , curva luogo di punti corrispondenti di \bar{P}_1 nella $I_2^2(\bar{P})$ relativa ad una ben determinata posizione \bar{P} di P' . Ne seguirebbe che nella $I_2^2(\bar{P})$ a \bar{P}_1 verrebbe a corrispondere \bar{P}_2 e quindi nella $I_2^2(\bar{P}_2)$ a \bar{P}_1 corrisponderebbe \bar{P} (generalmente distinto da \bar{P}_1), contrariamente al fatto che nella $I_2^2(\bar{P}_2)$ il punto \bar{P}_1 , in virtù della genericità di \bar{P}_2 , è punto (non fondamentale) unito perchè appartenente ad F . Dal carattere involutorio delle $I_2^2(P')$ si deduce infine che γ deve coincidere con δ .

Poniamoci ora nell'ipotesi che le Ω_P abbiano almeno due punti fondamentali A_h^P, A_k^P ($1 \leq h, k \leq v$) variabili su F con P in modo tra loro indipendente,

cioè tali che i punti P di Π per i quali nelle corrispondenti Ω_P sia A_k^P fondamentale non coincidono con quelli per cui le relative Ω_P abbiano come fondamentale A_k^P . Fissato allora un generico punto \bar{P} di Π e dette \bar{P}_1, \bar{Q}_1 le corrispondenti posizioni su F di A_h^P, A_k^P , e supposto, come per ipotesi in generale risulta, $\bar{P}_1 \neq \bar{Q}_1$, siano γ, γ' le due curve, passanti per \bar{P} , i cui punti P' , rispettivamente Q' , abbiano, nelle relative $\Omega_{P'}, \Omega_{Q'}$, come fondamentali \bar{P}_1, \bar{Q}_1 , rispettivamente. Per quanto dimostrato nel precedente capoverso, si ha che le due curve fondamentali, luogo dei punti corrispondenti di \bar{P}_1, \bar{Q}_1 nelle $I_2^2(P'), I_2^2(Q')$, risultano rispettivamente γ, γ' , dal che segue che nella $I_2^2(\bar{P})$ ai due punti distinti \bar{P}_1, \bar{Q}_1 viene a corrispondere uno stesso punto \bar{P} , cosa assurda in quanto \bar{P} , poichè non appartenente ad F , non può essere, in virtù della (i), punto fondamentale per la Ω_P . Si deduce che le Ω_P non possono avere due punti (almeno) fondamentali variabili con P su F in modo tra loro indipendente.

Rimane infine da considerare il caso in cui i due punti fondamentali A_h^P, A_k^P varino su F con P in modo tra loro dipendente, cioè costituiscano una coppia algebrica, in guisa che le due curve γ, γ' del precedente capoverso vengano ora a coincidere. Se in generale risultasse $\bar{P}_1 \neq \bar{Q}_1$, anche questo caso verrebbe ad essere escluso con ragionamento analogo a quello che precede: e infatti basta notare che qui si avrebbero ∞^1 punti del tipo di \bar{P} (comuni alle curve $\gamma = \gamma'$). Non così però avviene se si ha sempre $\bar{P}_1 = \bar{Q}_1$, cioè se questi due punti fondamentali risultano infinitamente vicini. Allora o oltre ad A_h^P, A_k^P vi è un ulteriore punto fondamentale A_l^P ($1 \leq l \leq v$), distinto dai precedenti e variabile con P , e si può quindi seguire il ragionamento di cui sopra; oppure non vi è nessun punto A_l^P siffatto. In quest'ultima eventualità (come del resto accade anche se $A_h^P \neq A_k^P$, purchè tutti i punti fondamentali A_i^P varino con P su F in modo tra loro dipendente) le $I_2^2(P)$ si distribuiscono in ∞^1 sistemi tali che tutte le involuzioni, $I_2^2(P')$, appartenenti ad un medesimo sistema Φ hanno su F gli stessi punti $A_i^{P'}$, dal che discende, tenuto conto della (iii), che le $I_2^2(P')$ ammettono uno stesso fascio, $|C^a|_{P'}$, di curve razionali unite. Indicata ancora con γ la curva luogo dei punti P' , siano \bar{P}, \bar{Q} due punti generici di questa. Per un punto \bar{P}_1 di Π , scelto in posizione generica, passa una sola curva, \bar{C}^a , del fascio $|C^a|_{P'}$, sulla quale dovranno giacere i punti \bar{P}_2, \bar{Q}_2 , corrispondenti di \bar{P}_1 nelle $I_2^2(\bar{P}), I_2^2(\bar{Q})$, rispettivamente. Ma poichè tanto la $I_2^2(\bar{P})$, quanto la $I_2^2(\bar{Q})$ subordinano su \bar{C}^a , a norma della (ii), la stessa g_2^1 , segue che deve risultare $\bar{P}_2 = \bar{Q}_2$, il che porta di conseguenza che nella $\Omega_{\bar{P}_1}$ associata alla $I_2^2(\bar{P}_1)$ il punto \bar{P}_2 (non appartenente ad F) risulta fondamentale, donde l'assurdo in base alla (i).

Restano dunque soltanto due possibilità:

- a) al variare di P su Π le Ω_P hanno un solo punto fondamentale variabile su F ;
- b) tutti i punti fondamentali delle Ω_P rimangono fissi al variare di P su Π .

Nell'ipotesi a), le $I_2^2(P)$ si distribuiscono in ∞^1 sistemi del tipo Φ precedentemente considerati, per il generico dei quali l'argomentazione allora indicata ci porta all'assurdo.

Nell'ipotesi b), invece, le $I_2^2(P)$ ammettono tutte lo stesso fascio $|C^a|_P$ di curve razionali unite, dal che segue l'assurdo con ragionamento analogo a quello dell'ultimo capoverso del n. 2.

Rimane pertanto esclusa l'eventualità $p = 1$.

Mediante la trasformazione cremoniana T considerata nel n. 4, la curva razionale F si muta in una \bar{F} di ordine c con un punto di molteplicità $c - 1$, o un punto di molteplicità $c - 2$ oltre a $c - 2$ punti doppi. Mancano pertanto le sue curve aggiunte di qualsivoglia indice per cui \bar{F} - e quindi F - risulta cremonianamente equivalente ad una retta ⁽¹²⁾.

6. In virtù dei nn. 2-5 risulta provata la proposizione del n. 1 nel caso $n = 3$. Supposto $n > 3$ e che la stessa sia verificata per le $I_{n-1}^{2(n-2)}$, ci proponiamo di dimostrarne la validità per le $I_n^{2(n-1)}$. Ciò è ovvio ove si osservi che, se la detta proposizione non valesse per una $I_n^{2(n-1)}$, ne seguirebbe la sua invalidità anche per la $I_{n-1}^{2(n-2)}$ residua rispetto alla $I_n^{2(n-1)}$ considerata di un punto generico P di Π , in contrasto con l'ipotesi ricorrente.

Analisi. — *Su di una equazione differenziale di rilassamento.*
Nota di JAURÈS CECCONI, presentata ^(*) dal Socio M. PICONE.

1. In una Nota sulla dinamica ed aerodinamica dei fili ⁽¹⁾ G. Krall ha proposto lo studio di due equazioni differenziali che conviene scrivere nel seguente modo:

$$(\alpha) \quad y'' + y' |y'| + ky' + y - p^2 y^3 = 0$$

$$(\beta) \quad y'' + y' |y'| + ky' + y - p^2 y^3 = r \sin \omega t,$$

essendo k, p, r ed ω costanti reali delle quali $p > 0$, e l'apice indicando derivazione rispetto a t .

In modo particolare G. Krall ha proposto di studiare l'esistenza di eventuali soluzioni periodiche delle equazioni (α) e (β) .

In questo lavoro prendo in considerazione l'equazione (α) nella ipotesi $k < 0$, e per ragioni di comodità pongo $k = -q$, $q > 0$, in modo che l'equazione (α) prende la forma:

$$(1) \quad y'' + y' |y'| - qy' + y - p^2 y^3 = 0.$$

Allo scopo di portare un primo contributo allo studio della equazione (1), dimostro che se p è sufficientemente prossimo a zero, in un modo che sarà precisato nel seguito, la (1) possiede almeno una soluzione periodica.

(12) Ved., ad esempio, ENRIQUES-CHISINI, loc. cit. in (9), pp. 188-189.

(*) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) G. KRALL, *Dinamica ed aerodinamica dei fili.* - III. *I Problemi non lineari delle vibrazioni visibili.* «Rend. Acc. Naz. Lincei», pp. 197-203 (1948).

2. In questo numero enuncio un teorema di I. Bendixson del quale mi servo per stabilire la proprietà enunciata.

Sia

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = X(x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

un sistema di equazioni differenziali del primo ordine i cui secondi membri $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ siano funzioni continue in tutto il piano xy ed ivi dotate di derivate parziali continue del primo ordine.

Chiamati punti singolari per il sistema (2) quei punti del piano xy nei quali si annullano entrambe le funzioni $X(x, y)$ e $Y(x, y)$, è noto ⁽²⁾ ⁽³⁾, che per ogni punto del piano xy , salvo al più per i punti singolari, passa una ed una sola soluzione del sistema (2), questa soluzione essendo costituita da una coppia di funzioni $x(t)$ ed $y(t)$ del parametro t .

Ogni tale soluzione costituisce una parte di una curva integrale del sistema (2).

È anche noto che l'incremento di t , nel passare da un punto A ad un punto B di una curva integrale, è finito se all'arco AB di curva integrale, estremi inclusi, non appartiene alcun punto singolare per il sistema (2).

Sussiste inoltre il seguente

TEOREMA ⁽⁴⁾. — *Se una curva integrale $[x(t), y(t)]$ del sistema (2) giace in una regione finita R del piano xy per $t \geq t_0$ e se R non contiene alcun punto singolare per il sistema (2), allora o la curva integrale $[x(t), y(t)]$ è una curva chiusa, od esiste in R una curva integrale chiusa cui tende la curva integrale $[x(t), y(t)]$.*

È poi evidente che l'esistenza di una soluzione periodica del sistema (2) è equivalente alla esistenza di una curva integrale chiusa, priva di punti singolari, per il sistema (2).

3. Per dimostrare la proprietà enunciata nel numero 1 scrivo l'equazione differenziale (1) sotto la forma di sistema nel seguente modo

$$(3) \quad y' = x \quad , \quad x' = x(q - |x|) - y(1 - p^2 y^2).$$

Poichè il sistema (3) soddisfa le condizioni enunciate per il sistema (2) basterà allora che si dimostri l'esistenza di una regione del piano xy la quale per il sistema (3) soddisfi alle condizioni del teorema di I. Bendixson.

Osservo intanto che i punti del piano xy singolari per il sistema (3) sono i seguenti:

$$(0, 0) \quad , \quad \left(0, \frac{1}{p}\right) \quad , \quad \left(0, -\frac{1}{p}\right).$$

(2) N. LEVINSON-O. K. SMITH, *A general equation for relaxation oscillations*. «Duke Math. Journal», vol. 9, pp. 382-403 (1942).

(3) G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Parte II. Zanichelli Bologna.

(4) I. BENDIXSON, *Sur les courbes définies par les equations différentielles*. «Acta Math.», vol. 24, pp. 1-88 (1901).

4. In questo numero costruisco una opportuna curva semplice chiusa del piano xy contenente nel suo interno il punto $(0, 0)$.

A questo scopo considero la famiglia di curve, dipendente dal parametro λ , di equazione:

$$(4) \quad x^2 + y^2 \left(1 - \frac{1}{2} p^2 y^2 \right) = \lambda^2.$$

Ciascuna di queste curve è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi ed incontra l'asse x nei punti $(\lambda, 0)$, $(-\lambda, 0)$.

Se λ è scelto in modo che

$$(5) \quad 1 - 2\lambda^2 p^2 \geq 0$$

ciascuna di queste curve incontra l'asse y nei quattro punti

$$(0, \gamma) \quad , \quad (0, -\gamma) \quad , \quad (0, \delta) \quad , \quad (0, -\delta),$$

ove γ e δ stanno ad indicare rispettivamente

$$(5 \text{ bis}) \quad \gamma = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 2\lambda^2 p^2}}{p^2}} \quad , \quad \delta = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 2\lambda^2 p^2}}{p^2}}.$$

Ognuna delle curve (4), se è soddisfatta la condizione (5), si spezza in tre rami, uno i cui punti soddisfano alla condizione $y \leq -\delta$, un secondo i cui punti soddisfano alla condizione $-\gamma \leq y \leq \gamma$, ed un terzo i cui punti soddisfano alla condizione $y \geq \delta$.

Il ramo per cui $-\gamma \leq y \leq \gamma$ è evidentemente chiuso e costituisce, come si verifica facilmente, una curva semplice chiusa contenente nel suo interno il punto $(0, 0)$.

Tale curva indico nel seguito come curva C_i .

5. In questo numero costruisco una opportuna curva semplice chiusa C_e .

Per la costruzione della curva C_e comincio a considerare la curva Γ definita dalla equazione

$$(7) \quad x(q - |x|) - y(1 - p^2 y^2) = 0.$$

Se p soddisfa alla condizione

$$(8) \quad p < \frac{8}{3q^2\sqrt{3}}$$

la curva Γ ha l'aspetto della figura 1 ove

$$-\eta_1 < 0 < \eta_2 < \eta_3$$

sono le soluzioni, reali e distinte in virtù della (8), della equazione

$$p^2 y^3 - y + \frac{q^2}{4} = 0$$

e ξ serve ad indicare $\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{2}{3p\sqrt{3}}}$.

Siano allora A il punto $(0, -\frac{1}{p\sqrt{3}})$, B il punto $(\xi, -\frac{1}{p\sqrt{3}})$ ed AB il segmento di estremi A e B.

Sia C il punto $(\xi, 0)$ e BC il segmento di estremi B e C.

Fissato il numero positivo h sia CD l'arco della circonferenza, passante per il punto C ed avente centro nel punto $(0, \eta_2 + h)$, che va dal punto C all'asse y stando nel primo quadrante del piano xy .

Sia A' il punto $(0, \frac{1}{p\sqrt{3}})$ e sia DA' il segmento di estremi D ed A'.

Siano infine B', C', D', i punti simmetrici, rispetto all'origine, dei punti B, C, D, ed A' B', B' C', C' D', D' A' gli archi simmetrici, rispetto all'origine, degli archi AB, BC, CD, DA'.

Ho così ottenuto una curva ABCDA'B'C'D'A che è semplice e chiusa. Essa è la curva C_e .

6. In questo numero dimostro che se λ oltre la condizione (5) verifica anche l'altra $\lambda^2 < q^2$, nessuna curva integrale del sistema (3) può incontrare la curva C_i dall'esterno verso l'interno di C_i .

Considero l'arco di C_i che appartiene al primo quadrante del piano xy . Poichè $0 \leq y \leq \gamma$ e $\gamma \leq 1/p$ come risulta dalla (5 bis), l'equazione di questo arco di C può mettersi nella forma $y = y(x)$, con $y(x)$ funzione decrescente di x , perciò i coseni direttori della normale n_e a questo arco di C_i , orientata verso l'esterno di C_i , sono rispettivamente:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - p^2 y^3)^2}}, \quad \frac{y - p^2 y^3}{\sqrt{x^2 + (y - p^2 y^3)^2}}.$$

Se τ è la tangente alla curva integrale $[x(t), y(t)]$, orientata secondo il crescere di t , il coseno dell'angolo $n_e \tau$ sarà espresso da:

$$\cos n_e \tau = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - p^2 y^3)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \cdot [x \cdot x' + (y - p^2 y^3) \cdot y'],$$

e tenendo conto della (3)

$$\begin{aligned} \cos n_e \tau &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - p^2 y^3)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \cdot [x^2 q - x^3 - xy + p^2 xy^3 + xy - p^2 xy^3] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - p^2 y^3)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \cdot x^2 (q - x). \end{aligned}$$

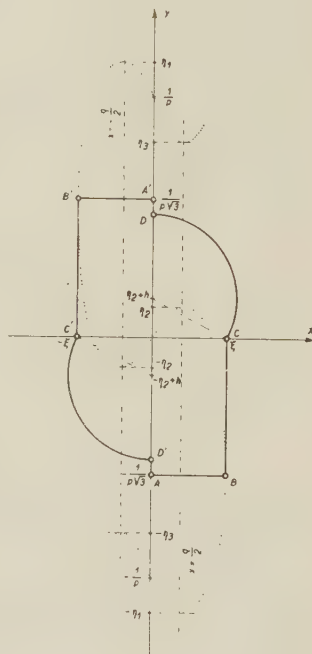


Fig. 1.

Ma ogni punto della curva integrale $[x(t), y(t)]$ che appartenga all'arco ora considerato di C_i è $0 \leq x \leq \lambda < q$, in virtù della ulteriore ipotesi fatta su λ , e perciò

$$\cos n_e \tau > 0.$$

E questa disuguaglianza prova l'asserto relativamente all'arco di C_i del primo quadrante del piano xy . Lo stesso ragionamento prova anche quanto ho asserito per i rimanenti archi di C_i .

7. In questo numero dimostro che se p verifica, oltre la condizione (8), una ulteriore condizione, nessuna curva integrale del sistema (3) può incontrare la curva C_e dall'interno verso l'esterno di C_e .

Comincio con provare l'affermazione per quanto riguarda il segmento AB.

I coseni direttori della normale n_e ad AB orientata verso l'esterno di C_e sono nell'ordine 0 e -1 . Il coseno dell'angolo che tale normale forma con la tangente τ alla curva integrale $[x(t), y(t)]$, orientata nel verso di t crescente, è perciò dato da

$$\cos n_e \tau = - \frac{y'}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

da cui tenendo conto che $[x(t), y(t)]$ verifica il sistema (3), e che su AB è $x > 0$, si ottiene

$$\cos n_e \tau = \frac{-y'}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \frac{-x}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} < 0,$$

disuguaglianza che per quanto si riferisce ad AB prova quanto si è affermato.

Prendo ora in esame l'arco BC di C_e .

I coseni direttori della normale n_e a BC orientata verso l'esterno di C_e sono nell'ordine 1 e 0. Perciò il coseno dell'angolo che la normale n_e forma con la tangente τ alla curva integrale $[x(t), y(t)]$ orientata nel verso delle t crescenti è espresso da

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

da cui tenendo conto delle (3) si ottiene

$$\cos n_e \tau = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \cdot [x(q - x) - y(1 - p^2 y^2)].$$

Da questa, poichè le coordinate di BC soddisfano le limitazioni

$$x = \xi, \quad -\frac{1}{p\sqrt{3}} \leq y \leq 0$$

si deduce che è

$$\cos n_e \tau < 0.$$

E ciò prova quanto ho asserito relativamente all'arco BC di C_e .

Prendo ora in considerazione l'arco CD di C_e . I coseni direttori della normale n_e a CD, orientata verso l'esterno di C_e , sono dati da

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y - \eta_2 - h}{r}$$

dove con $r = \sqrt{\zeta^2 + (\eta_2 + h)^2}$ ho indicato il raggio della circonferenza cui appartiene CD; il coseno dell'angolo che n_e forma con la tangente τ alla curva integrale $[x(t), y(t)]$ orientata secondo il crescere di t è perciò espresso da

$$\begin{aligned} \cos n_e \tau &= \frac{1}{r \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} [xx' + (y - \eta_2 - h)y'] = \\ &= \frac{1}{r \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} [x^2(q - x) - xy + p^2 xy^3 + xy - x\eta_2 - xh] \\ &= \frac{x}{r \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} [-x^2 + qx - \eta_2 - h + p^2 y^3]. \end{aligned}$$

Le coordinate dei punti di CD verificano le limitazioni

$$0 \leq x, \quad 0 \leq y \leq 2(\eta_2 + h) + \xi$$

risulterà perciò su CD

$$\begin{aligned} -x^2 + qx - \eta_2 - h + p^2 y^3 &\leq -x^2 + qx - \eta_2 - h + \\ &+ p^2 [2(\eta_2 + h) + \xi]^3 \leq \frac{q^2}{4} - \eta_2 - h + p^2 [2(\eta_2 + h) + \xi]^3. \end{aligned}$$

Ora poichè

$$\lim_{p \rightarrow 0} \eta_2 = \frac{q^2}{4}; \quad \lim_{p \rightarrow 0} p^2 [2(\eta_2 + h) + \xi]^3 = 0,$$

$[\xi = \xi(p)]$ è infatti un infinito di ordine $1/2$ rispetto ad $1/p$ per $p \rightarrow 0$, esiste un numero positivo, sia esso p_1 , tale che per ogni $0 < p < p_1$ si ha:

$$\cos n_e \tau < 0.$$

L'asserto, per quanto riguarda CD è perciò provato purchè sia $0 < p < p_1$. Passo infine a considerare l'arco CA' di C_e .

Perciò comincio a confrontare la seconda coordinata di D, $\eta_2 + h + \sqrt{\xi^2 + (\eta_2 + h)^2}$, con la seconda coordinata di A', $r/p \sqrt{3}$.

Poichè la seconda coordinata di D è, per $p \rightarrow 0$, un infinito di ordine $1/2$ rispetto ad $1/p$, mentre quella di A è un infinito di ordine 1 , sempre rispetto ad $1/p$, esisterà un numero positivo e minore di p_1 , sia p_0 , tale che per ogni $0 < p < p_0$ l'ordinata di D risulti minore della ordinata di A'.

Se la curva C_e è relativa ad un tale valore di p i coseni direttori della normale n_e a DA', orientata verso l'esterno di C_e , sono nell'ordine 1 e 0 .

Perciò il coseno dell'angolo che n_e forma con la tangente τ alla curva integrale $[x(t), y(t)]$, orientata nel solito modo, è espresso da:

$$\cos n_e \tau = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

e tenendo conto che $[x(t), y(t)]$ soddisfa il sistema (3), dà

$$\cos n_e \tau = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} [x(q - x) - y(1 - p^2 y^2)].$$

Da questa, tenendo conto che le coordinate dei punti di DA' soddisfano le condizioni

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{p\sqrt{3}},$$

si deduce

$$\cos n_e \tau < 0.$$

L'asserto, se $0 < p < p_0$, è così provato anche per l'arco DA' di C_e .

Questi ragionamenti possono ripetersi per i rimanenti archi di C_e . Risulta perciò provato che se $0 < p < p_0$ nessuna curva integrale del sistema (3) può incontrare la curva C_e dall'interno verso l'esterno di C_e .

8. Fissato p , tale che $0 < p < p_0$, determino λ in modo che, oltre ad essere verificate le condizioni

$$\lambda^2 < \frac{1}{2p^2}, \quad \lambda^2 < q^2$$

la curva C_i sia contenuta nell'interno di C_e .

Ciò è possibile perchè le coordinate dei punti di C verificano le relazioni

$$|x| \leq \lambda, \quad |y| \leq \gamma$$

e γ , come risulta dalla (5 bis), è infinitesimo con λ .

Sia allora R la regione costituita dai punti del piano xy che sono interni a C_e ed esterni a C_i .

La regione R non contiene alcun punto singolare per il sistema (3) e verifica tutte le ipotesi del teorema di I. Bendixson.

Risulta perciò provato il seguente

TEOREMA. - Esiste un numero positivo p_0 , tale che se $0 < p < p_0$ l'equazione differenziale

$$y'' - y' + y' - qy' + y - p^2 y^3 = 0$$

ammette almeno una soluzione periodica.

Matematica. — *Su un particolare problema al contorno per le equazioni differenziali lineari alle derivate parziali.* Nota (*) di FRANCESCO SBRANA, presentata dal Corrisp. G. SANSONE.

1. In una Nota recente mi sono occupato dell'integrazione mediante integrali definiti dell'equazione differenziale lineare omogenea alle derivate parziali del 2° ordine a coefficienti costanti in due variabili indipendenti x, y , in corrispondenza di una striscia (o di una semistriscia) del piano rappresentativo, coi lati paralleli ad uno degli assi coordinati, quando sia assegnata la funzione incognita lungo il contorno (e la derivata normale lungo la base della semistriscia nel caso iperbolico) (1). I risultati indicati possono ricondursi a quelli che si deducono col metodo delle immagini di Lord Kelvin; e ciò ne costituisce una giustificazione indiretta. Mi propongo ora di esporre alcune verifiche dirette, limitandomi per brevità al solo caso parabolico. Per lo stesso motivo riterrò le funzioni assegnate assolutamente integrabili in tutto l'intervallo in cui sono definite.

2. La funzione di cui vogliamo occuparci è data da

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^y \{ \varphi(\eta) G(l - x, y - \eta) + \psi(\eta) G(x, y - \eta) \} d\eta,$$

con

$$(I) \quad G(x, y - \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\omega(y-\eta)} \frac{\operatorname{sen} h(x\sqrt{\omega})}{\operatorname{sen} h(l\sqrt{\omega})} d\omega, \quad (\eta \leq y).$$

È sufficiente riferirsi ad uno dei due termini del 2° membro; per esempio alla funzione

$$(2) \quad w(x, y) = \int_{-\infty}^y \psi(\eta) G(x, y - \eta) d\eta,$$

per la quale si dovrà provare che

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{per} \quad 0 < x < l, \quad -\infty < y < +\infty,$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1950.

(1) Cfr.: *Su un problema di integrazione delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti*, questi «Rendiconti», vol. VIII, fasc. 5, pp. 457-562 (1950).

Nel caso del problema di Dirichlet la formula risolutiva ottenuta si riduce ad una formula nota. Per questo argomento ved. G. A. MAGGI, *Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due conduttori piani indefiniti, paralleli, assoggettati all'induzione di un punto situato nello spazio compreso tra essi*. «Memorie della R. Accademia dei Lincei», 1879-1880; T. BOGGIO, *Sulla funzione di Green per una lastra indefinita*. «Rend. Ist. Lomb.», vol. XLII, 1909; M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, Napoli, 1940, p. 355; A. GHIZZETTI, *Sui problemi di Dirichlet per la striscia e lo strato*. «Mem. della R. Acc. d'Italia», vol. XIII, fasc. 3.

con le condizioni

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} w(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow l} w(x, y) = \psi(y), \quad \text{per } -\infty < y < +\infty,$$

e

$$(4) \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} w(x, y) = 0.$$

3. L'esistenza dell'integrale (1), e la possibilità di derivare sotto il segno di integrazione risulta agevolmente, osservando che posto $\omega = i\lambda$ con λ reale, si ha, per $\lambda > 0$,

$$(5) \quad \left| \frac{\operatorname{sen} h(x\sqrt{\omega})}{\operatorname{sen} h(l\sqrt{\omega})} \right| = \left| e^{-(l-x)\sqrt{i\lambda}} \frac{1 - e^{-2x\sqrt{i\lambda}}}{1 - e^{-2l\sqrt{i\lambda}}} \right| < \\ < e^{-(l-x)\sqrt{\lambda/2}} \frac{1 - e^{-2x\sqrt{\lambda/2}} \cos 2x\sqrt{\lambda/2} + 2x\sqrt{\lambda/2}}{1 - e^{-l\sqrt{\lambda/2}}}.$$

Da ciò segue anche l'esistenza dell'integrale (2), e la possibilità di derivarlo sotto il segno. Tenendo poi presente che per $\varepsilon < x < l - \varepsilon$, (con $0 < \varepsilon < l/2$), è

$$G(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\operatorname{sen} h(x\sqrt{\omega})}{\operatorname{sen} h(l\sqrt{\omega})} d\omega = 0,$$

(come subito risulta dal lemma del Graffi già impiegato nella Nota precedente), si trova senz'altro verificata l'equazione del calore, sempre per $\varepsilon < x < l - \varepsilon$, (e per y reale qualunque).

4. Dalla (4) si può dedurre anche la verifica della 1^a condizione (3). Infatti se si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\eta)| d\eta = N,$$

si ottiene

$$|w(x, y)| < \frac{N}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\operatorname{sen} h(x\sqrt{i\lambda})}{\operatorname{sen} h(l\sqrt{i\lambda})} \right| d\lambda < \frac{4N}{\pi} \int_0^\infty e^{-(l-x)\sqrt{\gamma}} \frac{1 - e^{-2x\sqrt{\gamma}} \cos 2x\sqrt{\gamma} + 2x\sqrt{\gamma}}{1 - e^{-l\sqrt{\gamma}}} d\gamma;$$

e il 2° membro tende a zero per $x \rightarrow 0$.

Per ottenere la 2^a delle (3) notiamo che posto $\varepsilon = l - x$, si ha

$$\frac{\operatorname{sen} h(x\sqrt{\omega})}{\operatorname{sen} h(l\sqrt{\omega})} = e^{-\varepsilon\sqrt{\omega}} - e^{-l\sqrt{\omega}} \frac{\operatorname{sen} h(\varepsilon\sqrt{\omega})}{\operatorname{sen} h(l\sqrt{\omega})}.$$

Il 2° termine dà un contributo che tende a zero per $\varepsilon \rightarrow 0$; ciò si può mostrare procedendo come si è fatto per la 1^a delle condizioni (3). Resta così da provare che

$$(6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^y \psi(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+i\infty} e^{\omega(y-\eta) - \varepsilon\sqrt{\omega}} d\omega = \psi(y).$$

Ora essendo

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\omega(y-\eta)-\varepsilon V\bar{\omega}} d\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon}{V(y-\eta^3)} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4(y-\eta)}} \quad (2),$$

la (6) si riduce ad una uguaglianza ben nota (3).

5. Per ottenere la (4) basta esaminare il caso in cui y tende a $+\infty$. Ora la (2) si può scrivere

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} \frac{\operatorname{sen} h(x V i \bar{\lambda})}{\operatorname{sen} h(l V i \bar{\lambda})} d\lambda \int_{-\infty}^y e^{-i\lambda \eta} \psi(\eta) d\eta;$$

e la funzione

$$\frac{\operatorname{sen} h(x V i \bar{\lambda})}{\operatorname{sen} h(l V i \bar{\lambda})} \int_{-\infty}^y e^{-i\lambda \eta} \psi(\eta) d\eta$$

è assolutamente integrabile nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ per ogni x compreso tra zero ed l (estremi inclusi), come funzione di λ . Perciò sussiste la (4) (4).

(2) Notiamo anzitutto che, per $\varepsilon > 0, \eta < y$,

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\omega(y-\eta)-\varepsilon V\bar{\omega}} \left(y - \eta - \frac{\varepsilon}{2 V \bar{\omega}} \right) d\omega = 0;$$

perciò si ha

$$(A) \quad I(\varepsilon, y - \eta) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\omega(y-\eta)-\varepsilon V\bar{\omega}} d\omega = \frac{\varepsilon}{y - \eta} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\omega(y-\eta)-\varepsilon V\bar{\omega}} \frac{d\omega}{2 V \bar{\omega}}.$$

Una integrazione per parti, con fattore differenziale $d\omega/2 V \bar{\omega}$, conduce all'equazione differenziale.

$$(y - \eta) I = \varepsilon (y - \eta) \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2} I.$$

Risulta quindi

$$I = \varepsilon f(y - \eta) e^{-\frac{\varepsilon^2}{4(y-\eta)}}.$$

La funzione $f(y - \eta)$ può essere determinata per mezzo della (A), da cui segue

$$f(y - \eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I}{\varepsilon} = \frac{1}{2(y - \eta)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{\omega(y-\eta)}}{V \bar{\omega}} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{V(y - \eta)^3} i.$$

Il passaggio al limite sotto il segno d'integrale nella (A) può essere spiegato in questo modo. Spezzato l'intervallo di integrazione nei tre intervalli $(-i\infty, -ik_1)$, $(-ik_1, ik_2)$, $(ik_2, +i\infty)$, con k_1, k_2 positivi, eseguiamo due integrazioni per parti nel 1° e 3° integrale, con fattore differenziale $e^{\omega(y-\eta)}$, per modo che l'esponentiale verrà ad essere moltiplicato per una potenza di ω di esponente minore di -1 . Sarà ora lecito eseguire il passaggio al limite sotto i segni di integrazione. Rifacendo poi in senso inverso le integrazioni per parti, si perviene al risultato indicato.

(3) Cfr. per esempio E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, t. III, Paris 1927.

(4) Cfr. G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*; parte seconda, G. SANSONE (1914), p. 131.

Topologia. — *Criteri di compattezza per aggregati d'insiemi elementari di uno spazio euclideo* (*). Nota di TULLIO VIOLA, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

I. Seguendo una locuzione proposta dal prof. M. Picone, un insieme chiuso e limitato dello spazio euclideo S_k (a un numero qualunque k di dimensioni) si dirà *elementare*. La totalità degli insiemi elementari di S_k può esser considerata in più modi come uno spazio metrico.

A) Si può per esempio, seguendo Hausdorff e Alexandroff, assumere per *distanza* di due insiemi elementari C, C' , l'estremo inferiore dei numeri $\rho > 0$ tali che

$$C + C' < I_\rho(C) \cdot I_\rho(C'),$$

ove col simbolo $I_\rho(C)$ è indicato l'intorno di raggio ρ d'un generico insieme elementare $C < S_k$ (cioè l'insieme aperto di tutti i punti contenuti ciascuno in un intorno, circolare e di raggio ρ , di almeno un punto di C) (1).

B) Nel suo corso d'Analisi Superiore dell'anno 1949-50, il prof. M. Picone ha proposto una nuova definizione di *distanza*, di cui ha mostrato l'interesse nei fondamenti topologici del calcolo delle variazioni. Egli ha assunto come *distanza* di due insiemi C, C' , l'estremo inferiore dell'insieme dei numeri $\rho > 0$ tali che sia simultaneamente

$$\begin{cases} C + C' < I_\rho(C) \cdot I_\rho(C'), \\ FC + FC' < I_\rho(FC) \cdot I_\rho(FC'). \end{cases}$$

Seguendo il prof. Picone, chiameremo *prima distanza* quella definita in A (notazione: $\|C \cdot C'\|_I$), *seconda distanza* quella definita in B (notazione: $\|C \cdot C'\|_{II}$).

Evidentemente la seconda distanza può anche esser definita come la più grande delle due prime distanze $\|C \cdot C'\|_I, \|FC \cdot FC'\|_I$.

Corrispondentemente alle due definizioni A, B della distanza, si hanno due diverse definizioni di tendenza a limite. Useremo la notazione $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$, per indicare che la successione d'insiemi elementari $\{C_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) tende all'insieme elementare C nello spazio metrico A (o secondo la definizione A), cioè per indicare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n \cdot C\|_I = 0$. Useremo invece la notazione $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$, per indicare che la successione $\{C_n\}$ tende a C nello spazio metrico B (o secondo la definizione B), cioè per indicare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n \cdot C\|_{II} = 0$.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. I risultati di questo lavoro furono verbalmente comunicati al prof. P. Alexandroff dell'Accademia delle Scienze di Mosca, maestro insigne di Topologia, e da questi giudicati nuovi e di grande interesse, nella visita ch'Egli rese all'Istituto il 29 maggio 1950.

(**) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) In altre parole: la detta distanza è l'estremo inferiore dei numeri $\rho > 0$ tali che $C < I_\rho(C')$, $C' < I_\rho(C)$. Cfr.: F. HAUSDORFF, *Mengenlehre* (1935) pp. 145 e sgg.; P. ALEXANDROFF e H. HOPF, *Topologie*, vol. I (1935) pp. 112 e sgg.

Ci proponiamo la ricerca di criteri di compattezza per aggregati $\{C\}$ i cui elementi C sono insiemi elementari considerati nello spazio B . E poichè a tale ricerca appare utile premettere quella di una condizione, necessaria e sufficiente, affinchè una successione $\{C_n\}$ d'insiemi elementari tenda a limite nello spazio B , a ciò appunto è dedicata la prima parte di questo lavoro.

Se infatti si considera una tal successione $\{C_n\}$ nello spazio A , è facile accertarsi che la classica condizione di Cauchy è necessaria e sufficiente per la tendenza a limite, mentre è bensì necessaria, ma non sufficiente l'analoga condizione nello spazio B (come si può dimostrare con semplicissimi esempi) ⁽²⁾.

2. LEMMA. — Sia C un qualunque insieme elementare ⁽³⁾. Ad ogni numero $\varepsilon > 0$ è possibile far corrispondere un altro numero $\rho = \rho(C, \varepsilon) > 0$ tale che, nell'intorno di raggio ε d'un qualunque punto di FC , è contenuto un dominio circolare di raggio ρ e interamente estraneo a C .

Dimostrazione. — Sia P un punto qualunque di FC . Sappiamo che, nell'interno del dominio circolare I_P , di centro P e di raggio $\varepsilon/2$, cadono punti del complementare A di C ; anzi, poichè A è aperto, in I_P sono certamente contenuti dei domini circolari (infiniti di tali domini) che non hanno punti interni appartenenti a C . L'estremo superiore $r = r(C, \varepsilon, P)$ dei raggi di questi domini circolari è un massimo ed è quindi possibile convenire una legge che permetta di scegliere, qualunque sia $P < FC$, uno ben determinato di tali domini, sia $D = D(C, \varepsilon, P)$, Il dominio circolare $\Delta = \Delta(C, \varepsilon, P)$, concentrico a D e di raggio $r/2$, è interamente estraneo a C .

Consideriamo la totalità dei domini circolari I_P : essa ricopre interamente FC e perciò è possibile, in virtù del teorema fondamentale di Pincherle-Borel, individuare un gruppo finito

$$I_{P_1}, I_{P_2}, \dots, I_{P_s}$$

di tali domini, che ancora ricopra interamente FC . Sia $U = U(C, \varepsilon)$ il più piccolo degli s domini circolari $\Delta_i = \Delta(C, \varepsilon, P_i)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) e sia $\rho = \rho(C, \varepsilon)$ il suo raggio.

Un punto P qualunque di FC è interno a un certo dominio I_{P_i} ($1 \leq i \leq s$), il quale è visibilmente tutto contenuto nell'intorno di raggio ε del punto P . Dunque in tale intorno è interamente contenuto anche un dominio circolare, di raggio ρ e del tutto estraneo a C , c. d. d.

3. TEOREMA. — Condizioni necessarie e sufficienti affinchè per una successione d'insiemi elementari

$$(I) \quad \{C_n\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(2) Lo spazio degli insiemi elementari C , reso metrico con la definizione B di distanza, non è dunque completo.

(3) La tesi dell'enunciato verrebbe a mancare, se si supponesse soltanto la chiusura, non la limitatezza di C . Ciò è dimostrato dall'esempio seguente.

C : insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano, tali che $-\infty < x < 0$, oppure $0 < x < +\infty$, e che $1/x^2 \leq y$.

esista il $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$, sono che ad ogni numero $\varepsilon > 0$ si possano far corrispondere:

1° un intero $\nu = \nu(\varepsilon) > 0$ tale che, per ogni coppia d'indici m, n entrambi $> \nu$, risulti

$$(2) \quad \|C_m \cdot C_n\|_1 < \varepsilon;$$

2° un numero $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tale che, qualunque sia l'indice n e qualunque sia il punto $P \in FC_n$, nell'intorno di raggio ε di P sia contenuto un dominio circolare di raggio ρ e interamente estraneo a C_n .

Quando tali condizioni sono verificate, anche l'insieme limite C è elementare ⁽⁴⁾.

Dimostrazione. - a) Le condizioni sono sufficienti.

In virtù della prima proprietà, esiste il $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ e questo è un insieme C elementare. Si tratta di dimostrare che è anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} FC_n = FC.$$

La prima proprietà, per sè sola, basta intanto ad assicurare ancora che ogni punto $P \in FC$ è d'accumulazione della successione $\{FC_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), nel senso che vogliamo subito precisare. Comunque (piccolo) si prefissi un $\eta > 0$, esiste, nell'intorno di raggio η di P , un dominio circolare tutto contenuto nell'insieme aperto complementare $A = FC$. Perciò esiste un intero $N = N(\eta, P) > 0$ tale che, per ogni $n > N$, C_n possiede punti nel detto intorno, ma non nell'indicato dominio circolare. Dunque nel detto intorno cadono anche punti di FC_n , qualunque sia $n > N$.

Inversamente, le due proprietà enunciate assicurano che ogni punto P d'accumulazione della successione $\{FC_n\}$ appartiene ad FC . Infatti anzitutto P appartiene a C : si tratta soltanto di dimostrare che, prefissato comunque (piccolo) un $\varepsilon > 0$, esistono, nell'intorno di raggio ε di P , punti di A .

Valendosi della definizione di P , è possibile costruire (con legge ben determinata) una successione, tendente (per $h \rightarrow \infty$) al punto P , di punti P_{n_h} , appartenenti, uno per ciascun $h = 1, 2, \dots$, a certe frontiere FC_{n_h} . Per ogni valore di h , esiste, nell'intorno di raggio ε del punto P_{n_h} , tutta una classe infinita di domini circolari $[\gamma_h]$, ciascuno di raggio ρ e interamente estraneo a C_{n_h} (ciò in virtù della seconda condizione). Sia $[Q_h]$ l'insieme (evidentemente aperto) dei centri di tali domini circolari γ_h . Dando ad h ordinatamente i valori $1, 2, \dots$, si viene così a considerare una successione d'insiemi

$$\{[Q_h]\} \quad (h = 1, 2, \dots)$$

(4) Come s'è detto, la prima delle due condizioni enunciate è necessaria e sufficiente, per sè sola, affinchè esista il $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$. Affinchè, oltre a ciò, esista anche il $\lim_{n \rightarrow \infty} FC_n$ e sia precisamente uguale ad FC , è altresì necessario che sia verificata anche la limitazione

$$(3) \quad \|FC_m \cdot FC_n\|_1 < \varepsilon$$

(per ogni coppia d'indici m, n entrambi $> \nu$). Il teorema enunciato sostituisce dunque, alla limitazione (3), una condizione che, aggiunta alla (2), è in effetti più restrittiva della (3) stessa.

che ammette necessariamente almeno un punto d'accumulazione Q , appartenente all'intorno di raggio ε di P (anzi al dominio circolare, di centro P e di raggio $\varepsilon - \rho$). Il dominio circolare, di raggio $\rho/2$ e di centro Q , è contenuto sia nell'intorno di raggio ε di P , sia nell'intorno di raggio ρ d'infiniti Q_k : esso è estraneo ai corrispondenti C_{n_k} e, in definitiva, è estraneo anche a C (e quindi anche a tutti i C_n , da un certo indice in poi).

b) Le condizioni sono *necessarie*.

Per ipotesi, è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$$

e perciò anche $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$ e quindi $\|C_n \cdot C\| < 1$ (da un certo indice in poi).

Ciò assicura intanto che C è elementare e che la prima proprietà è senz'altro verificata. Sia $\rho_0 = \rho(C, \varepsilon/2)$ determinato come nell'enunciato del lemma precedente.

Poichè $\lim_{n \rightarrow \infty} FC_n = FC$, esiste un intero $n_1 > 0$ tale che, per ogni $n > n_1$, è $\|FC_n \cdot FC\|_1 < \varepsilon/2$ e quindi nell'intorno di raggio $\varepsilon/2$ d'un qualunque punto P_n di FC_n , cade almeno un punto P di FC . Perciò nell'intorno di raggio ε d'un qualunque punto P_n di FC_n , è contenuto un dominio circolare di raggio ρ_0 , interamente estraneo a C . Ne segue che il dominio circolare, di raggio $\rho_0/2$ e concentrico a quest'ultimo, è interamente estraneo a C_n , per $n >$ d'un certo indice N .

Agli N insiemi elementari C_1, C_2, \dots, C_N dell'assegnata successione corrispondono, in virtù del lemma precedente, N numeri positivi

$$\rho_n = \rho(C_n, \varepsilon) \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

onde si riconosce infine che, come numero $\rho = \rho(\varepsilon)$ richiesto dalla seconda condizione, è lecito precisamente assumere il più piccolo degli $N + 1$ numeri $\rho_0/2, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$, c. d. d.

4. È possibile esprimere la seconda condizione del teorema precedente sotto altra forma, forse più adatta per certe applicazioni del teorema stesso. All'uopo ci sarà utile considerare una certa funzione reale e positiva $\delta(r)$, definita per $r > 0$ e in corrispondenza d'un aggregato $\{C\}$, numerabile o no, comunque prefissato, d'insiemi elementari C : indicheremo con $\delta(r)$ l'estremo superiore delle distanze $\|FC \cdot FI_r(C)\|^{(5)}$, cioè delle distanze delle frontiere degli insiemi C da quelle dei corrispondenti intorni $I_r(C)$ (al variare di C in $\{C\}$)⁽⁶⁾. Tale funzione $\delta(r)$ è non crescente al decrescere di r : essa, come subito si riconosce su facili esempi, può essere o non essere infinitesima con r .

Dopo ciò siamo in grado di dimostrare la seguente proposizione, esattamente equivalente a quella del numero precedente.

(5) S'intende: *prime distanze*, poichè qui le seconde distanze s'identificano ovviamente con le prime (E a causa di tale identità, abbiamo ritenuto superfluo aggiungere l'indice).

(6) Le dette distanze son tutte finite e certo non minori di r , ma $\delta(r)$ può esser infinita, magari anche per tutti i valori di $r > 0$.

TEOREMA. - Condizioni necessarie e sufficienti affinché per una successione d'insiemi elementari

$$(I) \quad \{C_n\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

esista il $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$, sono:

1^a) che ad ogni numero $\varepsilon > 0$ si possa far corrispondere un intero $v = v(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni coppia d'indici m, n entrambi $> v$, risulti

$$(2) \quad \|C_m \cdot C_n\|_I < \varepsilon;$$

2^a) che la funzione $\delta(r)$ corrispondente alla successione (I), sia infinitesima con r .

Quando tale condizione è verificata, anche l'insieme $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ risulta elementare.

Dimostrazione. - a) Le condizioni sono sufficienti.

Basta far vedere che dalle condizioni ora enunciate si può dedurre la seconda condizione del teorema precedente. Se, per ipotesi assurda, essa non fosse soddisfatta, dovrebbe esistere un certo numero $\varepsilon > 0$ tale che, in corrispondenza d'ogni numero positivo $\rho < \varepsilon$ si dovrebbe poter determinare un certo punto $P = P(\rho)$, appartenente a un certo FC_n , tale che ogni dominio circolare di raggio ρ , contenuto nell'intorno di raggio ε di P , conterrebbe a sua volta punti di C_n . Ciò significa che tale intorno di P è interamente contenuto in $I_{\varepsilon}(C_n)$ e quindi che P non appartiene a $I_{\varepsilon}[FI_{\varepsilon}(C_n)]$. Poniamo $\exists \rho = r$. Abbiamo dunque dimostrato che, comunque si prenda il numero positivo $r < \varepsilon$, in corrispondenza di esso si può determinare un indice $n = n(r)$, tale che la relazione

$$FC_n < I_{\varepsilon}[FI_r(C_n)]$$

non è soddisfatta, tale cioè che

$$\|FC_n \cdot FI_r(C_n)\| \geq \varepsilon$$

e quindi che $\delta(r) \geq \varepsilon$, contro l'ipotesi.

b) Le condizioni sono necessarie.

Supponiamo soddisfatte le due condizioni del teorema precedente. Dalla seconda di esse risulta che, nell'intorno di raggio ε del punto ivi indicato con P , cadono certamente punti di $FI_r(C_n)$, qualunque sia $r < \rho$. Dunque $P < I_{\varepsilon}[FI_r(C_n)]$ e cioè

$$FC_n < I_{\varepsilon}[FI_r(C_n)].$$

Ma ovviamente è anche

$$FI_r(C_n) < I_{\varepsilon}[FC_n].$$

Si conclude che

$$\|FC_n \cdot FI_r(C_n)\| \leq \varepsilon.$$

Questa limitazione vale per ogni valore dell'indice n e perciò risulta $\delta(r) \leq \varepsilon$ qualunque sia $r < \rho$, c. d. d.

OSSERVAZIONE. — Secondo la terminologia introdotta dal prof. Picone nel citato corso, un insieme chiuso C si dice *dotato di primo parametro* p , se, qualunque sia il numero positivo $r < p$, l'involucro $\bar{I}_r(C)$ è *semplice*, cioè soddisfa alla condizione: ogni campo circolare di raggio r , interamente contenuto in $\bar{I}_r(C)$, ha il suo centro in un punto di C ; infiniti insiemi C si dicono *dotati uniformemente di primo parametro*, se essi sono dotati d'uno stesso primo parametro p . Il prof. Picone ha dimostrato che, se gli insiemi della successione $\{C_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) son tutti elementari, misurabili secondo Jordan e uniformemente dotati di primo parametro, allora la prima condizione del teorema qui enunciato è non solo necessaria, ma anche sufficiente per l'esistenza del $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$. Osserviamo

che dalla proprietà, per infiniti insiemi elementari C , d'esser uniformemente dotati di primo parametro, si deduce immediatamente (con le notazioni da noi ora introdotte) che la funzione $\delta(r)$, relativa alla classe $\{C\}$, è tale che $\delta(r) = r$ per ogni $r < p$.

La proposizione reciproca non è vera, come dimostra l'esempio della successione, tendente all'origine (nello spazio B), degli insiemi perfetti (privi di punti interni)

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

i quali non sono uniformemente dotati di primo parametro, pur essendo $\delta(r) = r$ per ogni r .

Ne segue che la proposizione dimostrata dal prof. Picone, anche senza l'ipotesi che gli insiemi C_n siano misurabili secondo Jordan, è un corollario del precedente teorema.

5. Siamo ora in grado di dare delle condizioni⁽⁷⁾ necessarie e sufficienti, affinché un aggregato $\{C\}$ d'insiemi elementari C , sia compatto. Queste condizioni sono essenzialmente fornite dai seguenti due teoremi⁽⁷⁾.

TEOREMA. — Sia

$$(1) \quad \{C_n\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

una successione d'insiemi elementari. Condizioni necessarie e sufficienti affinché da ogni successione

$$(4) \quad \{C_{h_n}\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(7) È qui fatto riferimento alla definizione di compattezza in senso ristretto, quale si trova enunciata per esempio nel recente libro del prof. C. MIRANDA: *Problemi di esistenza in analisi funzionale* (Pisa, Scuola Norm. Super., quaderno matematico n. 3, 1949) p. 12. Più generalmente, il prof. Picone, nel citato corso, chiama *compatto* un aggregato $\{C\}$ (per non parlare d'altri spazi), se ogni successione d'insiemi $[C]_n$ ($n = 1, 2, \dots$), i cui elementi C appartengono a $\{C\}$, ammette almeno un *elemento di compattezza*: cioè se esiste almeno un insieme C_0 (appartenente o no a $\{C\}$), tale che il prodotto $\mathcal{I}[C]_n$ (d'un qualunque intorno \mathcal{I} di C_0 , col generico insieme $[C]_n$ della successione), non è mai definitivamente vuoto. L'applicazione dei due teoremi che seguono, alla definizione più generale di compattezza enunciata dal prof. Picone, non offre difficoltà.

parziale della (1), sia possibile estrarre una successione

$$(5) \quad \{C_{k_n}\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

convergente verso un ben determinato limite_{II}, sono:

1^a) che esista un intervallo R contenente tutti i C_n ;

2^a) che ad ogni numero $\varepsilon > 0$ sia possibile far corrispondere un altro numero $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tale che, nell'intorno di raggio ε d'un qualunque punto P della frontiera FC_n d'un qualunque insieme C_n della (1), sia contenuto un dominio circolare di raggio ρ e interamente estraneo a C_n .

Dimostrazione. - a) Le condizioni sono sufficienti.

In virtù della prima condizione, sappiamo che dalla (4) è sempre possibile estrarre una (5) tendente a un ben determinato limite_I, sia C . La (5) si trova allora nelle condizioni volute dal teorema del n. 3 e perciò è anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{k_n} = C.$$

b) Le condizioni sono necessarie.

Supponiamo che la (1) non soddisfi alla prima condizione. Consideriamo la successione d'intervalli quadrati R_n ($n = 1, 2, \dots$), di centro l'origine e di lati rispettivamente uguali ad n . Percorrendo la (1), indichiamo con C_{h_1} il primo insieme C_n che non è contenuto in R_1 ,

con C_{h_2} il primo insieme C_n che non è contenuto in R_2 e tale che $n > h_1$,

in generale con $C_{h_{p+1}}$ (p indice intero qualunque) il primo insieme C_n che non è contenuto in R_{p+1} e tale che $n > h_p$,

Si riconosce che dalla successione (4) così formata, non è possibile estrarre una successione (5) convergente verso un limite_I e quindi, a più forte ragione, neppure verso un limite_{II}.

È così dimostrata la necessità della prima condizione: supponiamo dunque che sia verificata la prima condizione, ma che non lo sia la seconda. Supponiamo cioè ch'esista un certo numero $\bar{\varepsilon}$ al quale non si possa far corrispondere un $\rho(\bar{\varepsilon})$, nel senso indicato dall'enunciato.

Percorrendo la (1), indichiamo con C_{h_1} il primo insieme C_n tale che ad esso non sia possibile far corrispondere un $\rho = \rho(C_{h_1}, \bar{\varepsilon}) > 1$, nel senso indicato dal lemma del n. 2. Indichiamo poi con C_{h_2} il primo insieme C_n tale che $n > h_1$ e che ad esso non sia possibile far corrispondere un $\rho = \rho(C_{h_2}, \bar{\varepsilon}) > 1/2$, nel senso indicato dal lemma. Così proseguiamo indefinitamente. In generale, dopo aver scelto C_{h_p} , indichiamo con $C_{h_{p+1}}$ il primo insieme C_n tale che $n > h_p$ e che ad esso non sia possibile far corrispondere un $\rho = \rho(C_{h_{p+1}}, \bar{\varepsilon}) > 1/p + 1$, ecc.

È, dopo ciò, immediato che, dalla successione (4) così costruita, non è certo possibile estrarre una successione (5) convergente verso un limite_{II}, perchè altrimenti si verrebbe a contraddire al teorema del n. 3, c. d. d.

6. TEOREMA. — Sia

$$(1) \quad \{C_n\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

una successione d'insiemi elementari. Condizioni necessarie e sufficienti affinché da ogni successione

$$(4) \quad \{C_{h_n}\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

parziale della (1), sia possibile estrarre una successione

$$(5) \quad \{C_{k_n}\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

convergente verso un ben determinato limite_{II}, sono:

1^a) che esista un intervallo R contenente tutti i C_n ;

2^a) che la funzione $\delta(r)$ corrispondente alla successione (1), sia infinitesima con r .

Dimostrazione. — a) La sufficienza delle condizioni si dimostra in modo perfettamente analogo a quanto s'è fatto per il teorema precedente.

b) Le condizioni sono necessarie.

In virtù dell'ipotesi, oltre alla prima condizione, è soddisfatta anche la seconda del teorema precedente. Partendo da tale condizione basta allora ripetere esattamente il ragionamento fatto al comma b) della dimostrazione del teorema del n. 4.

Geometria. — *Sulle varietà quasi-asintotiche. — II. Varietà subordinate di varietà quasi-asintotiche.* Nota di GIACOMO SABAN, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

II. — RELAZIONI FRA LE VARIETÀ SUBORDINATE DI UNA VARIETÀ QUASI-ASINTOTICA AD UNA VARIETÀ DATA, E LA VARIETÀ STESSA.

7. Riconsiderando la definizione di varietà quasi-asintotica, viene spontaneo di chiedersi se per queste non sussistano dei teoremi che permettano di affermare che una varietà subordinata d'una varietà quasi-asintotica ad una varietà data è pure quasi-asintotica a questa.

Cercheremo quindi di trovare ora le condizioni sufficienti perchè:

a) le varietà subordinate di una V_k quasi-asintotica ad una V_m siano quasi-asintotiche della V_k ;

b) le varietà subordinate di una V_k quasi-asintotica ad una V_m siano quasi-asintotiche della V_m .

Consideriamo una generica V_h , subordinata a V_k : è chiaro che lo spazio $S^h(s)$ è contenuto in $S^k(s)$, allo stesso modo che lo spazio $S^k(r)$ è contenuto in $S^m(r)$, poichè V_k appartiene a V_m . Se inoltre V_k è una varietà quasi-asin-

(*) Nella seduta del 13 maggio 1950. — Continuazione della Nota omonima, apparsa in questi « Rendiconti », vol. VIII, fasc. 6, pp. 562-568 (1950).

totica $\sigma_{r,s}^t$ di V_m , lo spazio congiungente $S^k(s)$ con $S^m(r)$ ha dimensione $d = c - t$ dove c è dato dalla formula

$$(1:1) \quad c = \binom{r+m}{m} + \binom{s+k}{k} - \binom{r+k}{k} - 1:$$

dunque lo spazio congiungente lo $S^h(s)$ con $S^k(r)$ sarà ugualmente contenuto in questo S_d .

Indichiamo con c_1 la dimensione dello spazio lineare che ordinariamente congiunge lo $S^h(s)$ di una generica V_h con lo $S^k(r)$ della V_k cui la V_h appartiene: chiaramente, sempre per la (1:1), si ha

$$(1:1)_1 \quad c_1 = \binom{r+k}{k} + \binom{s+h}{h} - \binom{r+h}{h} - 1.$$

Per quel che abbiamo visto esaminando la definizione di varietà quasi-asintotica, se

$$c - t < c_1,$$

ogni V_h appartenente a V_k sarà quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^{t_1}$ della V_k : precisamente si avrà

$$(2:1)_1 \quad t_1 = c_1 - c + t.$$

Ma siccome, in virtù di una dimostrazione data in precedenza, vale per t_1 la limitazione ⁽¹³⁾

$$1 \leq t_1 \leq \binom{s+h-1}{h-1},$$

segue che, data V_k quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ di V_m , e V_h di V_k , perchè questa sia $\sigma_{r,s}$ di V_k , la specie t di V_k deve soddisfare alla condizione

$$(2:2)_1 \quad 1 + c - c_1 \leq t \leq \binom{s+h-1}{h-1} + c - c_1.$$

Siccome $c > c_1$, è inoltre sempre $t > t_1$.

Sia d'altra parte c_2 la dimensione dello spazio che ordinariamente congiunge lo $S^h(s)$ di una generica V_h con lo $S^m(r)$ della V_m cui appartiene la V_h che porta la V_h . Sempre per la (1:1), si ha

$$(1:1)_2 \quad c_2 = \binom{r+m}{m} + \binom{s+h}{h} - \binom{r+h}{h} - 1$$

e, di nuovo per le osservazioni precedenti, ogni V_h appartenente a V_k di V_m sarà quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^{t_2}$ di V_m se

$$c - t < c_2:$$

precisamente sarà

$$(2:1)_2 \quad t_2 = c_2 - c + t.$$

(13) Cfr. la formula (1:4) della 1^a parte della presente Nota.

Ma t_2 è soggetta, come prima, alla limitazione

$$1 \leq t_2 \leq \binom{s+h-1}{h-1},$$

e dunque perchè ogni V_h subordinata a V_k sia varietà quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ di V_m , la specie della V_k , t , dovrà soddisfare alla condizione

$$(2:2)_2 \quad 1 + c - c_2 \leq t \leq \binom{s+h-1}{h-1} + c - c_2;$$

si ha ancora l'ineguaglianza $t > t_2$.

Se d'altra parte, sono soddisfatte simultaneamente le $(2:2)_1$ e $(2:2)_2$, la V_h è quasi-asintotica di indici r ed s , sia di V_k che di V_m , ed è rispettivamente di specie t_1 e t_2 , con $t > t_2 > t_1$.

8. Osserviamo innanzi tutto che, tenendo conto del fatto che $0 < r < s$, ed $h < k < m$, è sempre

$$(2:3) \quad c - c_1 > c - c_2.$$

Inoltre rileviamo che perchè le condizioni $(2:2)_1$ e $(2:2)_2$ possano avere un significato, cioè perchè siano effettivamente possibili i casi che rappresentano, bisogna che siano compatibili con la condizione

$$(1:4)' \quad 1 \leq t \leq \binom{s+h-1}{h-1}$$

cioè bisogna che sia

$$(2:4)_1 \quad 1 + c - c_1 \leq \binom{s+h-1}{h-1}$$

$$(2:4)_2 \quad 1 + c - c_2 \leq \binom{s+h-1}{h-1} \quad (14).$$

In queste ipotesi i risultati precedenti si possono esprimere mediante i tre teoremi seguenti:

Data una varietà $V_m^{(15)}$ ed una sua varietà quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^t$, V_k , e definite mediante le formule precedenti le quantità $c - c_1$, $c - c_2$, t_1 e t_2 .

I. Condizione sufficiente perchè ogni varietà V_h subordinata di V_k sia varietà quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^{t_1}$ di V_k è che la specie t di V_k soddisfi alla

$$1 + c - c_1 \leq t \leq \binom{s+h-1}{h-1} + c - c_1;$$

II. Condizione sufficiente perchè ogni varietà V_h subordinata di V_k sia varietà quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^{t_2}$ di V_m è che la specie t di V_k soddisfi alla

$$1 + c - c_2 \leq t \leq \binom{s+h-1}{h-1} + c - c_2;$$

(14) Il teorema è dunque solamente parzialmente risolto, poichè non mi è stato possibile mostrare nel caso generale quando è che sono verificate le condizioni di compatibilità. Ma è ovvio che nel caso di esempi numerici tale verifica è semplicissima.

(15) Supposta naturalmente immersa in uno spazio S_n di dimensione sufficientemente elevata, perchè lo spazio $S^m(r)$ e lo spazio $S^k(s)$ possano avere dimensione regolare.

III. Condizione sufficiente perchè ogni varietà V_h subordinata di V_k sia varietà quasi-asintotica $\sigma'_{r,s}$ di V_k e $\sigma'_{r,s}$ di V_m è che la specie t di V_k soddisfi alla

$$1 + c - c_1 \leq t \leq \binom{s+h-1}{h-1} + c - c_2.$$

9. Passiamo a considerare alcuni esempi di casi in cui si applicano questi teoremi ⁽¹⁶⁾.

Mostriamo anzitutto che il teorema I può essere applicato in numerosissimi casi. Consideriamo, ad esempio, la $W_4 = S_3 \times S_1$ di Segre, immersa in S_8 : prendiamo su questa le varietà quasi-asintotiche $\sigma'_{1,2}$ a tre dimensioni: allora, perchè tutte le superficie subordinate a queste siano quasi-asintotiche di indici 1, 2 della V_3 è sufficiente che le V_3 considerate siano di specie $t = \tau = 6$. Si verifica facilmente, sia analiticamente che applicando il teorema del n. 6, che necessariamente le V_3 devono essere gli spazi lineari S_3 , subordinati alla W_4 : ma allora, anche per considerazioni dirette, è evidente che tutte le superficie immerse in questi S_3 sono quasi-asintotiche degli S_3 (e per il teorema del n. 5, anche della W_4).

Ma, oltre a tutti i casi del genere, che si potrebbero anche formulare con la massima generalità, e per i quali si ricade sempre su fatti geometricamente semplicissimi, se ne possono considerare degli altri, meno banali.

Si verifica facilmente che se si considerano su una V_5 , le V_4 quasi-asintotiche $\sigma'_{1,2}$, perchè le V_3 subordinate a queste siano quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ di V_4 , è sufficiente che sia

$$6 \leq t \leq 11,$$

e perchè invece siano quasi-asintotiche per la V_5 , deve essere invece

$$5 \leq t \leq 10.$$

Orbene, in questo caso $\tau = 10$, sicchè le condizioni di compatibilità sono ambedue soddisfatte, in modo che valgono simultaneamente in un certo intervallo i teoremi I e II, cioè vale il teorema III.

Prendiamo come varietà V_5 la varietà di Segre $W_5 = S_4 \times S_1$ in S_9 : indichiate con $(u_1, u_2, u_3, u_4, 1)$ e $(v, 1)$ le coordinate omogenee su questi spazi, le coordinate d'un punto generico $x = x(u_1, u_2, u_3, u_4, v)$ della W_5 hanno per espressioni parametriche

$$u_1 v \quad u_2 v \quad u_3 v \quad u_4 v \quad v \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad 1$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

(16) Si tratta semplicemente di particolari estensioni dell'esempio dato dal Villa nel lavoro citato in (2). Cfr. loc. cit. nella nota 2 a pie' di pagina 229.

Consideriamo le V_4 subordinate alla W_5 , ottenute sostituendo a v nell'equazione parametrica di x la funzione $v = v(u_1, u_2, u_3, u_4)$, ed indichiamo con \bar{x} un punto corrente di essa: poniamo inoltre

$$v_i = \frac{\partial v}{\partial u_i} \quad , \quad v_{ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial u_i \partial u_j} .$$

Si ha immediatamente, mediante le relazioni precedenti

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u_i^2} &= 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial v} v_i + \frac{\partial x}{\partial v} v_{ii} \\ \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u_i \partial u_j} &= \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial v} v_j + \frac{\partial^2 x}{\partial u_j \partial v} v_i + \frac{\partial x}{\partial v} v_{ij} . \end{aligned}$$

Ora l'ultimo termine di ciascuna delle espressioni scritte sopra rappresenta un punto che appartiene allo spazio tangente della W_5 , il punto $\partial x / \partial v$, ed è quindi immediato che, indicato con i_0 un valore fissato di i (che assume uno dei valori interi fra 1 e 4) la funzione $v = v(u_{i_0})$ individua una V_4 quasi asintotica $\sigma_{i,2}^6$ della W_5 . Abbiamo dunque determinato sulla W_5 quattro famiglie di varietà V_4 quasi-asintotiche $\sigma_{i,2}^6$, dipendenti ciascuna da una funzione arbitraria, che non sono spazi lineari, e tali che per esse valgano i teoremi I e II, quindi tutte le loro varietà subordinate V_3 sono quasi-asintotiche $\sigma_{i,2}^7$ delle V_4 $\sigma_{i,2}^6$, e $\sigma_{i,2}^2$ della W_5 .

Si osservi infine che gli S_4 della W_5 sono $\sigma_{i,2}^{10}$ di questa, e per essi si possono ripetere integralmente le considerazioni della prima parte di questo numero.

10. Ritorniamo ora sui teoremi del n. 8, esaminando più da vicino il caso $h = 1$, cioè quello delle curve quasi-asintotiche: è per esse $\binom{s+h-1}{h-1} = 1$: il terzo teorema, in vista della (2:3), perde ogni significato, mentre i primi due si modificano nel modo seguente:

Data una varietà V_m ed una sua varietà quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^t$, V_k e definite mediante le formule precedenti le quantità $c = c_1$ e $c = c_2$:

I'. Condizione sufficiente perchè ogni curva di V_k sia una curva quasi-asintotica $\gamma_{r,s}$ di V_k è che sia

$$t = 1 + c - c_1 ;$$

II'. Condizione sufficiente perchè ogni curva di V_k sia una curva quasi-asintotica $\gamma_{r,s}$ di V_m è che sia

$$t = 1 + c - c_2 .$$

È pertanto chiaro dai teoremi che una determinata curva non potrebbe mai essere simultaneamente quasi-asintotica (coi medesimi indici r ed s) di una varietà, e di una sua varietà subordinata quasi-asintotica $\sigma_{r,s}^t$.

Aggiungiamo che dal teorema II' si trae il seguente corollario:

Data una varietà V_k , quasi-asintotica $\sigma_{s-1,s}^t$ di una varietà V_m , tutte le curve appartenenti alla V_k sono quasi-asintotiche $\gamma_{s-1,s}$ della V_m .

Difatti, in generale si può scrivere

$$1 + c - c_2 = 1 + \left[\binom{s+k}{k} - \binom{s+h}{h} \right] - \left[\binom{r+k}{k} - \binom{r+h}{h} \right] :$$

essendo, nel caso considerato, $r = s - 1$, questa relazione diventa

$$(2:5) \quad 1 + c - c_2 = 1 + \left[\binom{s+k}{h} - \binom{s+k-1}{h} \right] - \left[\binom{s+h}{h} - \binom{s+h-1}{h} \right] \\ = 1 + \binom{s+k-1}{h-1} - \binom{s+h-1}{h-1};$$

infine, poichè $h = 1$, si ottiene

$$1 + c - c_2 = \binom{s+k-1}{h-1}.$$

Inoltre, dalla formula (2:5) risulta che il teorema II si può sempre applicare alla varietà subordinata di varietà quasi-asintotiche $\sigma_{s-1,s}^t$, poichè sempre si ha in tal caso

$$1 + c - c_2 = 1 + \binom{s+k-1}{h-1} - \binom{s+h-1}{h-1}$$

ed essendo $h > 1$, è

$$\binom{s+h-1}{h-1} > 1,$$

cioè

$$1 + c - c_2 < \binom{s+k-1}{h-1};$$

la condizione (2:4)₂ è quindi sempre verificata.

11. Le varietà *prodotto topologico di spazi multipli* ⁽¹⁷⁾ offrono evidentemente numerosi esempi di varietà dotate di varietà quasi-asintotiche di vario genere ⁽¹⁸⁾.

Il metodo usato al n. 9, che è sostanzialmente del Villa, ci permette di individuare queste varietà quasi-asintotiche, e quindi di fornire esempi per i quali valgono i teoremi precedenti.

Ricordiamo che, col Bompiani, si chiama varietà prodotto topologico di spazi multipli $V[m_1^{\mu_1}, m_2^{\mu_2}, \dots, m_k^{\mu_k}]$ la varietà prodotto topologico degli spazi $S_{m_1}, S_{m_2}, \dots, S_{m_k}$, considerati ciascuno come *spazio multiplo* di molteplicità $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ rispettivamente. Una tale varietà è immersa in uno spazio lineare di dimensione

$$\binom{m_1 + \mu_1}{m_1} \binom{m_2 + \mu_2}{m_2} \dots \binom{m_k + \mu_k}{m_k} - 1,$$

mentre la dimensione della varietà stessa è $\sum_i m_i$.

(17) E. BOMPIANI, *Varietà prodotto topologico di spazi multipli*. Questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. II, pp. 493-497 (1947). Un primo accenno a queste varietà, che estendono simultaneamente le varietà di Veronese e quelle di Segre, si trova in A. TERRACINI, *Sul modulo delle forme contenenti una varietà di Segre*. Questi «Rendiconti», pp. 95-100 (1921). Cfr. anche L. GODEAUX, *Variétés mixtes de Segre-Veronese*. «Bull. Soc. Sciences de Liège», pp. 74-83 (1942), e *Sur les variétés de Segre généralisées*. «Bull. Soc. Sciences de Liège», pp. 20-24 (1948).

(18) È scarso l'interesse che forniscono gli esempi così ottenuti. Osserviamo però che in questo modo è possibile ottenere anche quasi-asintotiche di indici r, s che non siano varietà quasi-asintotiche di indici $1, s$ (cioè non ottenute da tali varietà per il teorema dimostrato nella prima parte). Il metodo seguito è quello del lavoro del Villa, già più volte citato, e non presenta nessuna originalità.

Consideriamo allora un $V[1^1, 2^2]$ in S_{11} . Un generico punto $x = x(u, v_1, v_2)$ di questa varietà (supposte $(u, 1)$ e $(v_1, v_2, 1)$ le coordinate proiettive rispettivamente della retta e del piano), ha per equazioni parametriche

$$u \cdot v_1^2 \quad u \cdot v_1 \cdot v_2 \quad u \cdot v_2^2 \quad u \cdot v_1 \quad u \cdot v_2 \quad u \quad v_1^2 \quad v_1 \cdot v_2 \quad v_2^2 \quad v_1 \quad v_2 \quad 1.$$

Si dimostra facilmente che le superficie che si ottengono da questa V_3 , ponendo $u = \text{cost.}$ sono superficie quasi-asintotiche della V_3 di genere $\sigma_{1,3}^4$. A norma di quanto rileva il Bompiani, queste sono *superficie di Veronese*, e, per il corollario dimostrato al n. 10, tutte le curve tracciate sopra queste superficie di Veronese sono quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ della $V[1^1, 2^2]$ ⁽¹⁹⁾.

Similmente, prendiamo in S_{11} una $V[1^1, 1^1, 1^2]$. Siano $(u, 1)$, $(v, 1)$ e $(w, 1)$ sistemi di coordinate omogenee sulle tre rette che definiscono questa varietà tridimensionale, ed indichiamo con $x = x(u, v, w)$ le equazioni parametriche d'un punto generico di essa: si ha

$$u \cdot v \cdot w^2 \quad v \cdot w^2 \quad u \cdot w^2 \quad u \cdot v \cdot w \quad v \cdot w \quad u \cdot w \quad w^2 \quad u \cdot v \quad w \quad u \quad v \quad 1.$$

Si verifica pure che le superficie ottenute ponendo $w = \text{cost.}$ sono ugualmente superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,3}^4$ della V_3 considerata. Risulta altresì che queste superficie sono inoltre delle $V[1^1, 1^1]$, cioè delle *varietà di Segre* (prodotto topologico di due rette), ed ancora pel corollario del n. 10, tutte le curve tracciate sopra queste superficie di Segre sono quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ della $V[1^1, 1^1, 1^2]$ ⁽²⁰⁾.

12. Ritorniamo ora al teorema corollario del n. 10: per esso.

Tutte le curve di una varietà V_h , quasi-asintotica $\sigma_{s-1,s}^r$ di una varietà V_m , sono curve quasi-asintotiche $\gamma_{s-1,s}$ della varietà V_m .

Facciamo allora $s = 2$: segue che se V_h ($h < m$) è una varietà quasi-asintotica $\sigma_{1,2}^r$, tutte le curve di V_h sono curve $\gamma_{1,2}$, cioè *asintotiche ordinarie* della V_m . Segue ⁽²¹⁾ che le $\gamma_{1,2}$ di V_h riempiono *almeno* uno S_h subordinato della V_m o se no appartengono ad uno spazio lineare di dimensione maggiore.

Quindi:

Tutte e sole le varietà quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}^r$ di dimensione h ($h < m$) di una varietà generica V_m sono contenute negli spazi lineari S_h ($h < k < m$) di questa ⁽²²⁾.

E dunque:

Se una varietà V_m è priva di spazi lineari subordinati di dimensione $> h$, mancano su questa varietà le varietà quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ di specie massima e di dimensione superiore ad h .

(19) Sono quasi-asintotiche $\sigma_{1,3}^1$ della V_3 considerata, senza essere $\sigma_{1,3}^4$ le V_2 ottenute ponendo nelle equazioni parametriche $v_1 = \Phi(u, v_2)$ o $v_2 = \Psi(u, v_1)$, dove Φ e Ψ sono funzioni arbitrarie.

(20) Similmente, sono quasi-asintotiche $\sigma_{2,3}^1$ della V_3 , senza essere $\sigma_{1,3}^4$ le V_2 ottenute ponendo nelle equazioni parametriche del punto generico $u = u(v, w)$ o $v = v(u, w)$, le funzioni essendo del tutto arbitrarie.

(21) Cfr. ad esempio il lavoro del Villa citato in (8), nota 1 a p. 251.

(22) Rientra in questo il teorema dimostrato dal Vaona nel lavoro cit. in (5) a p. 365.

Geometria. — *Su alcune varietà algebriche che contengono un sistema di curve ellittiche.* Nota di LEONARD ROTH, presentata (*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In un lavoro (1) che risale al 1894, il prof. Castelnuovo ha dimostrato fra l'altro che ogni superficie algebrica contenente una rete di curve ellittiche è razionale o riferibile ad una rigata ellittica. Nella presente Nota vogliamo applicare il suo metodo ad alcune questioni concernenti le varietà unirazionali; aggiungiamo che una applicazione dello stesso metodo è stata fatta in precedenza da Enriques (2) nello studio della V_3^0 intersezione d'una quadrica e d'una forma cubica di S_5 .

Sia V_r una varietà algebrica, irriducibile e definita in un campo commutativo K ; supponiamo che essa contenga un sistema $\infty^{r+k-1} \Sigma$, pure in K , di curve ellittiche C tale che per il punto P generico di V_r passi un sistema $\{C\}$, irriducibile, birazionale, e di dimensione $k \leq r$. Siccome P sarà semplice per la C generica, possiamo determinare razionalmente su di essa un punto Q , tangenziale generalizzato (3) di P ; il luogo di Q è in generale una V_k , irriducibile e birazionale nel campo (4) $K(P)$ ottenuto aggiungendo a K l'irrazionalità da cui dipende la determinazione di P .

Supponiamo dapprima che $k = r$; in generale la V_k così costruita invaderà V_r , e, delle curve C passanti per P , una semplice infinità passerà per un altro punto P' assegnato, il quale sarà tangenziale generalizzato di P rispetto ad un certo numero v di curve C . Risulta che V_r è unirazionale in $K(P)$ ed ivi rappresentabile sopra una involuzione I_v .

Supponiamo, più generalmente, che $2k > r$; allora, può darsi che, scegliendo un sotto-sistema ∞^{r-k} , birazionale, delle C passanti per P , possiamo determinare razionalmente una varietà V_{r-k} , birazionale in $K(P)$. Se, per ogni singola posizione P' di P su V_{r-k} , possiamo costruire una V_k come sopra, otteniamo un sistema birazionale di varietà V_k , di un certo indice $v \geq 1$, tale che V_k sia birazionale in $K(P)$; pertanto V_r è unirazionale e rappresentabile in $K(P)$ sopra una I_v .

Questa costruzione si estende al caso $2k = r$, purchè la varietà V_k corrispondente al generico P' sia variabile con P' .

I vari casi eccezionali verranno esaminati in un successivo lavoro.

2. Diamo ora qualche applicazione del precedente risultato, incominciando con lo spazio doppio S_r ($r \geq 2$) con forma quartica generale di diramazione. Prendendo come modello semplice della varietà una forma Φ_r^1 di S_{r+1} , dotata di tacnodo, si

(*) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) G. CASTELNUOVO, «Rend. Acc. Lincei» (5), 3, 473 (1894); *Memorie Scelte*, p. 233.

(2) F. ENRIQUES, «Rend. Acc. Lincei» (5), 21, 81 (1912).

(3) Se C è di ordine n , i parametri p, q di P, Q devono soddisfare all'equivalenza

$$(n-1)p + q \equiv 0.$$

(4) Per questi e simili concetti ved. L. ROTH, «Boll. Un. Mat. Ital.» (3), 5 (1950).

vede che per il punto P generico passano ∞^{r-1} curve ellittiche C soddisfacenti alle ipotesi del n. 1. Quindi Φ_r^1 è unirazionale in $K(P)$: risultato ottenuto in modo diverso, nel caso $r = 3$, da Enriques ⁽⁵⁾.

Un modello non-singolare dell' S_r doppio può venir costruito come segue: consideriamo il cono Γ che proietta, da un punto O , la varietà di Veronese rappresentante le quadriche di S_r ; segando Γ con una quadrica generica dello spazio ambiente $S_{(r+1)(r+2)/2}$, otteniamo una W_r di ordine 2^{r+1} la quale si proietta da O nella varietà di Veronese doppia. Per i valori $r = 2, 3$, la varietà W_r è stata studiata da Castelnuovo ⁽⁶⁾ e Fano ⁽⁷⁾ rispettivamente; nel primo caso essa è birazionale, ma da un metodo analogo al presente risulta soltanto che è unirazionale e rappresentabile sopra una I_2 , mentre nel secondo caso la varietà comprende come sotto-tipo la forma cubica generale di S_4 , e quindi è presumibilmente irrazionale.

3. Un'altra applicazione del metodo trovasi nella teoria delle grassmanniane. È un risultato classico di Severi che ogni grassmanniana, nonchè le sue sezioni lineari generiche fino ad un certo limite, sono birazionali; però è sempre aperta la questione se le rimanenti sezioni a generi nulli siano birazionali o unirazionali. Esaminiamo ora brevemente tre di tali problemi.

(i) Per la V_8^{14} che rappresenta le rette di S_5 il solo caso dubbio è la sezione V_3 . Osserviamo che per la retta generica del sistema corrispondente in S_5 passa un sistema ∞^3 di iperpiani, ciascun dei quali contiene una rigata ellittica R^5 delle rette del sistema. Pertanto per il punto generico di V_3 passa un sistema ∞^3 birazionale di quintiche ellittiche c^5 e quindi, in base al n. 1, la varietà risulta unirazionale in $K(P)$.

(ii) Passiamo ora alla V_9^{42} che rappresenta i piani di S_5 ; dalla teoria generale si deduce che le sue sezioni generiche fino a V_6 sono birazionali, ed altrettanto si può dimostrare nel caso della V_5 . Consideriamo la sezione V_4 ; per il piano generico del sistema ad essa corrispondente passa un sistema ∞^2 di iperpiani sicchè, in virtù della dualità tra piani e rette di S_4 , per il punto generico di V_4 passa un sistema ∞^2 birazionale di curve c^5 . Il luogo del relativo tangenziale generalizzato è una superficie V_2 birazionale in $K(P)$; muovendo il punto P' su V_2 e ripetendo la solita costruzione per ogni sua posizione, otteniamo un sistema di superficie al quale possiamo applicare il metodo del n. 1.

(iii) Da quest'ultimo risultato possiamo desumere l'unirazionalità della V_7 sezione della V_{12}^{264} che rappresenta i piani di S_6 . Difatti, denotando con α un piano fisso e con β il piano generico del sistema corrispondente a V_7 , si vede che uno ed uno solo iperpiano passa per α, β ed un punto O assegnato; quindi, su V_7 , si può costruire un sistema birazionale, d'indice 1, di varietà V_4^{42} , con punto base semplice A . E poichè la V_4^{42} generica è unirazionale in $K(A)$, risulta che V_7 è anch'essa unirazionale in $K(A)$.

(5) F. ENRIQUES, «Math. Annalen», 49, 1 (1897).

(6) G. CASTELNUOVO, «Atti Acc. Torino», 25, 695 (1890).

(7) G. FANO, «Comm. Math. Helvetici», 14, 203 (1941).

4. Abbiamo finora investigato soltanto l'ipotesi $2k > r$; in questo caso, come in quello generale, un passo essenziale della dimostrazione consiste nel determinare la varietà V_{r-k} ; e quindi sorge la domanda se, per $2k \leq r$, l'esistenza di quest'ultima possa venir accertata da una semplice conoscenza del sistema Σ . Qui ci limiteremo all'ipotesi $k = 1$ (la quale, per $r = 2$, è stata indagata da Castelnuovo) indicando come si possano trovare condizioni sufficienti per il successo del metodo e lasciando a parte, almeno per ora, altre considerazioni d'indole generale.

Se $k = 1$, il luogo di Q è una curva V_1 , irriducibile e birazionale, la quale può passare o non passare per P . Ripetendo, come al n. 1, la costruzione per ogni posizione P' di P su V_1 , otteniamo una curva la quale supporremo variabile ⁽⁸⁾ con P' ; tale curva genera una superficie V_2 , unirazionale in $K(P)$. Di nuovo ripetiamo la costruzione per ogni posizione P'' di P su V_2 ; e supporremo che si ottenga un sistema ∞^2 di curve V_1 generatrici d'una V_3 , la quale risulta unirazionale in $K(P)$. Continuando così passo per passo, con una serie di ipotesi opportune, verremo a costruire una V_{r-1} , unirazionale in $K(P)$, ai singoli punti $P^{(r-1)}$ della quale saranno collegate ∞^{r-1} curve $\{V_1\}$, unirazionali in $K(P^{(r-1)})$. Risulta che V_r è unirazionale in $K(P)$ ed ivi rappresentabile sopra una I_v , ove v è l'indice del sistema $\{V_1\}$.

5. Quale illustrazione del metodo, consideriamo una forma quartica Φ_r^4 ($r \geq 3$) contenente una rigata R^n ($n > 1$), irriducibile, birazionale e semplice per Φ_r^4 . Se la forma non contiene nessuna varietà multipla di dimensione $r-1$, per il suo punto P generico passa un sistema ∞^1 birazionale di cubiche piane generali; le loro tangenti in P sono generatrici di un cono K_2 , giacente nell' S_r tangente a Φ_r^4 in P , il quale interseca il cono K_{r-1}^2 delle tangenti aventi in P un contatto tripunto in un certo numero $v > 1$ di rette. Risulta che la curva V_1 del n. 4 passa per P con la molteplicità v . Seguendo ora la via tracciata nel precedente paragrafo, si perviene a costruire un sistema ∞^{r-1} di curve V_1 mediante il quale si ottiene una rappresentazione unirazionale di Φ_r^4 .

6. Le considerazioni già svolte possono applicarsi a certe varietà sulle quali il sistema Σ di curve ellittiche viene sostituito da un sistema di curve iperellittiche. Difatti, siccome in quel caso i vari punti Q coniugati a P nelle serie g_2^r sulle curve $\{C\}$ passanti per P vengono determinati razionalmente, basta all'uopo che Q sia variabile con C . Questa circostanza non si verifica, ad esempio, nel caso dell' S_r doppio ($r > 2$) con forma sestica generale di diramazione, ove tutte le ∞^{r-1} curve C passanti per P passano di conseguenza per il coniugato Q nell'involuzione I_2 definita sopra la varietà; quindi il problema dell'unirazionalità o meno dell' S_r doppio dev'esser affrontato con altri mezzi.

(8) Quest'ipotesi è senz'altro verificata se V_1 passa per P con una certa molteplicità.

Geometria algebraica. — *Observations sur une Note de M. Nollet.*

Nota (*) di BERNARD D'ORGEVAL, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

M. Nollet (1) vient récemment d'obtenir des résultats fort intéressants sur les surfaces algébriques dont le système canonique est composé au moyen d'un faisceau.

Reprenant les notations de M. Nollet on suppose que le système canonique:

$$K = f + mE$$

f étant une partie fixe et E appartenant à un faisceau $\{E\}$. Si les genres et degrés virtuels sont π et ν pour f , p et n pour E , k la multiplicité totale virtuelle d'intersections de f et E , on a les relations:

$$(I) \quad 2\pi - 2 - \nu = \nu + mk$$

$$(II) \quad 2p - 2 - n = k + mn \geq mn$$

$$(III) \quad p^2 - 1 = 2\pi - 2 - \nu + m(2p - 2 - n) \geq m(2p - 2 - n) \geq nm^2$$

qui liées à l'inégalité de Severi (2)

$$(IV) \quad p^2 \leq 10p_g - 8q + 11 - \rho$$

donnent au cas de $n > 0$ (faisceau linéaire)

$$(V) \quad m = p_g - 1$$

$$(VI) \quad nm^2 - 10m + 8q - \rho + 20 \leq 0$$

$$(VII) \quad n(8q + \rho - 20) \leq 25$$

$$(VIII) \quad m \leq \frac{1}{2}(5 + \sqrt{25 - n(8q + \rho - 20)})$$

d'où M. Nollet déduit

$$(IX) \quad n \leq 9, \quad q \leq 5$$

et il montre de plus que q ne peut égaler 5. Le but de cette petite note est de montrer que l'hypothèse $q = 4$ conduit également à contradiction.

Montrons d'abord que l'hypothèse $q = 4$ exige $n = 1$. Si $n \geq 3$ on tire de (VIII):

$$12 \leq 40 - (8q + \rho)$$

$$q \leq 3.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1950.

(1) L. NOLLET, *Généralités sur les surfaces algébriques dont le système canonique est composé au moyen d'un faisceau*. « Ac. R. Belg. Bul. Cl. Sc. », ser. 5^a, t. XXXV, p. 1016 (1949).

(2) F. SEVERI, *Osservazioni a proposito della Nota di Erich Kähler...* « R. C. Circ. Mat. Palermo », LVI (1932).

Si $n = 2$, on tire de (IV):

$$8q + \rho \leq \frac{65}{2} - 2 \left(m - \frac{5}{2} \right)^2$$

$$q \leq 3.$$

Faisons alors $n = 1$, on doit avoir

$$m^2 - 10m + 12 + \rho \leq 0$$

$$8 \geq m \geq 5.$$

Les seuls cas possibles sont donc:

a) $p_g = 9$

b) $p_g = 8$

c) $p_g = 7$

d) $p_g = 6.$

Etudions chacun de ces cas en remarquant, comme M. Nollet le fait pour éliminer $q = 5$, que l'adjoint $|E'|$ de $|E|$ est régulier de dimension

$$p_a + p - 1 \geq p_g$$

d'où

$$p \geq q + 1 = 5.$$

La relation (III) nous donne

$$m^2 \leq m(2p - 2 - n) \leq p^{(1)} - 1 \leq 10m - 12 - \rho$$

c'est à dire

a) $64 \leq 8(2p - 2 - 1) \leq 68 - \rho$

b) $49 \leq 7(2p - 2 - 1) \leq 58 - \rho$

c) $36 \leq 6(2p - 2 - 1) \leq 48 - \rho$

d) $25 \leq 5(2p - 2 - 1) \leq 38 - \rho.$

$2p - 3$ est un entier impair ≥ 7 dont le multiple par m est compris entre certaines limites. Le cas a) est impossible; les autres cas donnent $p = 5$ et:

b) $49 \leq p^1 - 1 \leq 58 - \rho$

c) $42 \leq p^1 - 1 \leq 48 - \rho$

d) $35 \leq p^1 - 1 \leq 38 - \rho.$

Dans le cas d), on a par (I):

$$2\pi - 2 - \nu = \nu + 10$$

$$\nu = \pi - 6$$

$$p^1 - 1 = 39 + \pi \geq 38 - \rho$$

qui est impossible.

Dans le cas *b*) la courbe f est fondamentale pour le faisceau $|E|$, sans passer au point-base; il existe donc une E_0 telle que

$$E_0 = f + f' \\ 1 = v + (ff') + v'.$$

On ne peut avoir $\pi = 0$, $v = -1$ car la courbe serait exceptionnelle et on suppose que le modèle adopté est dépouillé de ses courbes exceptionnelles; il en résulte que $(ff') < 0$ mais alors la courbe $f + f'$ n'est pas connexe contrairement au fait qu'elle appartient à un faisceau de courbes irréductibles de degré 1⁽³⁾.

Dans le cas *c*) on peut distinguer deux cas ou la courbe f passe au point base et est fondamentale pour le faisceau ou c'est une unisécante rationnelle du faisceau. Si elle est unisécante, on a

$$v = -4.$$

Elle est isolée par rapport à l'équivalence car si elle appartenait à un faisceau irrationnel il serait de genre 5 supérieur à l'irrégularité; f possède donc une composante irréductible rationnelle dont l'adjoint doit être régulier⁽⁴⁾ mais ceci entraînerait que son genre soit supérieur à 4 d'où contradiction.

Si elle passe au point-base et est fondamentale pour le faisceau il existe E_0 telle que

$$E_0 = f + f'.$$

L'appartenance à un faisceau de degré 1 exige $(ff') = 0$ d'où résulte

$$2\pi - 2 - v = 7 \\ 49 \leq p^1 - 1 \leq 48 - \rho$$

donc impossibilité.

Meccanica. — *Sul carico critico di una piastra compressa oltre il limite elastico.* Nota^(*) di PLACIDO CICALA, presentata dal Socio M. PANETTI.

1. In una precedente Nota⁽¹⁾ si presentarono le espressioni che, in base alla teoria di Batdorf e Budiansky⁽²⁾, permettono di calcolare l'incremento di deformazione prodotto da piccole variazioni dello stato di tensione nell'intorno di una condizione base, corrispondente a tensione uniassica sorpassante il limite di proporzionalità σ_p . Utilizzando i risultati a cui quelle equazioni conducono, si esa-

(3) A. FRANCHETTA, *Sulle curve riducibili appartenenti ad una superficie algebrica*. « R. C. Mat. e appl. », ser. V, vol. VIII, fasc. 3-4, p. 378 (1949).

(4) A. FRANCHETTA, *Sul sistema aggiunto ad una curva riducibile*. « R. C. Acc. Naz. Lincei », ser. 8^a, t. VI, p. 685 (1949).

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1950.

(1) *Sulle deformazioni plastiche* in questi « Rendiconti », vol. VIII, fasc. 6, pp. 583-586 (1950).

(2) *A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip*. « N. A. C. A. Tec. Note », N. 1871, aprile 1949.

mineranno qui le configurazioni di equilibrio che può assumere, fuori del suo piano iniziale, una striscia di lamiera avente un bordo libero e gli altri lati appoggiati, soggetta a compressione nella direzione della sua lunghezza.

2. Nella condizione base agisca solo la tensione σ secondo l'asse z della terna ortogonale x, y, z . Nella deformazione successiva lo scorrimento plastico γ''_{xz} subisce un incremento che, secondo la teoria menzionata si scrive

$$(1) \quad \delta \gamma''_{xz} = \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_{\Omega} \frac{\partial \tau^*}{\partial \tau_{xz}} \delta F \cos \varphi d\beta d\varphi$$

dove τ^* è la tensione tangenziale su un piano di normale n , in una direzione che fa un angolo β col piano nz , la direzione di n essendo definita dall'angolo φ che essa forma con z e dall'angolo α che il piano nz forma con y ; F è una funzione di τ^* , propria del materiale, δF il suo incremento (nullo se $\delta \tau^* < 0$) e infine Ω il campo di integrazione i cui limiti sono definiti dall'equazione

$$(2) \quad \cos \beta \sin 2\varphi = \cos \mu = \sigma_p / \sigma.$$

Se la variazione dello stato di tensione è costituita dagli incrementi $d\sigma_x$ e $d\tau_{xz}$, si ottiene dalla (1)

$$(3) \quad \frac{d\gamma''_{xz}}{d\tau_{xz}} = \int_{\Omega} \frac{dF}{d\tau^*} H^2 K \cos \varphi d\beta d\varphi$$

essendo

$$(4) \quad H^2 = \sin^2 \beta \sin^2 \varphi + \cos^2 \beta \cos^2 2\varphi$$

$$(5) \quad K = \frac{\pi}{2} + \lambda + \frac{1}{2} \sin 2\lambda$$

$$(6) \quad \sin \lambda = \frac{1}{2H} \frac{d\sigma_z}{d\tau_{xz}} \cos \beta \sin 2\varphi$$

ed assumendosi come segno di $d\tau_{xz}$ quello di σ .

Se il secondo membro della (6) è < -1 , deve scriversi $K = 0$; se esso è > 1 , deve scriversi $K = \pi$. Invertendo il segno di $d\sigma_z/d\tau_{xz}$ si passa da un valore di K al suo supplemento $\pi - K$; perciò, essendo conosciuto il valore della espressione (3) per $K = \pi$, rappresentato dall'integrale J_3 della Nota precedente, basterà effettuare il calcolo di detta espressione per valori di $d\sigma_z/d\tau_{xz}$ compresi fra $-2 \tan \mu$ e zero.

L'equazione (3) vale nella condizione iniziale, per la quale si calcola $dF/d\tau^*$ in base al valore dell'argomento

$$\tau^* = \frac{\sigma}{2} \cos \beta \sin 2\varphi.$$

Per usare lo stesso valore in uno stato di tensione di componenti $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots, \sigma + \sigma_z$ si dovranno supporre i quozienti $\sigma_x/\sigma, \tau_{xy}/\sigma, \dots, \sigma_z/\sigma$ trascurabili di fronte all'unità e inoltre si dovrà ammettere che, nel processo di deformazione antecedente, la τ^* sia andata sempre crescendo in quelle direzioni nelle quali attualmente essa è in aumento.

I valori di $d\gamma_{xz}/d\tau_{xz}$ per $\sigma = 1,25 \sigma_p$, nella ipotesi che F sia funzione lineare di τ^* , sono rappresentati dalla linea AMB della fig. 1. I valori estremi,

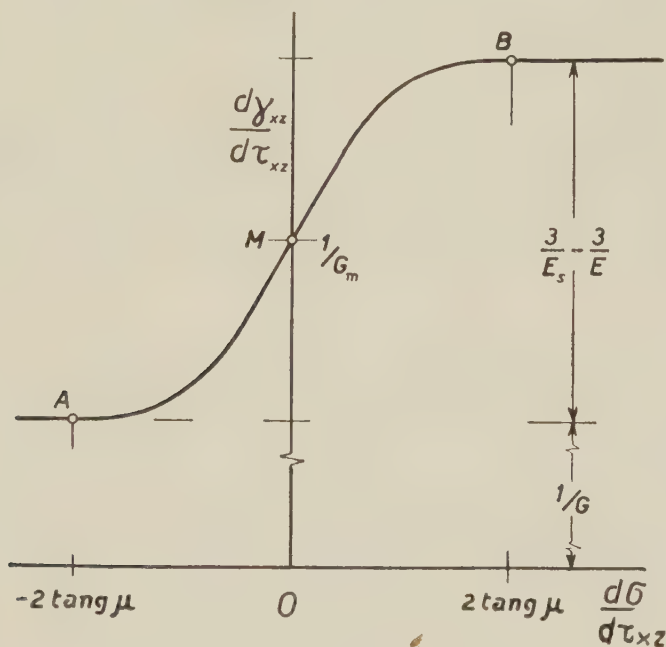


Fig. 1.

che si mantengono costanti da una parte e dall'altra del tratto AB, sono determinati dalle espressioni della Nota precedente; punti della curva intermedia furono calcolati dalla (3), mediante integrazioni numeriche.

3. Consideriamo una striscia rettangolare di lamiera, di spessore s e larghezza b , soggetta a compressione nella direzione z dei lati maggiori; uno di questi si suppone libero, mentre sul resto del contorno si ha appoggio continuo.

Si indicherà semplicemente con σ la tensione $\sigma + \sigma_z$, con τ la tensione tangenziale sulla sezione normale a z , con γ il relativo scorrimento.

Se la lunghezza L è sufficientemente grande rispetto a b , si può ammettere che, nella configurazione deformata della quale si esaminerà l'equilibrio, le sezioni trasversali ruotino senza deformarsi attorno allo spigolo appoggiato, sicché l'azione instabilizzante del carico di compressione viene contrastata solo dalla rigidità torsionale della striscia. Nel campo elastoplastico l'analisi della configurazione di equilibrio risulta particolarmente complessa per il fatto che il modulo

tangenziale, dipendendo dal quoziente degli incrementi $d\sigma$ e $d\tau$, varia, come quest'ultimo, da un punto all'altro della piastra. Limitando l'analisi ad una indagine qualitativa del fenomeno, si supporrà che il quoziente τ/γ , pur variando durante la deformazione, assuma lo stesso valore in tutti i punti. In questa ipotesi, se la piastra è inizialmente piana, l'angolo ϑ di torsione di una sezione z potrà esprimersi nella forma

$$(7) \quad \vartheta = \vartheta_m \sin(\pi z/L)$$

con ovvie notazioni; inoltre risulterà ⁽³⁾

$$(8) \quad \sigma = \tau s^2/\gamma b^2.$$

Il quoziente τ/γ potrà essere determinato secondo l'analisi precedente, in base allo stato di tensione in un punto della zona più sollecitata, come quella che più influisce sulla configurazione della piastra deformata. Se si sceglie questo punto sul contorno della sezione estrema deve scriversi

$$(9) \quad \gamma = \pi \vartheta_m s/L.$$

Posto

$$(10) \quad u = \sqrt{d\tau/d\sigma} \quad v = \sqrt{d\tau/d\gamma}$$

si ha dalla (8)

$$(11) \quad \frac{\gamma}{u^2} + \frac{\sigma}{v^2} = \frac{s^2}{b^2}.$$

Quindi, eliminando γ fra le (10) e (11), e risolvendo si ottiene

$$(12) \quad \sigma = \frac{s^2 v}{b^2 u} \int^u v du$$

il limite inferiore dell'integrale essendo definito dalle condizioni all'inizio della deformazione. Siccome i grafici del tipo della fig. 1 forniscono v come funzione di u , l'equazione (12) insieme con la espressione di γ che si ottiene mediante la (11), permette di stabilire in forma parametrica la relazione fra σ e γ .

4. La soluzione risulta particolarmente evidente se si sostituisce con un segmento di retta il diagramma della fig. 1, nel tratto compreso fra le due orizzontali estreme, ossia se si scrive in quello intervallo

$$(13) \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{1}{G_m} \left(1 + k \frac{d\sigma}{d\tau} \right).$$

In questo caso si ottiene

$$(14) \quad \gamma = \frac{ks^2}{b^2} \frac{\sigma - \sigma_0}{(G_m s^2/b^2) - \sigma}$$

(3) Cfr. P. CICALA, *On Plastic Buckling of a Compressed Strip*. « Journal of the Aeron. Sciences », 1950.

essendo σ_0 il valore di σ per il quale ha inizio la deformazione. Tenendo presente il limite superiore di validità della (13), si trova che σ_0 non può essere inferiore a $G_s s^2/b^2$ essendo

$$\frac{1}{G_s} = \frac{1}{G} + \frac{3}{E_s} - \frac{3}{E}$$

(E, G moduli elastici normale e tangenziale, E_s modulo secante). Con procedimento analogo a quello seguito a proposito della inflessione laterale delle aste corte⁽⁴⁾, si può dimostrare che la più piccola irregolarità iniziale della piastra è sufficiente per produrre deformazioni apprezzabili appena la tensione raggiunga il valore $G_s s^2/b^2$. A partire da questo punto le deformazioni di torsione vanno progressivamente crescendo mentre aumenta il carico assiale. Si presenta qui un fenomeno identico a quello indicato da Shanley⁽⁵⁾ per il cedimento delle aste compresse in campo elastoplastico. Crescendo la deformazione, si riscontra un progressivo aumento della rigidità del materiale e la tensione assiale d'equilibrio tende verso il valore $G_m s^2/b^2$.

5. Fra i problemi di stabilità della piastra compressa, il caso qui considerato è quello per il quale si sono riscontrate le maggiori discordanze fra l'esperimento, che indica tensioni critiche prossime al valore $GE_s s^2/Eb^2$ e la teoria incrementale della deformazione plastica (Reuss) che conduce al valore $G_s s^2/b^2$ ⁽⁶⁾. L'indagine qui accennata si vale di due sostanziali semplificazioni: il comportamento del materiale viene esaminato nell'intorno della condizione dalla quale ha inizio la deformazione che porta la piastra fuori dal suo piano; inoltre si suppone che il quoziente τ/γ abbia lo stesso valore in tutti i punti⁽⁷⁾. D'altra parte una ricerca di maggiore rigore appare ancora prematura, dato lo scarso controllo sperimentale della teoria sulla quale essa poggia. L'analisi effettuata permette di concludere che il carico per il quale inizia la deformazione trasversale della piastra, calcolato sulla base della teoria di Batdorf-Budiansky, concorda coi valori sperimentali; che, crescendo la deformazione, la resistenza della piastra cresce senza però raggiungere il valore voluto dalla teoria incrementale.

(4) P. CICALA, *Column Buckling in the Elastoplastic Range*, « Journal of the Aeron. Sciences ».

(5) F. R. SHANLEY, *Inelastic Column Theory*. « Journal of the Aeron. Sciences », maggio 1947, p. 261.

(6) Vedasi, ad esempio, l'importante lavoro di P. BIJLAARD, *Theory and Tests on the Plastic Stability of Plates and Shells*. « Journ. Aeron. Sciences » settembre 1949. Senza uscire dalla teoria di Reuss si può dare una spiegazione plausibile dei bassi carichi critici sperimentali, considerando gli effetti delle irregolarità iniziali della piastra. Solo rilevando sperimentalmente il processo di evoluzione delle deformazioni si potrebbe decidere se la teoria di Reuss sia adeguata o meno a rappresentare il comportamento del materiale.

(7) Si potrebbe migliorare l'approssimazione dividendo il corpo in zone in ciascuna delle quali τ/γ si ritenga costante. Peraltro lo studio della pressoflessione delle aste corte ha mostrato che l'approssimazione del tipo qui usato conduce a risultati del tutto soddisfacenti.

Astronomia. — *L'eliomeridioscopio*. Nota (*) di GAETANO VINACCIA, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Tra i ritrovati della moderna urbanistica scientifica c'è quello della razionale ed esatta orientazione solare ed eolica delle strade, delle piazze e dei fabbricati.

Il grado di esattezza necessario a tali orientazioni è dato dal bisogno di soleggiare le facciate settentrionali per le quali basta una piccola deviazione verso nord per togliere loro Sole per un cospicuo numero di giorni nella stagione invernale (1).

Dopo avere calcolato con tale esattezza le orientazioni, nel passare all'atto pratico, occorre con pari esattezza procedere ai tracciati relativi sul terreno.

Operazione fondamentale di questi tracciati geometrici è la determinazione del meridiano geografico, cioè del punto nord.

Generalmente ci si avvale per tale determinazione della bussola obliando che essa dà solo la direzione del meridiano magnetico, che a seconda dei luoghi può differire notevolmente da quello geografico.

Quando anche l'operatore si sovvien che l'indicazione della bussola deve essere corretta della declinazione magnetica locale, egli ne va in cerca in uno dei tanti libri di fisica e prende per buona quella che vi è riportata, sebbene, si riferisca a molti anni addietro e perciò differisca notevolmente da quella attuale.

Aggiungasi che le zone di anomale declinazione magnetica non sono infrequenti e che in esse la declinazione magnetica può assumere a breve distanza valori anche a 180° con quella del meridiano geografico.

Il problema di determinare con esattezza il meridiano geografico è maggiormente sentito in campagna e nei luoghi per i quali non esistono carte topografiche, come possono essere le zone da colonizzare.

Da quanto è stato detto, credo sia evidente l'utilità di avere un strumento universale di topografia celere, che, con sufficiente precisione dia la direzione del meridiano geografico e conseguentemente la conoscenza della declinazione magnetica locale che permette l'uso sicuro della bussola topografica.

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1950.

(1) Il ritardo di data dell'inizio dell'insolazione di una facciata settentrionale orientata di un grado di azimut di più di quello del sorgere solstiziale d'inverno, porta alle seguenti riduzioni del soleggiamento

| Lat. | 0° | giorni | 33 |
|------|------------|--------|----|
| » | 10° | » | 32 |
| » | 20° | » | 28 |
| » | 30° | » | 26 |
| » | 40° | » | 24 |
| » | 50° | » | 21 |
| » | 60° | » | 19 |

L'eliomeridioscopio.

L'eliomeridioscopio può considerarsi un istrumento di topografia celere, meglio di geometria pratica, studiato per dare a mezzo del Sole direttamente, senza bisogno di calcoli astronomici, in qualunque luogo della terra (e perciò dall'uno

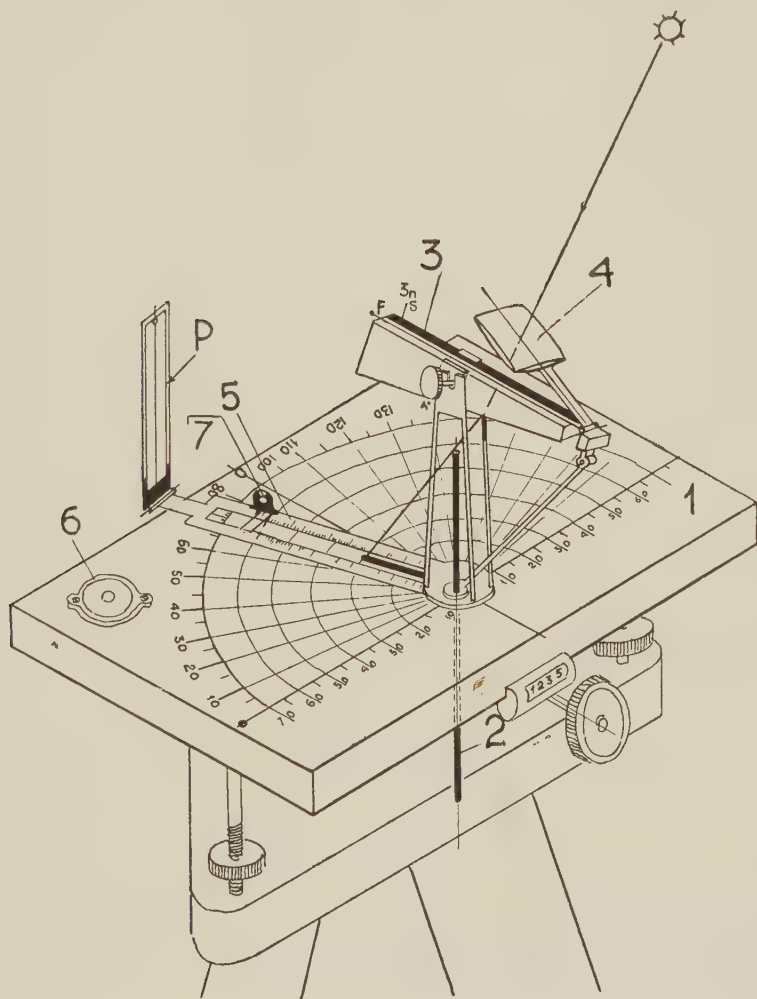


Fig. 1 — L'Eliomeridioscopio.

1: Quadrante. 2: Stilo mobile verticale. 3: Prisma deviatore e amplificatore goniometrico. 4: Condensatore lenticolare luce solare. 5: Indice di misura dell'azimut e dell'altitudine del Sole. 6: Livella sferica. P: Pinnula.

all'altro polo) in qualunque epoca, la direzione del meridiano geografico con la stessa approssimazione che, per pari grandezza, dà la bussola quello magnetico.

A questa sua prerogativa l'istrumento deve il suo nome di eliomeridioscopio. L'istrumento si basa sui seguenti due principî di astronomia sferica:

1° Per archi orari uguali, la posizione antimeridiana e pomeridiana apparente del Sole è simmetrica rispetto al meridiano ed ha eguale altezza ed azimut (fig. 2).

Siccome la lunghezza dell'ombra di uno stilo verticale su un quadrante orizzontale è funzione dell'altezza del Sole, ne consegue che ad altezze solari uguali corrispondono lunghezze d'ombra eguali. Perciò le estremità delle ombre si trovano su uno stesso cerchio che ha per centro l'asse dello stilo, e che perciò prende il nome di *cerchio di altezza*.

2° Il sole culmina al suo passaggio in meridiano; cioè ha in quell'istante la massima altezza giornaliera. Conseguentemente la lunghezza dell'ombra dello

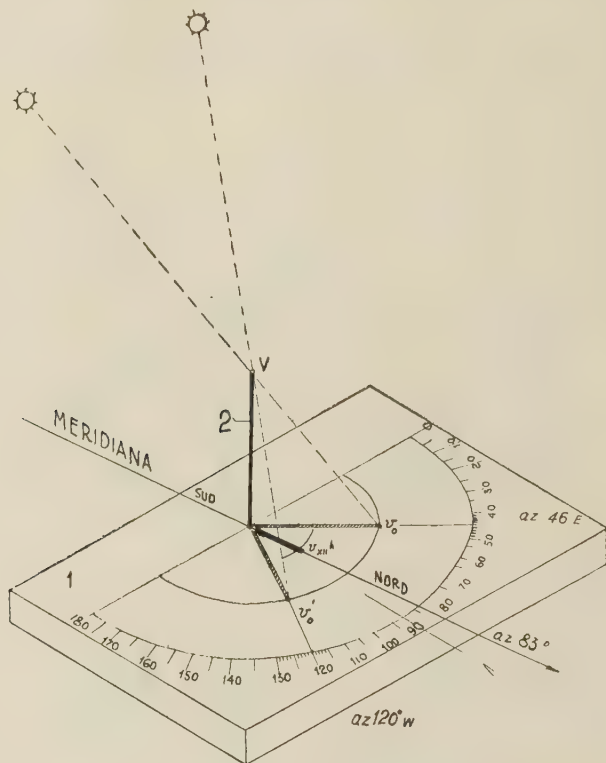


Fig. 2. - Principio astronomico dell'eliomeridiuscopio.

stilo verticale è la minima del giorno (fig. 2). Quando ciò si verifica la direzione dell'ombra è quella meridiana, e in quello istante è mezzodì vero.

L'istrumento si compone di cinque parti:

- il quadrante orizzontale (1)
- lo stilo verticale (2)
- l'indice di misura azimutale e di altezza (5)
- il prisma deviatore ed amplificatore (3)
- il condensatore di luce (4).

IL QUADRANTE (figg. 1-2-4). - Il quadrante costituisce la parte fondamentale dell'istrumento.

Esso è piano e collegato al treppiede mediante un supporto sferico o mediante un ordinario supporto per istrumenti topografici avente viti di livellamento.

Il quadrante deve essere disposto orizzontalmente, a tal fine porta una livella sferica (6) (figg. 1-4).

Sul quadrante sono segnati i cerchi di altezza, una graduazione da 0° a 90° nei due sensi, o da 0° a 180° da sinistra a destra, cioè nella direzione dello spostarsi delle ombre nel moto apparente del Sole.

LO STILO VERTICALE (figg. 1-2-3). — Lo stilo verticale (2) è cilindrico; è mobile verticalmente per cui lo si può alzare ed abbassare a volontà.

La variazione di altezza è necessaria:

a) per dare allo stilo l'altezza più conveniente per differenziare la lunghezza delle ombre durante il tempo dell'osservazione. Precisamente per dare la massima altezza allo stilo quando per essere il Sole molto alto le ombre sono corte; per abbassare lo stilo quando il Sole è poco alto allo scopo di contenere l'ombra dello stilo nel quadrante;

b) per far coincidere l'ombra della sommità dello stilo esattamente con uno dei cerchi di altezza del quadrante;

c) per dare allo stilo l'altezza corrispondente ad una delle scale di altezza segnate sull'indice 5 (figg. 1-4);

d) per far discendere lo stilo nella guaina onde ridurne l'ingombro e meglio conservarlo quando l'istrumento è smontato.

Il movimento verticale dello stilo è comandato da una vite (figg. 1-4) connessa ad adatti ruotismi.

L'altezza dello stilo può rilevarsi direttamente oppure a mezzo di un contagiri.

Il grado di precisione dell'istrumento dipende principalmente dalla esattezza della determinazione della posizione dell'ombra della sommità dello stilo sul quadrante.

Lo stilo è cilindrico circolare retto; l'ombra della sua sommità è un cerchio, il cui punto estremo (cioè più lontano dallo stilo) si trova costantemente sull'intersezione dell'ombra dell'asse dello stilo con quella del detto cerchio.

Siccome l'ombra della base superiore dello stilo è tanto più netta quanto essa è meno lontana dallo stilo, riducendo l'altezza dello stilo si può aumentare l'intensità dell'ombra.

Siccome le ombre sono tanto più forti quanto più intensa è la luce torna utile l'uso di un condensatore lenticolare (4) sovrapposto allo stilo e del quale si parlerà in appresso.

L'altezza massima da dare allo stilo per valutare con la sua ombra una differenza di altezza del Sole di $10'$ (da 90° a $89^\circ 50'$), supponendo che sia apprezzabile ad occhio nudo una distanza di $0,25$ mm. — *è di mm. 85,95.* Perciò con una altezza dello stilo di mm. 100 tale valutazione sarà ancora migliore.

L'altezza minima da dare allo stilo per far sì che la sua ombra cada nel quadrante di 100 mm. di raggio, quando il Sole ha una altezza di 6° (tale altezza si ha alla lat. 60° N, al solstizio d'inverno, alle ore $10^h 30^m$ e $13^h 30^m$) *è di mm. 10,5.*

Perciò all'atto pratico bastano due altezze dello stilo, una di 100 mm. e l'altra di 10 mm.

L'INDICE DI MISURA DELL'AZIMUT E DELL'ALTEZZA DEL SOLE (figg. 1-4).

L'indice serve per la misura dell'azimut del Sole. Esso è imperniato nello stilo e può ruotarvi intorno.

L'indice porta una finestra nel cui mezzo viene a cadere l'ombra dello stilo, che essendo più stretta della finestra appare tra due strisce di luce (fig. 4).

La finestra si può allargare in corrispondenza della graduazione per meglio leggerla.

L'indice può terminare con una lamina a coltello, con un ago, con un nonio.

Lateralmente alla finestra, sull'indice sono segnate due scale eclimetriche, corrispondenti alle due altezze dello stilo. Una di queste scale serve per la misura del sole alto, l'altra del sole basso. Per la lettura di queste scale serve l'indice scorrevole 7 (fig. 1).

L'indice azimutale si può trasformare con l'aggiunta della pinnula P in un'alidada (fig. 1) dove le due scale eclimetriche si congiungono nel mezzo (fig. 4).

IL PRISMA DEVIATORE E AMPLIFICATORE GONIOMETRICO (figg. 1-3).

La funzione di questo prisma è triplice:

a) deviare i raggi solari per allungare le ombre dello stilo date dal Sole circumzenitale (estivo o intertropicale) in modo da poterne segnare con precisione l'azimut;

b) deviare i raggi solari per accorciare le ombre dello stilo date dal Sole poco alto sull'orizzonte, così da contenerla nel quadrante;

c) amplificare le differenze di altezza dei raggi solari, per meglio differenziare in lunghezza le ombre dello stilo durante il rilevamento. Tale differenziazione, ripeto, è necessaria sia per differenziare i cerchi di altezza corrispondenti ai diversi azimut, come per individuare l'altezza meridiana.

Il prisma è triangolare con la punta smussata; esso viene anteposto allo stilo rispetto al Sole. Il prisma si può inclinare a volontà come pure ruotare sull'asse dello stilo per poter seguire con l'indice il corso del Sole.

Per determinare il piano verticale di rifrazione, sulla faccia superiore e su quella inferiore del prisma sono incise in mezzzeria due linee di fede (FF , F_1 , F_2) le cui ombre sul quadrante devono coincidere e dimezzare quella dello stilo.

Per meglio determinare il piano verticale di rifrazione, la faccia superiore del prisma viene schermata longitudinalmente per una parte (meno della metà), mentre quella inferiore per l'opposta, così da lasciare attraverso questi due schermi, il passaggio alla radiazione solare (fig. 3 VI-D-P). In tal modo oltre a determinare una lama di luce assiale allo stilo, si creano opportune zone di ombra laterali che facilitano la lettura delle scale eclimetriche.

Per allungare le ombre dello stilo (quando il Sole è alto) il prisma rivolge la sua punta verso il Sole, mentre quando deve accorciarle ne rivolge la base.

L'amplificazione delle variazioni angolari dell'altezza del Sole è funzione dell'angolo del prisma e di quello di incidenza dei raggi solari.

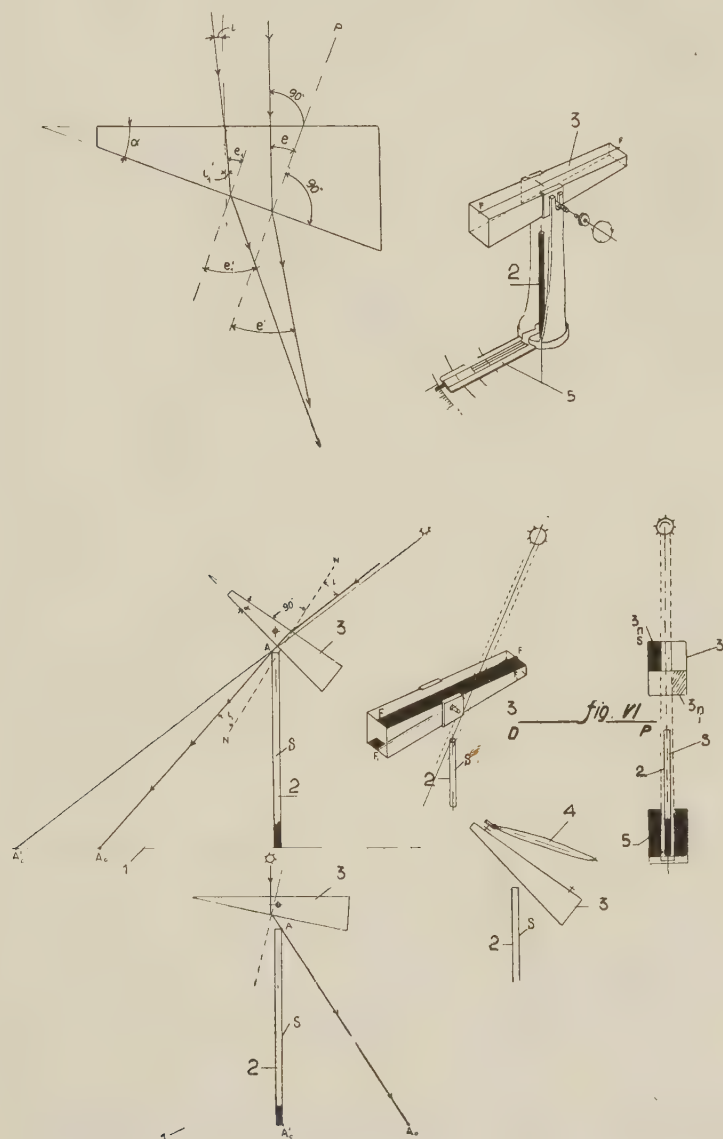


Fig. 3. - Il prisma deviatore ed amplificatore.

Il prisma porta sulle due faccie verticali laterali due piastrine portanti due perni per la rotazione verticale. Questi piccoli perni poggiano sulle forchette del supporto girevole intorno allo stilo (fig. 3).

Un bottone a vite ferma il prisma nell'inclinazione prescelta, che deve essere mantenuta durante tutto il rilevamento.

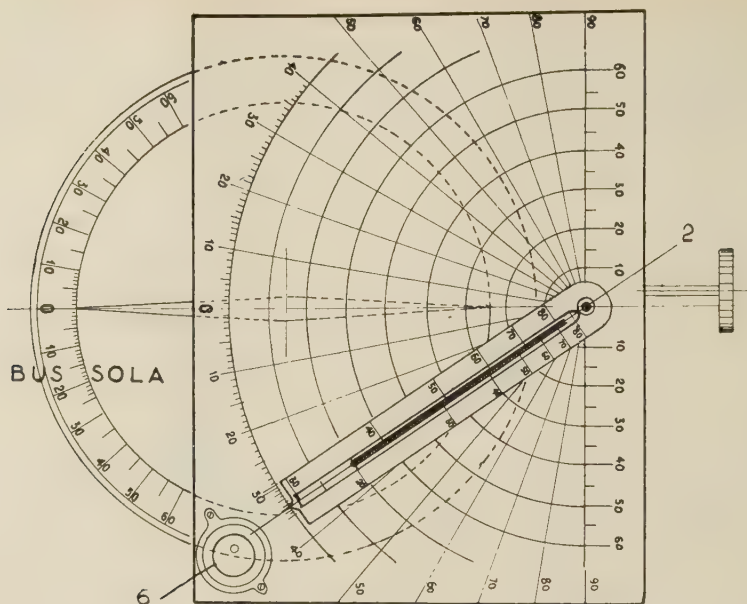


Fig. 4. - L'eliomeridiscopio congiunto ad una bussola magnetica.

IL CONDENSATORE LENTICOLARE DI LUCE (figg. 1-3). - Per aumentare l'intensità della luce solare e rendere più forti e nette le ombre dello stilo si può anteporre allo stilo stesso una lente biconvessa o piano convesso a grande raggio di curvatura che concentra i raggi solari che investono la sommità dello stilo.

La lente condensatrice può essere portata da un supporto infilato nello stilo, oppure congiunto al prisma amplificatore sino a formare un tutto uno con esso.

USO DELL'ISTRUMENTO

Ricerca del meridiano geografico. - Circa una o due ore prima del mezzogiorno si piazza l'istrumento ben livellato, con la parte del quadrante destinata a ricevere l'ombra dello stilo, verso nord.

Indi si manovra lo stilo in modo da dargli l'altezza necessaria per far cadere l'ombra della sommità dello stilo esattamente su uno dei cerchi concentrici. Si legge e si annota l'azimut relativo. Senza più toccare lo stilo si segue il cammino dell'ombra sul quadrante, sia tracciandola materialmente con la punta della matita, sia annotando gli azimut dei vari passaggi dell'ombra sui cerchi di altezza, sino ad arrivare al cerchio di altezza sul quale era stata fatta la prima osservazione.

I punti d'ombra rilevati potranno risultare appaiati, allora la media degli azimut darà quello del meridiano. Se i punti d'ombra invece sono dispari, quello che non ha il suo corrispondente (simmetrico) appartiene al meridiano.

Come è stato detto già, qualora il Sole sia alto e le differenze di altezza siano conseguentemente piccole occorre inserire il prisma con il vertice rivolto

verso il Sole manovrandolo in modo da ottenere la massima amplificazione. Trovata l'inclinazione adatta, questa viene bloccata così da conservarla per tutta la durata dell'osservazione.

Qualora invece il Sole sia poco alto sull'orizzonte e l'ombra esca fuori del quadrante si farà ruotare di 180° il prisma onde far rivolgere la base verso il Sole.

Per tracciare meglio il corso dell'ombra dello stilo e conservare il rilievo si potrà sovrapporre al quadrante uno di carta stampata acconciamente fissabile.

Misura dell'altezza del Sole. — Come è stato già detto precedentemente l'indice porta due scale eclimetriche, corrispondenti a due precise altezze dello stilo. Perciò qualora si voglia procedere anche al rilievo delle altezze del Sole occorre scegliere la scala eclimetrica e in base ad essa dare allo stilo l'altezza corrispondente.

Per la misura solare dell'altezza lo stilo deve essere adoperato senza la sovrapposizione del prisma, però può essere usata la lente condensatrice della luce.

L'altezza del Sole viene letta direttamente sulla scala eclimetrica spostando convenientemente l'indice.

Questo modesto strumento di geometria pratica può dare direttamente:

la direzione del meridiano geografico locale;

l'ora vera meridiana;

l'altezza meridiana del Sole;

l'azimut e l'altezza del Sole in due passaggi di uguale angolo orario.

Conseguentemente può dare:

la *latitudine* del luogo in funzione:

a) dell'altezza meridiana e della *declinazione* solare del giorno del rilevamento;

b) dell'azimut e dell'altezza del Sole in due passaggi consecutivi uno antimeridiano e l'altro pomeridiano di uguale angolo orario;

la *longitudine* del luogo in funzione:

dell'ora media di Greenwich (o di altro meridiano) segnata dall'orologio dell'osservatore nel momento del passaggio in meridiano del Sole;

dell'equazione del tempo medio.

la *declinazione magnetica locale* qualora l'istrumento sia accoppiato ad una bussola di declinazione.

Geodesia. — *Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque dello spazio.* Nota di ANTONIO MARUSSI, presentata (*) dal Socio G. CASSINIS.

1. In una mia precedente Nota ⁽¹⁾ si è considerato il trasporto delle coordinate geografiche e dell'azimut, della quota dinamica e della distanza zenitale fra punti a distanza finita appartenenti a due superfici equipotenziali diverse del campo di gravità terrestre, assumendo come linea di trasporto una geodetica dello spazio, e cioè una linea retta. Gli sviluppi ottenuti rappresentano una generalizzazione di quelli noti in Geodesia col nome di sviluppi di Legendre (od anche formule di Delambre), ed il loro interesse sta nel fatto che con questi sviluppi estesi nello spazio viene affrontato per una via diversa che non implica ipotesi suppletive il problema delle riduzioni al geoide; essi mostrano poi come possa essere sviluppato in tutta la sua generalità il problema della livellazione trigonometrica, ed affrontato il trasporto trigonometrico della quota dinamica e della distanza zenitale, che si presentano intimamente fuse con le coordinate geografiche e con l'azimut. Gli stessi sviluppi offrono inoltre una possibilità di determinare per via sperimentale i valori dei coefficienti che in essi figurano, i quali definiscono le caratteristiche del campo in esame.

Particolarizzando tale campo, ed assumendo ad esempio come riferimento quello normale di Somigliana, nella forma che ad esso è stata attribuita internazionalmente in seguito ai lavori ed alle proposte di Cassinis e di Silva, si potranno ottenere formule convenzionali particolarmente semplici, adatte al calcolo pratico.

Nella stessa Nota si è anche sottolineata la circostanza che è moderna tendenza quella di misurare in Geodesia grandi distanze non più lungo geodetiche di una superficie equipotenziale, come si faceva esclusivamente in passato; ma bensì lungo traiettorie ottiche (Geodimetro di Bergstrand) o di radioonde cortissime (Radar) nello spazio, traiettorie che in prima approssimazione si possono assimilare a delle linee rette, e cioè a delle geodetiche dello spazio.

Come ulteriore estensione di queste ricerche, si presenta il problema di generalizzare la curva di trasporto nello spazio, assumendo per questa una linea sgheмба qualunque; ciò che può avere appunto riflessi pratici, in quanto tale linea potrà ad esempio identificarsi con la traiettoria di microonde e di raggi ottici, quando si tenga conto della rifrazione dovuta alla presenza dell'atmosfera.

2. Nella Nota citata ⁽¹⁾ già si sono fornite le espressioni tensoriali del campo di gravità terrestre riferito alle coordinate y^1, y^2, y^3 , uguali rispettivamente alla

(*) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) A. MARUSSI, *Sviluppi di Legendre generalizzati nello spazio*. «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», vol. VIII, ser. VIII, 1 sem., fasc. 5, pp. 486-489 (1950).

latitudine geografica φ , alla longitudine λ , ed alla differenza di quota dinamica W misurata in unità di lavoro; ed a quelle relazioni ci si richiama, aggiungendo ancora le espressioni trovate per i simboli di Christoffel di seconda specie relativi a tali coordinate, quali risultano da altra mia Nota ⁽²⁾

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{\Delta} \left(D'' \frac{\partial D}{\partial \varphi} - 2 D' \frac{\partial D'}{\partial \varphi} + D' \frac{\partial D}{\partial \lambda} + D g h \cos \varphi \right);$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{\Delta} \left(D'' \frac{\partial D}{\partial \lambda} - D' \frac{\partial D''}{\partial \varphi} + D' g h \cos \varphi \right);$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{\Delta} \left(2 D'' \frac{\partial D'}{\partial \lambda} - D'' \frac{\partial D''}{\partial \varphi} - D' \frac{\partial D''}{\partial \lambda} + D'' g h \cos \varphi \right) - \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{\Delta} \left(D'' \frac{\partial D}{\partial W} - D' \frac{\partial D'}{\partial W} \right) \quad ; \quad \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{\Delta} \left(D'' \frac{\partial D'}{\partial W} - D' \frac{\partial D''}{\partial W} \right);$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{\Delta} \left(D'' \frac{\partial H_1}{\partial W} - D' \frac{\partial H_2}{\partial W} \cos \varphi + \frac{\partial \lg g}{\partial W} h \cos \varphi \right);$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{\Delta} \left(2 D \frac{\partial D'}{\partial \varphi} - D' \frac{\partial D}{\partial \varphi} - D \frac{\partial D}{\partial \lambda} + D g k \cos \varphi \right);$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\Delta} \left(D \frac{\partial D''}{\partial \varphi} - D' \frac{\partial D}{\partial \lambda} + D' g k \cos \varphi \right) + \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\Delta} \left(D' \frac{\partial D''}{\partial \varphi} - 2 D' \frac{\partial D'}{\partial \lambda} + D \frac{\partial D''}{\partial \lambda} + D'' g k \cos \varphi \right);$$

$$\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{\Delta} \left(D \frac{\partial D'}{\partial W} - D' \frac{\partial D}{\partial W} \right) \quad ; \quad \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{\Delta} \left(D \frac{\partial D''}{\partial W} - D' \frac{\partial D'}{\partial W} \right);$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{\Delta} \left(D \frac{\partial H_2}{\partial W} \cos \varphi - D' \frac{\partial H_1}{\partial W} + \frac{\partial \lg g}{\partial W} k \cos \varphi \right);$$

$$\Gamma_{11}^3 = -gD \quad ; \quad \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = -gD' \quad ; \quad \Gamma_{22}^3 = -gD'' \quad ; \quad \Gamma_{33}^3 = -\frac{\partial \lg g}{\partial W}$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = 0$$

dove

$$\Delta = DD'' - D'^2 \quad ; \quad H_1 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \lg g}{\partial \varphi} \quad ; \quad H_2 = -\frac{1}{g \cos \varphi} \frac{\partial \lg g}{\partial \lambda};$$

$$h = \frac{D'' H_1}{\cos \varphi} - D' H_2 \quad ; \quad k = D H_2 - \frac{D' H_1}{\cos \varphi}$$

e g rappresenta il modulo della gravità.

3. La curva σ di trasporto si supponga data mediante i seguenti suoi elementi; le coordinate $y_{(0)}^r$ di un suo punto P_0 , la tangente $t_{(0)}$ e la binormale $b_{(0)}$ in questo punto, la curvatura di flessione γ e la curvatura di torsione τ espresse in

(2) A. MARUSSI, *Fondements de géométrie différentielle absolue du champ potentiel terrestre*. « Bulletin Géodésique de l'Association Internationale de Géodésie », Nouvelle Série, n. 14, pp. 411-439, décembre 1949.

funzione dell'arco s contato a partire da P_0 . Il problema investe la determinazione delle coordinate y^r di un punto P qualunque situato ad una distanza finita s lungo σ , e della nuova posizione assunta in P dai versori \mathbf{t} (tangente) e \mathbf{b} (binormale). Come si vede, tale problema è ampliato rispetto a quelli risolti in precedenza, in quanto al trasporto delle coordinate geografiche e della quota, dell'azimut, e della distanza zenitale, si aggiunge ora quello dell'azimut e della distanza zenitale della binormale; e perciò gli elementi scalari da trasportare sono in numero di 6 fra di loro indipendenti, tanti quanti sono i gradi di libertà di un corpo rigido.

Indicando con $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ il triedro principale di σ , che supporremo destrorso, e con $\lambda^r, \nu^r, \beta^r$ le componenti controvarianti dei suoi versori

$$\lambda^r = \mathbf{t} \times \mathbf{v}^r = \frac{d\nu^r}{ds} \quad ; \quad \nu^r = \mathbf{n} \times \mathbf{v}^r \quad ; \quad \beta^r = \mathbf{b} \times \mathbf{v}^r$$

in cui le \mathbf{v}^r rappresentano i vettori reciproci, come è chiarito nella Nota ⁽¹⁾, le loro derivate intrinseche si scriveranno, per le formule di Frenet,

$$\frac{\delta \lambda^r}{\delta s} = \gamma \nu^r \quad ; \quad \frac{\delta \beta^r}{\delta s} = \tau \nu^r \quad ; \quad \frac{\delta \nu^r}{\delta s} = -\gamma \lambda^r - \tau \beta^r;$$

da cui

$$\frac{\delta^2 \lambda^r}{\delta s^2} = \frac{d\gamma}{ds} \nu^r - \gamma (\gamma \lambda^r + \tau \beta^r);$$

$$\frac{\delta^3 \lambda^r}{\delta s^3} = \frac{d^2 \gamma}{ds^2} \nu^r - \frac{d\gamma}{ds} (3 \gamma \lambda^r + 2 \tau \beta^r) - \frac{d\tau}{ds} \gamma \beta^r - \gamma (\gamma^2 + \tau^2) \nu^r;$$

$$\frac{\delta^2 \beta^r}{\delta s^2} = \frac{d\tau}{ds} \nu^r - \tau (\gamma \lambda^r + \tau \beta^r).$$

Osservando ora che si ha, per un tensore semplice controvariante u^r qualunque

$$\frac{du^r}{ds} = \frac{\delta u^r}{\delta s} - u^i \lambda^j \Gamma_{ij}^r,$$

con calcolo alquanto laborioso ma scevro di difficoltà si ottiene anche

$$\frac{d\lambda^r}{ds} = \gamma \nu^r - \lambda^i \lambda^j \Gamma_{ij}^r \quad ; \quad \frac{d\beta^r}{ds} = \tau \nu^r - \beta^i \lambda^j \Gamma_{ij}^r;$$

$$\frac{d^2 \lambda^r}{ds^2} = \frac{d\gamma}{ds} \nu^r - \gamma (\gamma \lambda^r + \tau \beta^r) - 3 \gamma \Gamma_{ij}^r \lambda^i \nu^j + \left(2 \Gamma_{is}^r \Gamma_{jh}^s - \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial y^h} \right) \lambda^i \lambda^j \lambda^h;$$

$$\frac{d^3 \lambda^r}{ds^3} = \frac{d^2 \gamma}{ds^2} \nu^r - \frac{d\gamma}{ds} (3 \gamma \lambda^r + 2 \tau \beta^r + 4 \Gamma_{ij}^r \nu^i \lambda^j) - \gamma \frac{d\tau}{ds} \beta^r -$$

$$- \gamma (\gamma^2 + \tau^2) \nu^r + \gamma^2 \Gamma_{ij}^r (4 \lambda^i \lambda^j - 3 \nu^i \nu^j) + 4 \gamma \tau \Gamma_{ij}^r \beta^i \lambda^j +$$

$$+ \gamma \left(7 \Gamma_{hs}^r \Gamma_{ij}^s + 5 \Gamma_{is}^r \Gamma_{jh}^s - 5 \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial y^h} - \frac{\partial \Gamma_{hj}^r}{\partial y^i} \right) \nu^i \lambda^j \lambda^h -$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2 \Gamma_{is}^r \Gamma_{jh}^r \Gamma_{ik}^i + 4 \Gamma_{is}^r \Gamma_{ih}^i \Gamma_{jk}^i - 4 \Gamma_{jh}^i \frac{\partial \Gamma_{is}^r}{\partial y^k} - 2 \Gamma_{is}^r \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial y^k} - \right. \\
& \left. - \Gamma_{hk}^i \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial y^i} + \frac{\partial^2 \Gamma_{ij}^r}{\partial y^h \partial y^k} \right) \lambda^i \lambda^j \lambda^h \lambda^k; \\
\frac{d^2 \beta^r}{ds^2} &= \frac{d\tau}{ds} \nu^r - \tau (\gamma \lambda^r + \tau \beta^r) - \Gamma_{ij}^r (2 \tau \nu^i \lambda^j + \gamma \beta^i \nu^j) + \\
& + \left(\Gamma_{is}^r \Gamma_{jh}^i + \Gamma_{js}^r \Gamma_{ih}^i - \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial y^h} \right) \beta^i \lambda^j \lambda^h.
\end{aligned}$$

Gli ordinari sviluppi di Taylor forniscono dopo ciò le formule cercate

$$\begin{aligned}
y^r &= y_{(0)}^r + s \lambda_{(0)}^r + \frac{s^2}{2!} \frac{d\lambda_{(0)}^r}{ds} + \frac{s^3}{3!} \frac{d^2 \lambda_{(0)}^r}{ds^2} + \frac{s^4}{4!} \frac{d^3 \lambda_{(0)}^r}{ds^3} + \dots \\
\lambda^r &= \lambda_{(0)}^r + s \frac{d\lambda_{(0)}^r}{ds} + \frac{s^2}{2!} \frac{d^2 \lambda_{(0)}^r}{ds^2} + \frac{s^3}{3!} \frac{d^3 \lambda_{(0)}^r}{ds^3} + \dots \\
\beta^r &= \beta_{(0)}^r + s \frac{d\beta_{(0)}^r}{ds} + \frac{s^2}{2!} \frac{d^2 \beta_{(0)}^r}{ds^2} + \dots
\end{aligned}$$

in cui si è ritenuto sufficiente, per le pratiche applicazioni, arrestare gli sviluppi ai termini scritti; e dove ben si intende tutte le derivate sono calcolate in P_0 .

4. Se i versori \mathbf{t} e \mathbf{b} sono dati, come sarà il caso generale, mediante l'azimut astronomico α_t ed α_b del piano verticale che li contiene, e mediante le loro distanze zenitali z_t e z_b , si avrà (vedi Nota ⁽¹⁾)

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}_1 \sin z_t \cos \alpha_t + \mathbf{i}_2 \sin z_t \sin \alpha_t + \mathbf{i}_3 \cos z_t$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{i}_1 \sin z_b \cos \alpha_b + \mathbf{i}_2 \sin z_b \sin \alpha_b + \mathbf{i}_3 \cos z_b$$

da cui si ottengono espressioni analoghe alle (5) della stessa Nota, sia per le λ^r che per le β^r ; queste consentono il calcolo delle $\lambda_{(0)}^r$ e $\beta_{(0)}^r$ in P_0 . Inversamente, e con procedimento del tutto analogo a quello descritto in fondo a quella Nota, sarà facile calcolare i valori delle $\alpha_t, z_t, \alpha_b, z_b$ in P , una volta noti i valori di λ^r e β^r in P stesso. Quanto a ν^r , basta ricordare che $\nu^r = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} \times \nu^r$.

Le formule trovate risolvono pienamente il problema proposto; esse si semplificano notevolmente se la curva di trasporto è piana, in quanto in tal caso basterà porre ovunque uguali a zero la curvatura di torsione τ e sue derivate. Se si suppone inoltre nulla anche la curvatura di flessione γ , ci si riduce alle formule della Nota ⁽¹⁾ per il trasporto lungo una linea retta.

Fisica applicata. — *Un generatore di impulsi specialmente adatto per ricerche di elettrofisiologia* ^(*). Nota ^(**) di FRANCO LEPRI, GIUSEPPE MORUZZI e ETTORE PANCINI, presentata dal Socio E. AMALDI.

1. Un tessuto può essere stimolato elettricamente applicando, fra due punti opportuni di esso, una differenza di potenziale (e producendo quindi una corrente elettrica nell'interno del tessuto stesso). Queste tensioni (o correnti) elettriche hanno un'attitudine a stimolare i tessuti che dipende, a parità di carica trasportata, dal loro andamento nel tempo, ed è stato notato che fra quelle finora usate (ad andamento sinusoidale, esponenziale, a sequenze di impulsi rettangolari) queste ultime si sono mostrate le più efficaci, hanno mostrato cioè di essere quelle che stimolano i tessuti con il minimo dispendio di energia e che producono in essi, a parità degli altri effetti, il minor danno ^(1, 2).

In questi ultimi anni sono stati descritti diversi tipi di generatori di impulsi a onde rettangolari ^(3, 4, 5, 6) e correnti con questo andamento sono state utilizzate non solo in ricerche puramente neurofisiologiche ⁽⁷⁾, ma anche nel campo clinico, per l'elettrodiagnostica delle lesioni muscolari e nervose ⁽⁵⁾ e per la produzione dell'elettroshock ^(8, 9). Si è visto, ad esempio, che le convulsioni che caratterizzano l'elettroshock vengono prodotte nell'uomo con correnti rettangolari che portano una quantità d'elettricità (espressa in Coulomb) che è da 5 a 15 volte inferiore a quella necessaria per ottenere lo stesso effetto colla comune corrente alternata ⁽⁹⁾; ciò spiega perchè i disturbi della memoria che risultano da questo procedimento terapeutico siano di gran lunga inferiori qualora si usino correnti rettangolari di forma appropriata ⁽⁸⁾.

Il generatore di impulsi qui descritto è stato costruito nel 1947 per ricerche neurofisiologiche in parte già note ^(10, 11, 12); esso ha subito quindi, con ottimi risultati, il collaudo di tre anni di indagine sperimentale. Finora l'apparecchio non

(*) Lavoro eseguito nel Centro per lo Studio della Fisica Nucleare del C. N. R. di Roma e nell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Pisa.

(**) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1950.

(1) F. OFFNER, «J. Neurophysiol.», 9, 387 (1946).

(2) Ch. BAUD et A. FLEISCH, «Helv. Physiol. Acta», 5, C 8 (1947).

(3) J. G. GOLSETH a. J. A. FIZZEL, «Arch. Phys. Med.», 28, 154 (1947).

(4) R. WAGNER u. E. WETTERER, «Pflugers Arch.», 251, 585 (1949).

(5) H. HENSEL u. M. WOLFF, «Der Nervenarzt», 20, 463 (1949).

(6) J. W. DUYFF a. G. WALTER, «Acta Physiol. Pharmacol. Neerl.», 1, 35 (1950).

(7) T. GUALTIEROTTI, E. MARTINI e A. MARZOTTI, «Pflugers Arch.», 246, 359 (1943).

(8) T. LIBERSON, «Digest Neur. a. Psychiatr.», 15, 72 (1947).

(9) A. J. ARIEFF, «Quarterly Bull. Northwestern University Medical School», 22, 10 (1948).

(10) G. MORUZZI, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim.», 24, 397, 752, 753, 755, 756 (1948).

(11) G. MORUZZI, «J. Physiologie», 41, 371 (1949).

(12) G. MORUZZI, *Problems in cerebellar physiology*, Thomas, Springfield (1950).

è stato impiegato nel campo clinico, e per essere utilizzato nella produzione dell'elettroshock gli stadi finali potrebbero essere opportunamente modificati. La soglia convulsivante dell'uomo, per gli impulsi rettangolari della durata di $0,5 - 0,7 \cdot 10^{-3}$ s e susseguentesi per 1 secondo alla frequenza di 120 Hz, è infatti data da correnti di punta di 325-400 mA⁽⁸⁾, non consentite dalla modesta potenza del nostro impulsatore. Questa è invece largamente sufficiente per la stimolazione diretta di fibre o di centri nervosi messi a nudo. Anche sull'uomo, qualora si lavori a cranio scoperto, come avviene nella pratica neurochirurgica, l'impulsatore è suscettibile d'utilizzazione:

a) l'impulsatore può servire come cronassimetro non iterativo. La misura della reobase viene fatta in corrente continua; raddoppiata la reobase, si mette in funzione il sistema dei singoli impulsi e si determina il corrispondente tempo utile o cronassia. Naturalmente è possibile studiare pure l'andamento dei voltaggi-soglia in funzione dei tempi-soglia, ricavando le curve d'intensità-durata. Le lunghe durate a disposizione permettono di misurare la cronassia anche durante la reazione degenerativa dei muscoli;

b) la possibilità di variare a piacere il tempo di salita dell'impulso, e di misurarlo volta a volta sull'oscilloscopio, permette uno studio quantitativo del fenomeno dell'accomodazione. La soglia di climalisi di Lapique, finora studiata con correnti a salita esponenziale, può essere misurata agevolmente con correnti a salita lineare: basta misurare il più lungo tempo di salita che ancora eccita quando il voltaggio è pari alla reobase. Anche il quoziente di Von Kries e la pendenza limite di Fabre possono venire determinati coll'impulsatore in parola;

c) l'utilizzazione del multivibratore della frequenza permette di studiare cronassia e accomodazione su sistemi iterativi ed eseguire su di questi stimolazioni selettive. Le alte frequenze ottenibili permettono lo studio del fenomeno di Wedenski;

d) l'introduzione in uscita di un interruttore elettronico permette di variare a piacere la durata complessiva della stimolazione iterativa e di determinare, variando opportunamente la frequenza, il numero critico d'impulsi che è necessario per ottenere la risposta. In tal modo è possibile uno studio quantitativo dei fenomeni di sommazione centrale e periferica;

e) la possibilità di ottenere un numero limitato d'impulsi, di cui sia variabile a piacere il voltaggio, il tempo di ascesa e la durata, può essere utilizzata in diversi modi. Innanzi tutto fenomeni particolarmente rapidi di sommazione temporale diventano suscettibili d'analisi accurata. Utilizzando due soli impulsi e variandone opportunamente l'intervallo, grazie ai multivibratori della frequenza e della durata è possibile studiare i periodi refrattari assoluti e relativi e la fase supernormale di fibre e di cellule nervose;

f) come generatore di correnti continue e di correnti sinusoidali l'impulsatore permette poi di riprodurre i fenomeni classici dell'elettrofisiologia, quali il blocco elettronico, le variazioni elettrotoniche dell'eccitabilità, la fatica neuromuscolare ecc. In tal modo l'impulsatore permette di eseguire i principali esperimenti di classe.

2. Le caratteristiche dell'apparecchio che siamo riusciti a realizzare sono le seguenti:

a) esso può fornire sequenze illimitate di impulsi egualmente intervallati nel tempo con periodo variabile con continuità da due secondi ad un millesimo di secondo (fig. 1);

b) ciascun impulso di queste sequenze ha una forma costante trapezoidale, con possibilità di variare il tempo della salita lineare dell'impulso da qualche milionesimo di secondo (salita praticamente istantanea) a tutta la durata dell'impulso medesimo; la discesa è sempre più rapida della salita;

c) la durata costante di ciascun impulso (intendendosi per durata il tempo durante il quale la tensione, o la corrente è sensibilmente diversa da zero) può essere variata con continuità da trenta milionesimi di secondo fino a circa un secondo. Naturalmente la durata massima degli impulsi può raggiungere solo valori che non superino il tempo che separa un impulso da quello successivo;

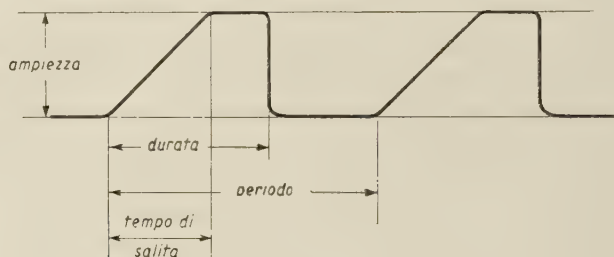


Fig. 1.

d) l'ampiezza di ciascun impulso (cioè la tensione, massima raggiunta) può essere variata con continuità da due mV a duecento Volt;

e) l'apparecchio può essere usato sia per generare impulsi di tensione che per generare impulsi di corrente. Si noti che nel primo caso la sua resistenza interna deve poter essere considerata trascurabile rispetto a quella del preparato a cui gli impulsi vengono applicati, nel secondo, invece, la resistenza interna dello strumento deve essere così grande che l'introduzione di un preparato tra i suoi poli non alteri il regime di corrente che si ha con i poli cortocircuitati;

f) l'apparecchio è dotato di un sincroscopio che consente l'osservazione, a mezzo di oscillografo a raggi catodici, dell'andamento della tensione sia all'uscita dell'apparecchio, sia, a mezzo di opportuno amplificatore compreso nell'apparecchio stesso, fra due punti qualsiasi del preparato;

g) è possibile inviare al preparato un solo impulso di durata lunga a piacere, ma con la pendenza iniziale desiderata;

h) è possibile inviare sul preparato treni di impulsi costituiti da un numero noto ^(1, 2, 3, 4) di impulsi eguali dei quali possono essere variati a piacere il tempo di salita, la durata e l'ampiezza; può inoltre essere variato l'intervallo fra l'inizio di ciascun impulso e quello del successivo.

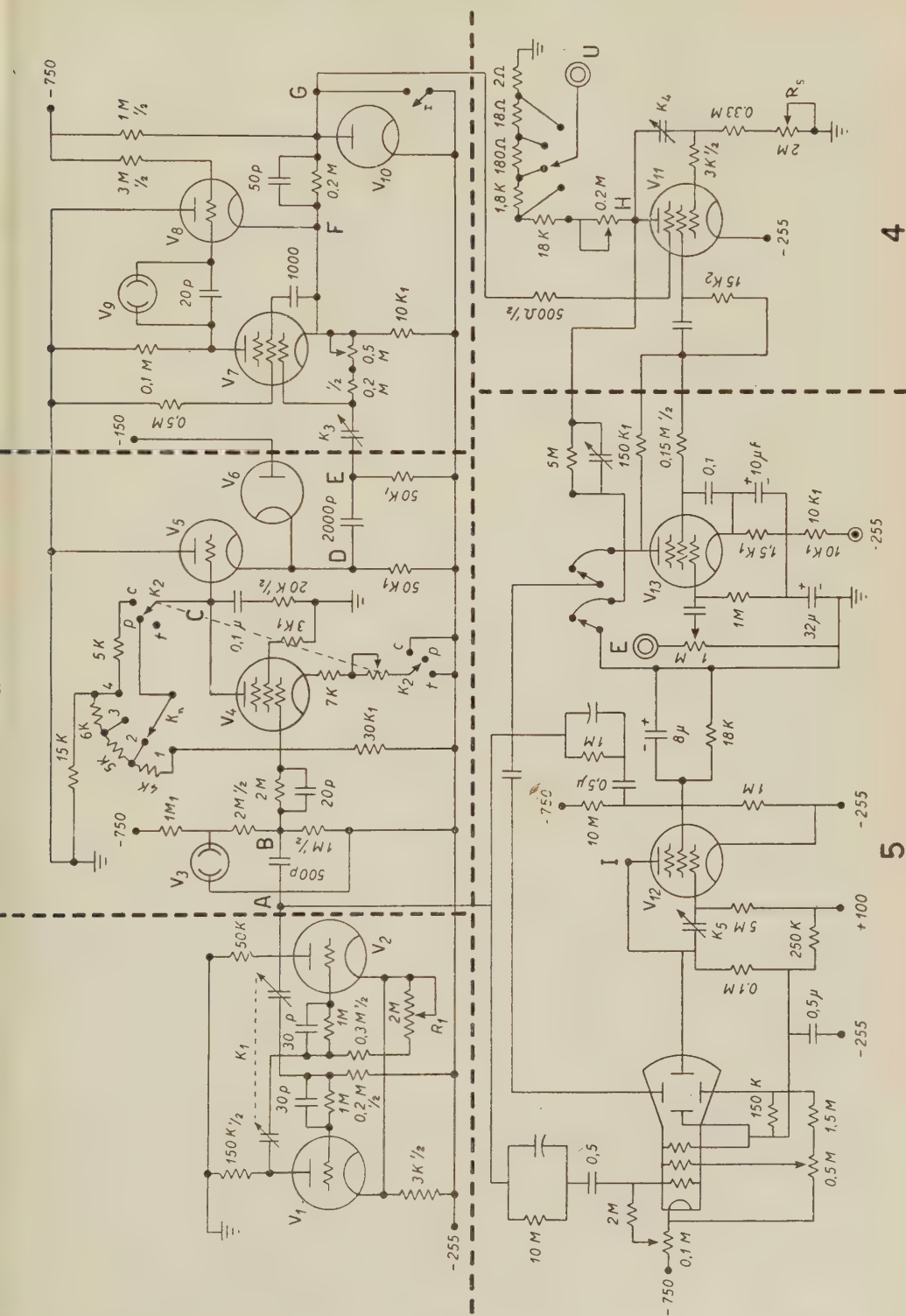


Fig. 2.

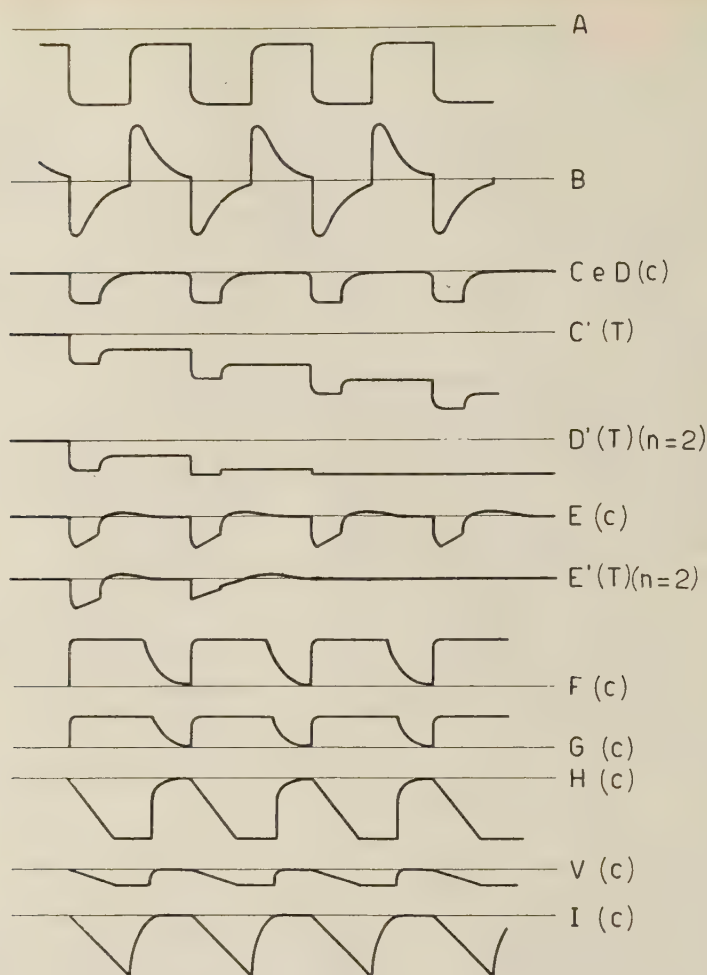


Fig. 3.

3. Lo schema costruttivo dell'apparecchio è dato in fig. 2; in fig. 3 sono invece rappresentate le forme dei segnali nei diversi punti dell'apparecchio esplicitamente indicati, i punti corrispondenti sulle verticali sono relativi a fenomeni che avvengono nello stesso istante essendo stato, però, trascurato il ritardo, peraltro estremamente piccolo, introdotto da vari elementi di circuito.

Diamo qui per sommi capi una descrizione dei vari elementi dell'apparecchio:

1° MULTIVIBRATORE DELLA FREQUENZA. - È un multivibratore convenzionale simmetrico ad accoppiamento griglia-placca. Le costanti di tempo, che determinano la frequenza delle oscillazioni, sono regolabili, a scatti, mediante il commutatore delle capacità di accoppiamento e con continuità mediante variazione di una delle resistenze di fuga (R_1). In questo modo il periodo della oscillazione può essere variato con continuità da due secondi ad un millesimo di secondo circa.

Il segnale di uscita è rettangolare. Questo multivibratore da una parte va a modulare la griglia del tubo a raggi catodici e ad azionare il circuito Miller⁽⁵⁾

per l'asse lineare dei tempi, dall'altra, dopo essere stato derivato attraverso un circuito a capacità e resistenza, comanda lo stadio di separazione.

2° STADIO DI SEPARAZIONE COL DISPOSITIVO PER I TRENI DI IMPULSI:

a) *Funzionamento continuo*: il funzionamento continuo si ottiene ponendo il commutatore K_2 nella posizione c : in queste condizioni il circuito placca della valvola separatrice risulta chiuso, e quindi essa ad ogni impulso del multivibratore di frequenza conduce fortemente, generando sulla placca un impulso negativo.

Questo impulso negativo passa, senza essere amplificato, attraverso un «cathode follower» (che non ha nessun ufficio in condizione di funzionamento continuo) e va ad azionare il multivibratore di durata.

b) *Generazione di treni di impulsi*: quando si voglia ottenere un treno costituito da un numero limitato di impulsi si pone il commutatore K_2 sulla posizione p e il commutatore K_n in corrispondenza al numero di impulsi desiderati. In questa situazione il catodo della valvola separatrice è isolato, la valvola non conduce e quindi la placca si carica ad una tensione che dipende dalla posizione del commutatore K_n .

Se, ora, si gira il commutatore K_2 nella posizione t la placca resta connessa col condensatore C caricato ed il catodo viene riconnesso al negativo. Gli impulsi provenienti dal multivibratore di frequenza (e che sono stati resi, attraverso la forte derivazione, ad avere una durata indipendente dalla frequenza) fanno ora condurre la valvola separatrice per un tempo ben determinato provocando dei successivi rapidi abbassamenti della tensione del condensatore C la quale viene ad avere nel tempo un andamento a gradinata. Il catodo del cathode follower segue fedelmente questo andamento e continua ad abbassarsi a scatti fino ad avere raggiunto il potenziale di placca del diodo di taglio il quale, da questo momento in poi, impedisce ogni ulteriore abbassamento della tensione (fig. 3). In questo modo si ottiene, come si voleva, un numero limitato di salti di tensione, numero che dipende dal potenziale iniziale di carica del condensatore C e dalla quantità di carica che, per ogni impulso proveniente dal multivibratore della frequenza, sfugge attraverso la valvola separatrice. Questa quantità di carica è, come è già stato detto, indipendente dalla frequenza, ma può essere variata manovrando il reostato semifisso posto in serie col catodo della valvola separatrice; esso insieme al reostato in serie col partitore K_n serve soltanto per la messa a punto dell'apparecchio. Può essere necessario ritoccare questi due reostati in caso di sostituzione della valvola separatrice.

Infine la resistenza in serie con la capacità C serve a dare all'impedenza del circuito di griglia del cathode follower una componente resistiva. In tal modo quando la valvola V_4 diventa conduttrice questa impedenza viene percorsa dalla corrente (resa pressochè costante dalla resistenza in serie) che fluisce attraverso la valvola e quindi la tensione ai suoi capi ha l'andamento

$$iR + \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$

Quando poi la valvola V_4 viene ricondotta all'interdizione la corrente cessa bruscamente ed ai capi dell'impedenza rimane la tensione it/C dove t è la durata dell'impulso di corrente. Insomma la forma del segnale sulla griglia della valvola V_5 è quella indicata in fig. 3.

Questo segnale ha, come si vede, il notevole pregio di avere un fronte molto ripido.

3° MULTIVIBRATORE DELLA DURATA. - È un multivibratore del tipo convenzionale ad accoppiamento catodico. La durata può essere variata a mezzo del commutatore K_3 (regolazione grossa) ed a mezzo del reostato R_4 (regolazione fine). Allo scopo di evitare una doppia commutazione e di potere ottenere durate molto lunghe l'accoppiamento fra la placca della valvola V_7 e la griglia della valvola V_8 è effettuato da una lampada al neon (V_9) attraverso la quale vi è una caduta costante di potenziale: questa lampada fa quindi le funzioni di una controbatteria.

L'impulso di uscita viene tolto al potenziale adatto per merito del diodo di taglio V_{10} .

Il pulsante I permette inoltre di ottenere in uscita impulsi di durata praticamente infinita ma con un'ampiezza ed il tempo di salita stabiliti dallo stadio successivo.

4° REGOLAZIONE DEL TEMPO DI SALITA E STADIO FINALE. - La valvola finale è stata montata secondo il ben noto circuito di Miller che consente di ottenere degli impulsi con salite perfettamente lineari. Il tempo di salita può essere variato al solito a scatti col commutatore K_4 e con continuità con il reostato R_5 .

L'impulso d'uscita ha infine una ampiezza regolabile a mezzo di un attenuatore composto di un partitore decadico a quattro posizioni che permette una attenuazione di 1, 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} e di un reostato per la regolazione fine. In questo modo si possono ottenere tensioni di uscita, note con la precisione del 5% e variabili con continuità da 2 mV a 200 V.

L'impedenza, come è evidente, è quindi dipendente dal rapporto di attenuazione.

La potenza massima utilizzabile è superiore ad 1 Watt.

5° TUBO OSCILLOGRAFICO PER IL CONTROLLO DELLA FORMA DEGLI IMPULSI. - L'apparecchio contiene un sincroscopio che consente il controllo della forma degli impulsi sia all'uscita del generatore di impulsi sia, tramite amplificatore lineare, direttamente sul preparato.

L'asse dei tempi, sincronizzato col multivibratore di frequenza, è fornito da un generatore di impulsi a dente di sega del tutto analogo allo stadio di uscita. La velocità di sparpagliamento è regolabile a scatti fra un centimetro al secondo e mille centimetri al secondo.

L'amplificatore che consente l'esame dei segnali in punti opportuni del preparato ha un guadagno di 80 dB ed una risposta praticamente lineare da 1 a 10^6 Hz.

Chimica. — *Su alcuni derivati dell'acido para-ammino-salicilico (P.A.S.)* (*). Nota di AURELIO ROMEO, presentata (**) dal Socio G. BARGELLINI.

Dall'epoca in cui per la prima volta sono state messe in evidenza da parte di Lehmann⁽¹⁾ le proprietà tubercolostatiche del P.A.S., sono stati preparati numerosissimi derivati al fine di stabilire il suo meccanismo d'azione e l'influenza che i sostituenti apportavano al suo potere batteriostatico.

Una rassegna abbastanza completa in tal senso è stata fatta da Hirt e Hurni⁽²⁾ i quali, tenendo conto anche dei risultati già acquisiti da altri⁽³⁾ hanno compilato il quadro dell'attività tubercolostatica in vitro di ben 116 sostanze derivate ed affini al P.A.S.

Dall'esame comparativo dell'attività delle diverse sostanze gli autori pervengono alla constatazione che nei casi più favorevoli e tenendo conto del loro diverso peso molecolare, si raggiunge appena l'attività tubercolostatica del P.A.S. e giammai la si supera, per cui ritengono di poter ammettere che l'attività dipende dalla maggiore o minore facilità con la quale i vari derivati si idrolizzano, e che di conseguenza l'attività batteriostatica sia da ascrivere al P.A.S. che viene messo in libertà nell'organismo o nel bacillo.

Per potere verificare tale supposizione ed anche allo scopo di ottenere altri derivati ho ritenuto non privo di interesse procedere alla preparazione di N-acil derivati con acidi aventi diversa costante di dissociazione. Poichè è noto che ad esempio la velocità di idrolisi dell'acetammide, della cloroacetammide, della dicloroacetammide della tricloroacetammide⁽⁴⁾ cresce parallelamente con la forza dei rispettivi acidi, come risulta dalla tabella I, in cui accanto all'acido sono riportate le costanti di dissociazione K e le velocità di idrolisi ponendo come unitaria quella dell'acetammide.

Ho ritenuto logico preparare degli N-acil derivati del P.A.S. introducendo i radicali dell'acido monoclورو, dicloro e tricloro acetico.

La preparazione e lo studio di questi composti veniva inoltre ad acquistare particolare interesse in quanto fra questi derivati era compreso anche quello contenente il radicale dell'acido dicloroacetico —CO—CH—Cl_2 .

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica dell'Istituto chimico dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) J. LEHMANN, «Nordisk med.», vol. 33, 140 (1947).

(2) R. HIRT e H. HURNI, «Helv. chim. acta», vol. 32, 378 (1949).

(3) C. L. GOODACRE, B. W. MITCHELL e A. S. SEYMOUR, «Quart. J. of Pharmacy and Pharmacol.», vol. 21, 301 (1948); G. P. YOUNG, G. W. RALEIGH e A. S. YOUNG, «J. Bact.», vol. 54, 409 (1947); H. ERLÉNMEYER, B. PRIJS, E. SORKIN e E. SUTER, «Helv. chim. acta», vol. 31, 988 (1948).

(4) CALVET, «Bull. Soc. Chim.», vol. 51, 719 (1932); CRIGNARD, *Traité de chimie organique*, vol. II, p. 903.

TABELLA I⁽⁵⁾.

| ACIDI | $K_{25^{\circ}}$ | Velocità di idrolisi delle ammidi |
|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| Acido acetico | $1,85 \cdot 10^{-5}$ | 1 |
| » monocloroacetico | $1,51 \cdot 10^{-3}$ | 335 |
| » dicloroacetico . | $5,53 \cdot 10^{-2}$ | 4840 |
| » tricloroacetico . | $2 \cdot 10^{-1} (18^{\circ})$ | 16000 |

Tale radicale è infatti contenuto nel cloramfenicolo (*cloromicetina*) che, secondo ricerche di Ehrlich e collaboratori⁽⁶⁾, di Smith e collaboratori⁽⁷⁾, di Youmans e collaboratori⁽⁸⁾, ha una certa attività batteriostatica anche sul bacillo tubercolare⁽⁹⁾ e d'altra parte è noto che ha pure una parte importante e specifica nel determinare il potere antibiotico del composto. Infatti la base ottenuta per saponificazione del cloramfenicolo conserva solo l'1,8 % dell'attività del cloramfenicolo.

Infine per completare la gamma dei prodotti ho anche preparato il bromo-acetilammino P.A.S. e lo jodio-acetilammino P.A.S. corrispondenti agli acidi monobromo e monojodio-acetico aventi costanti di dissociazione (25°) uguali a $1,38 \cdot 10^{-3}$, rispettivamente $7,5 \cdot 10^{-4}$.

Di questi composti sono stati pure eseguiti dei saggi preliminari riguardanti l'attività tubercolostatica in vitro verso i ceppi B.C.G. e H₃₇ di *M. tuberculosis* impiegando come mezzo di cultura terreno di Sauton.

I risultati sono messi in evidenza nella tabella II e III ove nella colonna 1 si riporta la sostanza impiegata, nella colonna 2 la quantità minima di sostanza espressa in γ per cm³ capace di inibire ancora lo sviluppo, dopo 25 giorni di incubazione, nella colonna 3 il peso molecolare ed infine nelle colonne 4 e 5 le concentrazioni molari per litro e l'attività relativa dei composti riferita a quella del P.A.S. presa come unitaria⁽¹⁰⁾.

(5) I valori di $K_{25^{\circ}}$ sono quelli riportati nelle tabelle del Landolt.

(6) J. EHRLICH, Q. R. BARTZ, R. M. SMITH, D. A. JOSLYN, P. R. BURKHOLDER, «Science», vol. 106, 417 (1947).

(7) R. M. SMITH, D. A. JOSLYN, O. M. GRUHZIT, J. W. MC. LEAN, M. A. PENNER, J. EHRLICH, «J. Bact.», vol. 55, 425 (1948).

(8) G. P. YOUMANS, A. S. YOUMANS, R. R. OSBORNE, «Proc. Soc. Exp. Biol. Med.», vol. 67, 426 (1949).

(9) Per inibire la crescita di 19 ceppi di micobatteri tubercolari sono necessarie dosi che variano da 6,25 a 12,5 γ per cc. mentre per il P.A.S. sono necessari 1,5 γ per cc.

(10) Se l'attività del P.A.S. nel mio caso risulta superiore a quella trovata da Lehmann e Sievers ciò è facilmente spiegabile da differenze anche minime della composizione del terreno usato o dalle modalità di semina del germe impiegato.

Ad ogni modo poichè nelle nostre prove è stato usato sempre il medesimo ceppo ed il medesimo terreno il confronto fra l'attività del P.A.S. e quella dei suoi derivati conserva tutto il suo valore.

TABELLA II.
Terreno di Sauton ceppo B.C.G.

| ACIDI | quantità di sostanza per cc. in γ | P. M. | Molarità | Attività relative |
|--|--|-------|-----------------------|----------------------|
| Acido P.A.S. | I | 153 | $0,65 \cdot 10^{-5}$ | I |
| Acido cloroacetil 4-ammino-salicilico | 20 | 229,6 | $8,7 \cdot 10^{-5}$ | 0,07 |
| Acido dicloroacetil 4-ammino-salicilico | 0,1 | 264 | $0,037 \cdot 10^{-5}$ | 17,56 |
| Acido tricloroacetil 4-ammino-salicilico | 0,2 | 298,5 | $0,067 \cdot 10^{-5}$ | 9,7 |
| Acido bromoacetil 4-ammino-salicilico | 20 | 274 | $7,3 \cdot 10^{-5}$ | 0,09 |
| Acido jodoacetil 4-ammino-salicilico | 20 | 321 | $6,2 \cdot 10^{-5}$ | 0,10 |

Rispetto al ceppo B.C.G. si nota che l'attività dei derivati non va parallelamente alla forza degli acidi con i quali il P.A.S. è stato acilato; in più si nota il fatto interessante che l'attività dell'acido dicloroacetil 4-ammino-salicilico e dell'acido tricloroacetil 4-ammino-salicilico è molto superiore a quella che ci si dovrebbe aspettare dal P.A.S. che potrebbe essere messo in libertà da questi composti per un eventuale processo di idrolisi. Sebbene in maniera meno marcata questo risultato si osserva nei riguardi del ceppo H_{37} per l'acido tricloroacetil 4-ammino-salicilico.

TABELLA III.
Terreno di Sauton ceppo H_{37}

| ACIDI | Quantità di sostanza per cc. in γ | P. M. | Molarità | Attività relative |
|--|--|-------|----------------------|----------------------|
| Acido P.A.S. | 0,4 | 153 | $0,26 \cdot 10^{-5}$ | I |
| Acido dicloroacetil 4-ammino-salicilico | 0,6 | 264 | $0,23 \cdot 10^{-5}$ | 1,13 |
| acido tricloroacetil 4-ammino-salicilico | 0,4 | 298,5 | $0,13 \cdot 10^{-5}$ | 2 |

Tutto ciò porterebbe a concludere che per spiegare l'attività di questi composti non possa essere sufficiente invocare una previa idrolisi ed attribuire tutta l'attività della sostanza semplicemente al P.A.S. messo in libertà.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione dell'acido acetil 4-ammino-salicilico. - Di questa sostanza che è stata studiata a fondo dal punto di vista batteriostatico in vitro non sono riuscito a trovare in letteratura nè le costanti fisiche nè il metodo di preparazione.

Io l'ho ottenuta partendo dall'acido 2 ammino acetil-4-ammino-benzoico a p, f, 215° (con decomposizione) che ho avuto occasione di preparare nel corso di una sintesi del P.A.S.⁽¹¹⁾ nel modo seguente: In 350 cm³ di acqua si sciolgono 90 g. di bisolfato sodico ed alla soluzione si aggiungono 100 g. di acido 2 ammino acetil-4-ammino-benzoico ben polverizzato.

Dopo aver portato la soluzione a 0°, si aggiungono 225 g. di ghiaccio pesto e, agitando si versa poco a poco una soluzione di 37 g. di nitrito sodico (avente un titolo del 98 %) in 100 cm³ di acqua.

Dopo che il liquido di reazione ha raggiunto spontaneamente la temperatura ambiente, si riscalda a 60-70° fino a che lo sviluppo di azoto è cessato. Si lascia riposare una notte e si separa l'acido acetil 4-ammino-salicilico che viene ricristallizzato dall'acqua o dall'acido acetico al 50 %. Il composto fonde a 217° (con decomposizione).

Estraendo anche le acque madri con etere etilico, si ha una resa dell'80 %. Per saponificazione del composto con Na OH al 20 % scaldando a 75° 80° per un'ora e mezza, e dopo acidificazione del liquido con acido cloridrico usando come indicatore il rosso congo, si ottiene l'acido para-amminosalicilico.

Per determinare le condizioni adatte ad ottenere acil derivati all'azoto partendo direttamente dal P.A.S., ho preparato l'acido acetil 4-ammino-salicilico anche nel modo seguente: Ad una sospensione di 20 g. di P.A.S. in 100 cm³ di acqua si aggiungono 11,5 g. di bicarbonato sodico, la soluzione viene raffreddata a circa 0° ed agitando si aggiungono a poco a poco 21 gr. di anidride acetica. Si agita ancora per mezz'ora e mantenendo la temperatura a 5° vengono aggiunti 30 cm³ di acido nitrico al 50 %.

Il composto che si separa, filtrato, cristallizzato da acqua o da acido acetico al 50 %, fonde a 217° ed è identico all'acido acetil 4-ammino-salicilico precedentemente descritto.

Lo stesso risultato si ottiene pure acetilando il P.A.S. sodico in soluzione acquosa a freddo con cloruro di acetile in presenza di acetato sodico.

La titolazione acidimetrica eseguita dal dott. Liberti potenziometricamente con elettrodo a vetro ha fornito un peso equivalente pari a 194,5.

| | | |
|------------------|---------|--|
| Peso equivalente | trovato | 194,5 |
| » | » | calcolato per C ₉ H ₉ O ₄ N 195,17. |

Acido monoclورو-acetil 4-ammino-salicilico. - 30 g. di sale di sodio dell'acido 4-ammino-salicilico vengono sciolti in 160 cm³ di soluzione di acetato sodico al 20 %, la soluzione viene portata a 0° ed agitando si aggiungono 35 g. di cloruro di monoclوروacetile. Sempre mantenendo la temperatura a 0° si aggiun-

(11) A. ROMEO, «Ricerca Scientifica», vol. 18, 1057 (1948).

gono 140 g. di acido nitrico al 50 %. Si filtra, si lava e si cristallizza da acetone contenente il 50 % di acqua o da acido acetico al 50 %.

Si ottiene un prodotto che fonde a 232° (con decomposizione). Lo stesso risultato si ottiene impiegando l'anidride monocloroacetica con le modalità sopra descritte.

% Cl trovato 15,24 ; 15,52
% Cl calcolato per $C_9H_8O_4NCl$ 15,44

Acido dicloroacetil 4-ammino-salicilico. — Si sciolgono 15 g. di acido 4-ammino-salicilico, in una soluzione contenente 9 g. di bicarbonato sodico in 120 cm³ di acqua. Si raffredda la soluzione a 0-5° e vi si fanno gocciolare dentro con agitazione 30 g. di anidride dell'acido dicloroacetico. Mantenendo la sospensione a 0-5° si aggiungono 30 cm³ di acido nitrico al 50 %. Il composto separatosi filtrato e cristallizzato da acido acetico al 50 % fonde a 237° (con decomposizione).

% Cl trovato 26,76 ; 26,42
% Cl calcolato per $C_9H_7O_4NCl_2$ 26,84

Acido 4-tricloro-acetil 4-ammino-salicilico. — 21 g. di sale di sodio dell'acido 4-ammino-salicilico vengono sciolti in 150 cm³ di acqua. Si raffredda la soluzione a 0-5° e vi si fanno gocciolare dentro con energica agitazione 42 g. di anidride dell'acido tricloroacetico.

Si filtra il prodotto rimasto sul filtro, è cristallizzato da acido acetico al 50 % o da acqua e fonde a 228° (con decomposizione).

% Cl trovato 35,7 35,8
% Cl calcolato per $C_9H_8O_4NCl_3$ 35,63

Acido iodio-acetil 4-ammino-salicilico. — 41 g. di acido cloroacetil 4-ammino-salicilico, si sciolgono in 400 cm³ di acetone e a questa soluzione si aggiungono 35 g. di ioduro di potassio. Si riscalda a ricadere per circa un'ora e si concentra la soluzione a secchezza sotto vuoto. Si aggiungono 200 cm³ di acqua, quindi si filtra il composto rimasto insolubile che cristallizzato da acetone acquoso al 50 %, fonde a 211° (con decomposizione).

% I trovato 39,4
% I calcolato per $C_9H_8O_4NI$ 39,53

Acido bromoacetil 4-ammino-salicilico. — 23 g. di sale di sodio dell'acido 4-ammino-salicilico vengono sciolti in una soluzione di 140 g. di acetato sodico al 20 %. Si raffredda la soluzione a 0-5° e mantenendo questa temperatura vi si fanno gocciolare 47 g. di bromuro di bromo acetile.

Si aggiungono 110 g. di acido nitrico al 50 % e il composto separatosi cristallizzato da acido acetico al 50 % fonde a 219° (con decomposizione).

% Br trovato 28,89 29,3
% Br calcolato per $C_9H_8O_4NBr$ 29,16

Chimica fisica. — *Sull'impiego del cloruro cromoso per la determinazione del potenziale di ossidoriduzione dei chinoni alogeno sostituiti* (*). Nota di EOLO SCROCCO e GIOVANNA MARMANI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

L'uso del cloruro cromoso come riducente nelle titolazioni potenziometriche fu introdotto da T. F. Buehrer e O. E. Schupp⁽¹⁾.

Questi Autori lo prepararono facendo bollire il bicromato potassico con acido cloridrico fino a completa eliminazione del cloro, indi, per aggiunta di un eccesso di zinco, effettuavano la riduzione fino a che la soluzione si colorava intensamente in blu. Questa veniva coperta con uno strato di cherosene per difenderla dall'O₂ atmosferico e trasportata nella bottiglia munita di microburetta pipettando sotto il cherosene stesso.

Il metodo impiegato da E. Zintl e G. Rienäcker⁽²⁾ è analogo, soltanto che la soluzione di cloruro cromoso viene spinta con H₂ attraverso il sifone in un altro pallone contenente acetato sodico. Il precipitato di acetato cromoso viene ridiscioltto con HCl al 2%, indi sifonato sempre sotto idrogeno nella boccia munita di buretta per la titolazione.

Il cloruro cromoso viene impiegato da questi e altri Autori⁽³⁾ per la determinazione, a mezzo di titolazioni potenziometriche del rame, ferro, arsenico, mercurio, argento, oro, stagno, antimonio ecc., da soli o in lega con altri metalli.

Abbiamo voluto applicare l'uso del cloruro cromoso alla titolazione potenziometrica dei chinoni e dei chinoni alogenati onde trovare condizioni più favorevoli di titolazione anche per casi speciali che interessano una nostra più ampia ricerca sui potenziali di ossidoriduzione di alcuni chinoni alogenati mono e policiclici. Invero, il CrCl₃ presenta un potenziale di ossidoriduzione ($\pi_{\text{Cr}^{3+} \rightleftharpoons \text{Cr}^{6+}} = -0,43$ volt) notevolmente inferiore a quello del titanio ($\pi_{\text{Ti}^{3+} \rightleftharpoons \text{Ti}^{4+}} = 0,03$ volt)⁽³⁾ e pertanto si presenta *a priori* preferibile, dal punto di vista elettrochimico, al tricloruro di titanio per titolazioni di sistemi ossidoriduttivi reversibili a basso potenziale normale.

Per la preparazione del cloruro cromoso abbiamo seguito per sommi capi il metodo di Buehrer e Schupp.

Cinque grammi di bicromato potassico vengono fatti bollire con HCl fino a colorazione verde e totale eliminazione del cloro. Alla soluzione fredda contenuta nel pallone disegnato in figura 1 viene aggiunto zinco puro in eccesso. Si ha

(*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche diretto dal prof. G. B. Bonino (presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna).

(**) Nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) T. F. BUEHRER e O. E. SCHUPP, « Ind. Eng. Chem. », 18, 121 (1926).

(2) E. ZINTL e G. RIENÄCKER, « Z. anorg. allgem. Chem. », 161, 374 (1927).

(3) KOLTHOFF e FURMAN, *Potentiometric Titrations*, p. 354 e 380 e sg.

dapprima un violento sviluppo di idrogeno seguito quasi immediatamente dalla comparsa della colorazione blu caratteristica del cloruro cromoso e si attende fino a che tutto l'HCl presente non abbia reagito collo zinco, per cui si possa ritenere che la soluzione abbia raggiunto la neutralità.

A questo punto, attraverso il tubo A, viene immesso dell' H_2 in modo da sifonare la soluzione nel cilindro graduato D di conservazione attraverso il tubo B ed un piccolo filtro posto in C (fig. 2). Il cilindro conteneva una soluzione acquosa di HCl coperta da uno strato di benzolo e preventivamente liberata dall'ossigeno a mezzo di un prolungato gorgogliamento di idrogeno. Questa soluzione aveva una acidità tale che, per aggiunta di un opportuno numero di cc. di cloruro cromoso, raggiungeva all'incirca di pH richiesto.

Nella soluzione così ottenuta veniva fatto gorgogliare azoto scrupolosamente purificato dall'ossigeno con i soliti metodi, in modo da scacciare l'idrogeno.

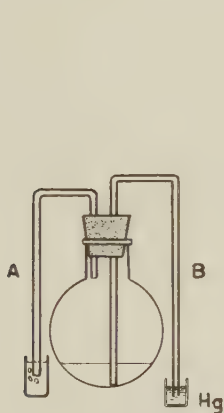


Fig. 1.

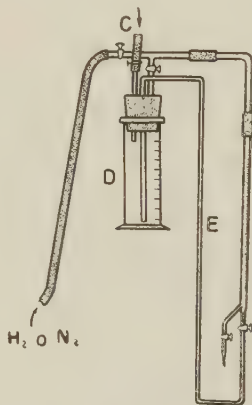


Fig. 2.

La soluzione era così pronta per essere sifonata nella buretta (vedi fig. 2) a mezzo del sifone E.

Per usare una tale soluzione nelle misure di potenziali normali è necessario che essa abbia la stessa acidità della soluzione di HCl in cui viene disciolto il chinone per la titolazione. Merita un cenno l'artificio da noi escogitato per portare allo stesso pH le soluzioni di cloruro cromoso e quella di HCl contenente il chinone da titolare.

A questo scopo abbiamo dapprima determinato il titolo esatto in cloruro cromoso della nostra soluzione riducente mediante una quantità nota di chinone; poniamo che fossero necessari x cc. di soluzione di $CrCl_2$. Ripetevamo poi l'esperienza colla stessa concentrazione di chinone e con $x/2$ cc. di soluzione di $CrCl_2$; eravamo così certi di ottenere chinone e idrochinone al 50% e una quantità di $CrCl_2$ corrispondente a $x/2$ cc. della soluzione di partenza. Misuravamo il potenziale π_1 di questa soluzione, che, per maggior sicurezza, saturavamo con chinidrone, rispetto ad un elettrodo a calomelano; e sempre rispetto allo stesso elettrodo misuravamo con chinidrone il potenziale π_2 della soluzione di HCl; in genere π_1 e π_2 erano diversi, ma diluendo o concentrando opportunamente la

soluzione cloridrica, ci è riuscito facile con due o tre tentativi far sì che il potenziale π_1 dato dall'HCl più $x/2$ cc. di soluzione di CrCl_2 che così si ossidava a CrCl_3 , fosse esattamente uguale al π_2 dell'HCl.

Per ottenere una riprova della bontà del metodo di misura del potenziale normale mediante titolazione con CrCl_2 abbiamo fatto la misura del π_0 del parabenzochinone e del monocloroparabenzochinone. I risultati delle misure sono riportati nella sottostante tabella e si può notare che la concordanza con i valori ottenuti adoperando come riducente il TiCl_3 è ottima.

TABELLA.

| Chinone | π_0 in volt a 25° C | |
|-------------------------------------|-------------------------|---------------------|
| | con TiCl_3 | con CrCl_2 |
| Parabenzochinone | 0.699 ⁽¹⁾ | 0.699 |
| Monocloro-p. benzochinone | 0.712 ⁽¹⁾ | 0.712 |

(1) V. K. LA MER e L. BAKER, « Jour. Am. Chem. Soc. », 44, 1954 (1922).

È utile notare che, titolando potenziometricamente i chinoni con CrCl_2 , si ha un tratto di caduta della curva di titolazione più esteso che non usando TiCl_3 .

Anche questo fatto può segnalare l'utilità pratica del metodo per la misura di sistemi ossidoriduttivi a basso valore di π_0 .

Chimica biologica. — *Sul riboside dell'acido urico. Cromatografia su carta da filtro* (*). Nota (**) di ENZO LEONE e DINO GUERRITTORE, presentata dal Socio G. QUAGLIARIELLO.

Nel 1922 Davis, Newton e Benedict⁽¹⁾ hanno descritto l'isolamento dal sangue bovino di un composto che all'analisi risulta costituito di una molecola di acido urico, unita con legame glicosidico con una di d-riboso. Falconer e Gulland in seguito⁽²⁾ ne studiavano lo spettro di assorbimento nell'ultravioletto e dimostravano che il riboso è unito all'N in posizione 9 dell'acido urico. Il riboside sarebbe presente, nel sangue bovino, solo negli eritrociti⁽³⁾, ed è stato riscontrato anche, in concentrazioni progressivamente minori, nel sangue umano, di cavallo, pecora, maiale, cane e polli⁽⁴⁾. L'uricasi è priva di azione su di esso⁽⁵⁾,

(*) Lavoro eseguito per il Centro di Enzimologia del C. N. R. presso l'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Napoli, e presso l'Istituto di Chimica della Facoltà di Medicina della stessa Università.

(**) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1950.

(1) A. R. DAVIS, E. B. NEWTON, S. R. BENEDICT, « J. Biol. Chem. », 54, 595 (1922).

(2) R. FALCONER, J. M. GULLAND, « J. Chem. Soc. », 1369 (1939).

(3) E. B. NEWTON, A. R. DAVIS, « J. Biol. Chem. », 54, 601 (1922).

(4) E. B. NEWTON, A. R. DAVIS, « J. Biol. Chem. », 54, 603 (1922).

(5) W. SCHULER, « Zeit. Physiol. Chem. », 208, 237 (1932).

nè si conoscono enzimi che vi esercitino azione di tipo nucleosidasico. L'unica osservazione in proposito che farebbe supporre l'esistenza di enzimi del genere è quella di Benedict⁽⁶⁾ relativa all'aumento dell'acido urico libero che si osserva nel sangue bovino col trascorrere del tempo: mentre l'acido urico totale (quello cioè determinato dopo idrolisi acida del filtrato aproteico) rimane costante, si ha un aumento progressivo della quota libera (filtrato aproteico senza idrolisi), che dopo 15 giorni (a temperatura ambiente) giunge ad eguagliare quella dell'acido urico totale, mostrando così una completa scissione del nucleoside. Per la riscontrata presenza di questo composto nel fegato bovino (loc. cit. 2) si è anche da qualche A.⁽⁷⁾ fatta l'ipotesi che in tale organo possa risiedere la nucleosidasi specifica. Per la mancanza peraltro di conoscenze migliori, il significato e la posizione del riboside urico nel metabolismo purinico costituiscono tuttora un problema insoluto, come anche recentemente osservano autorevoli ricercatori⁽⁸⁾. Che d'altra parte il chiarimento delle funzioni metaboliche di tale composto possa gettare nuova luce su alcuni importanti problemi, risulta soprattutto considerando due argomenti ad esso strettamente connessi: l'esistenza e la natura di una quota di acido urico *combinato* nel sangue dei mammiferi in genere e dell'uomo in particolare, e l'esistenza ed il tipo di meccanismi uricolitici nell'organismo umano. Quest'ultimo problema in maniera speciale potrebbe forse essere avviato verso la soluzione da uno studio completo del metabolismo del riboside urico: questa opinione viene oggi presa in considerazione da alcuni studiosi americani⁽⁹⁾ i quali, studiando il destino dell'acido urico isotopico somministrato all'uomo per via orale, e trovando un forte deficit nell'acido urico escreto, concludono, analogamente ad altri ricercatori⁽¹⁰⁾, che deve ammettersi la possibilità di sistemi uricolitici nell'uomo, e poichè non risultano esservi enzimi capaci di ossidare l'acido urico libero⁽¹¹⁾, indicano il riboside urico come possibile substrato per tali sistemi.

Metodi analitici di determinazione del nucleoside urico, può affermarsi che non esistano: chè tale non può considerarsi il procedimento di isolamento chimico dal sangue secondo Davis e collaboratori (loc. cit. 1), sia per il cospicuo volume di sangue e per il lungo tempo (4 giorni) occorrenti, sia, e soprattutto, per la resa certamente non quantitativa; nè i procedimenti di idrolisi acida e successiva determinazione dell'acido urico libero extra-formatosi sembrano, per lo meno nelle realizzazioni riferite^(12, 13) dare sufficienti garanzie di specificità e di esattezza. Si è pertanto pensato che la cromatografia di ripartizione su carta da filtro⁽¹⁴⁾, nelle modalità appresso riferite, potesse costituire un soddisfacente procedimento per il riconoscimento qualitativo e quantitativo del nucleoside urico.

(6) S. R. BENEDICT, « J. Biol. Chem. », 20, 633 (1915).

(7) H. M. KALCKAR, « J. Biol. Chem. », 167, 429 (1947).

(8) F. SCHLENK, « Adv. in Enzymol. », 9, 491 (1949).

(9) W. GEREN, A. BENDICH, O. BODANSKY, G. B. BROWN, « J. Biol. Chem. », 183, 21 (1950).

(10) J. D. BENEDICT, P. H. FORSHAM, DEWITT STETTEN, « J. Biol. Chem. », 181, 183 (1949).

(11) E. LEONE, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 22, 556 (1946).

(12) M. DELAVILLE, CH. M. JONES, « Bull. Soc. Chim. Biol. », 7, 785 (1925).

(13) CH. M. JONES, « Compt. Rend. Soc. Biol. », 93, 298 (1925).

(14) R. CONSDEN, A. H. GORDON, A. J. P. MARTIN, « Bioch. Journ. », 38, 224 (1944).

Nel campo, ogni giorno più vasto, delle applicazioni della cromatografia su carta da filtro, quella riguardante le purine e pirimidine occupa, a nostro avviso, una posizione particolare. Infatti, grazie agli spettri di assorbimento nell'ultravioletto, caratteristici e specifici per quasi ognuna delle basi puriniche e pirimidiniche e per i loro derivati, questi composti presentano, rispetto agli altri (aminoacidi, zuccheri, ecc.) i seguenti vantaggi nella determinazione cromatografica:

1° per la localizzazione delle macchie sul cromatogramma non è necessario fare uso di reattivi da spruzzare sul cromatogramma stesso, sfruttando invece procedimenti (fluorescenza, assorbimento nell'u. v.) che lasciano inalterata la zona di cromatogramma corrispondente alle macchie, permettendo così di eseguire ulteriori saggi di riconoscimento su tali zone;

2° estraendo con acqua le zone del cromatogramma corrispondenti alle macchie, e determinando la curva di assorbimento nell'u. v., si ha un riconoscimento *qualitativo* di grande specificità. Dal coefficiente di estinzione, misurato alla lunghezza d'onda corrispondente al massimo di assorbimento, si ha infine un dosaggio *quantitativo* di soddisfacente approssimazione.

Si comprende di conseguenza come ben presto, dopo i primi metodi⁽¹⁵⁾ per l'analisi cromatografica di purine e pirimidine, in cui tali composti erano svelati spruzzando sul cromatogramma nitrato mercurico, seguito da lavaggio con $(\text{NH}_4)_2\text{S}$, ed osservando la posizione delle macchie nere che ne derivavano, si siano proposti ed attuati procedimenti del tipo accennato prima, in cui le zone del cromatogramma corrispondenti alle macchie sono svelate o per mezzo della fluorescenza⁽¹⁶⁾, o con una sistematica analisi all'u. v. degli estratti acquosi di strisce progressivamente tagliate dal cromatogramma⁽¹⁷⁾, o fotografando questo con luce u. v. di determinata lunghezza d'onda. Quest'ultimo è il metodo proposto da Markham e Smith⁽¹⁸⁾, e, per la relativa semplicità e per la grande sensibilità, abbiamo voluto applicarlo al nostro caso. Gli Autori sfruttano il fatto che la carta da filtro usata per la cromatografia è relativamente trasparente ai raggi u. v. per cui questi, se diretti su una carta sensibile al bromuro al disopra della quale vi sia il cromatogramma, impressionano la carta, a meno che sul cromatogramma non incontrino macchie di purine o pirimidine, venendone assorbiti. Sviluppando la carta fotografica le purine e le pirimidine risultano come macchie bianche su fondo nero. In tal modo è possibile, usando un tipo di carta fotografica a forte contrasto, determinare quantità di basi puriniche o pirimidiniche anche inferiori al γ : si ha cioè una sensibilità ancora superiore a quella di una determinazione spettrofotometrica.

Prima di applicare al nucleoside urico la suddetta tecnica di Markham e Smith abbiamo voluto constatarne la riproducibilità. Abbiamo impiegato le seguenti sostanze: acido urico Merck, adenina, xantina, teofillina, teobromina, caffeina Hoffmann-La Roche, uracile Schuchardt. Come carta da filtro abbiamo

(15) E. VISCHER, E. CHARGAFF, « J. Biol. Chem. », 168, 781 (1947).

(16) E. R. HOLIDAY, E. A. JOHNSON, « Nature », 163, 216 (1949).

(17) R. D. HOTCHKISS, « J. Biol. Chem. », 175, 315 (1948).

(18) R. MARKHAM, J. D. SMITH, « Bioch. Journ. », 45, 294 (1949).

usato la Whatman n. 1 e come carta fotografica la Ilford Reflex Document n. 50; le fotografie erano sviluppate secondo la formula I. D. 36 (*). Come sorgente di luce u. v. abbiamo impiegato una lampada a vapori di mercurio della Ditta Gallois et Cie, tipo A, 3 amp., alimentata da corrente continua a 110 V. I raggi u. v. provenienti dalla lampada sono filtrati secondo Markham e Smith mediante due filtri, uno costituito da una soluzione di $\text{CoSO}_4 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$ 35 % e $\text{NiSO}_4 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$ 10 %, e l'altro da Cl_2 : sia la prima che il secondo sono contenuti in apparecchi di vetro di sezione cilindrica (ved. fig. 1) con le faccie perpendicolari ai raggi costituite da lastre di quarzo dello spessore di mm. 2: queste sono saldate alla parte in vetro mediante appositi mastici a base di pece e catrame. La lunghezza dei filtri, nel senso del tragitto dei raggi u. v., è di cm. 3,35 per quello liquido, e di cm. 3,5 per quello gassoso. Il diametro, per entrambi, è di cm. 2,5. Grazie a tali filtri, i raggi u. v. che ne escono corrispondono solo alle lunghezze d'onda tra 257 e 260 μ . Non disponendo di uno spettroscopio nell'u. v., abbiamo, come consigliato dagli Autori, fotografato un pezzo di carta da filtro su cui si erano depositi μ 10 di una soluzione di adenina ed altrettanti di una di acido urico a varia concentrazione corrispondenti rispettivamente a γ 1 e 5 di sostanza, allo scopo di controllare l'efficienza della lampada e dei filtri. I risultati ottenuti sono riprodotti dalla fig. 2. Il tempo di esposizione è stato in genere sui 5', a una distanza di 75 cm. dalla lampada. Tale tempo, notevolmente superiore a quello riferito dagli Autori inglesi (1'30" a 150 cm. di distanza) è probabilmente dovuto a un minor contenuto in raggi di 257-260 μ della lampada da noi usata.

Per la cromatografia, abbiamo realizzato, sia quella a tipo discendente, sia quella a tipo ascendente: quest'ultima specie nel caso di numerosi cromatogrammi

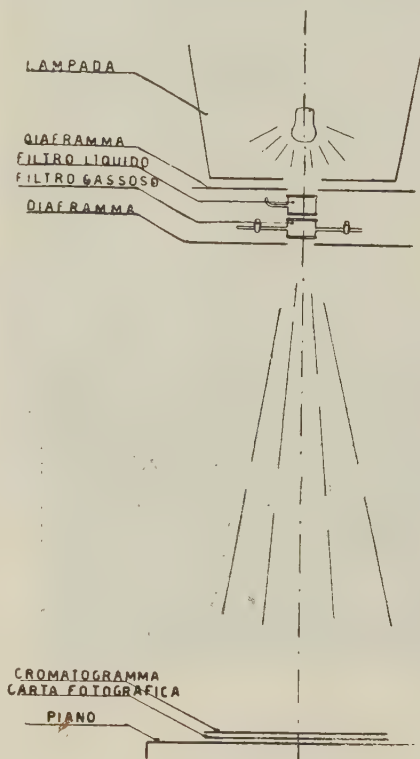


Fig. 1. - Schema del sistema di fotografia nell'ultravioletto (veduta anteriore).

(*) *Per il bagno di sviluppo:*

| | |
|-------------------------------------|-----------|
| metolo | g 3 |
| sodio solfito anidro | » 50 |
| idrochinone | » 12,5 |
| carbonato di sodio anidro | » 69,2 |
| bromuro di potassio | » 1,5 |
| acqua | a 2 litri |

Per il bagno di fissaggio:

| | |
|----------------------------------|------------|
| sodio iposolfito | g 200 |
| potassio metabisolfito | » 25 |
| acqua | a 1 litro. |

unidimensionali e sempre per quelli bidimensionali. La fig. 3 rappresenta la fotografia nell'u. v. di un cromatogramma unidimensionale, di tipo discendente, eseguito col sistema alcol butilico 77 %, acido formico 10 %, H_2O 13 %. I valori di R_F ottenuti sono qui appresso riportati, insieme a quelli riferiti da Markham e Smith (in parentesi) per gli stessi composti:

| | | | |
|-------------------|-------------|------------------|-------------|
| Acido urico . . . | 0,16 (0,14) | Teobromina . . . | 0,49 (0,47) |
| Xantina . . . | 0,24 (0,24) | Teofillina . . . | 0,66 (0,64) |
| Adenina . . . | 0,34 (0,33) | Caffeina . . . | 0,73 (0,71) |
| Uracile . . . | 0,39 (0,39) | | |

Si è scelto il sistema alcol butilico-acido formico perchè è quello in cui l'acido urico presenta il massimo valore di R_F (valore che con la maggior parte degli altri sistemi è uguale a 0).

Avendo così verificato la riproducibilità del metodo di Markham e Smith abbiamo ricercato le caratteristiche del nucleoside urico. Questo è stato isolato da sangue bovino secondo Davis e collaboratori (loc. cit. ⁽¹⁾). La sua identità e purezza sono state controllate, sia con la determinazione della curva d'assorbimento nell'u. v. allo spettrofotometro Beckman, tipo DU, sia con il dosaggio colorimetrico del riboso secondo Mejbaum ⁽¹⁹⁾.



Fig. 2. - Fotografia nell'u. v. di acido urico (I, γ I e δ), e adenina (II, γ I e δ), in volumi di μl 10 ogni macchia, su carta Whatman n. 1.

Cromatograficamente, col sistema alcol butilico-acido formico, il nucleoside mostra lo stesso valore di R_F dell'acido urico: abbiamo pertanto dovuto ricercare un sistema diverso che permettesse di differenziare i due composti. Tale sistema è costituito dall'alcol propilico al 60 % in H_2O : in esso acido urico e riboside mostrano valori di

R_F tali da permettere una buona differenziazione, come appare dai seguenti dati:

Valori di R_F in alcol propilico 60 %:

| | |
|-------------------|-------|
| Acido urico . . . | 0,47 |
| Nucleoside . . . | 0,57. |

La fig. 4 dimostra chiaramente come si possano, in un miscuglio di acido urico + nucleoside, distinguere nettamente l'uno dall'altro i due composti. Per la cromatografia bidimensionale, abbiamo scelto i due sistemi alcol butilico-acido formico ed alcol propilico 60 % nell'ordine, in modo che l'unica macchia, corrispondente al valore 0,14 circa di R_F in alcol butilico-acido formico, possa essere analizzata col secondo solvente per ricercare se sia presente l'acido urico, o il nucleoside, o entrambi.

Riconosciute fotograficamente le zone del cromatogramma in cui si sono localizzati il nucleoside o l'acido urico, tali zone sono fissate a matita sul cro-

(19) W. MEJBAUM, «Zeit. Physiol. Chem.», 258, 117 (1939).

matogramma stesso, sovrapponendolo esattamente alla fotografia e guardando per trasparenza contro una lampada di forte intensità (per ottenere una esatta localizzazione abbiamo sempre usato di tagliare irregolarmente piccole porzioni di carta dai margini laterali dei cromatogrammi: tali margini in tal modo marcati si fanno combaciare con la corrispondente immagine che di essi si ottiene sulla fotografia). Le zone così delimitate sono poi ritagliate e, suddivise in 2 o 3 striscette, poste ciascuna in un recipiente chiuso contenente ml. 3,5 di H_2O . Si pongono in termostato a 37° lasciandovele per 2 h e si portano poi gli estratti acquosi nelle cuvette di quarzo, di 1 cm. di lato, dello spettrofotometro Beckman, usando come prova in bianco un analogo estratto acquoso ottenuto da una zona di carta da filtro fotograficamente vuota. Nel caso dell'acido urico e del nucleoside, le curve di assorbimento nell'u. v. sono esattamente sovrapponibili come è la regola per tutti i nucleosidi rispetto alle relative basi puriniche o pirimidiniche libere (20). Se pertanto si desidera una ulteriore conferma

della identità del nucleoside, dopo eseguita al Beckman la curva di assorbimento e la determinazione del coefficiente di estinzione a $290 m\mu$, sugli stessi estratti si effettua la determinazione dei pentosi secondo Mejbaum. La positività della prova fornisce,

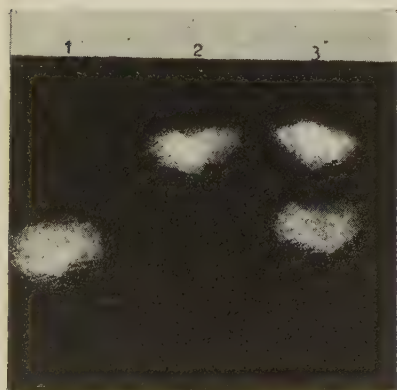


Fig. 4. - Cromatogramma discendente in alcol propilico 60% (particolare).

In 1: riboside urico; in 2: acido urico; in 3: riboside + acido urico.

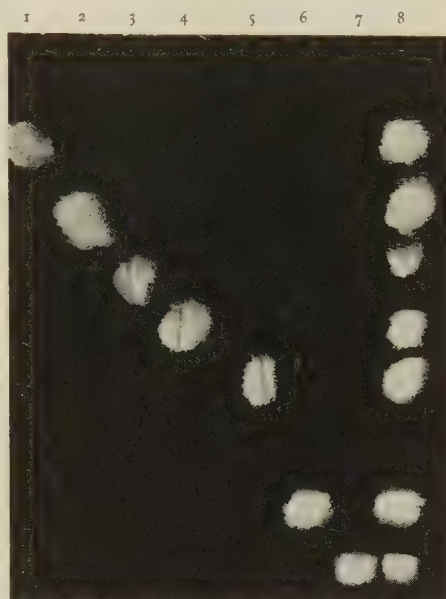


Fig. 3. - Cromatogramma discendente in alcol butilico-acido formico. Da 1 a 7 furono posti, ai punti di partenza corrispondenti:

1, acido urico; 2, xantina; 3, adenina; 4, uracile; 5, teobromina; 6, teofillina; 7, caffeina. Al punto n. 8, miscuglio di tutti i suddetti composti. Durata: 14 ore.

dopo i dati cromatografici e spettrofotometrici, la conferma conclusiva sulla natura del composto mentre dalla quantità di riboside determinata si può risalire al dosaggio del nucleoside, ottenendo valori che nelle nostre esperienze hanno sempre coinciso, con minime oscillazioni, con quelli ricavati dai dati spettrofotometrici.

Determinate in tal modo le caratteristiche cromatografiche del riboside urico, ci sembra possibile di poter affrontare lo studio del comportamento di questo composto nel sangue, sia bovino, sia, soprattutto, umano, allo scopo di chiarire il problema del suo significato metabolico, specie per quanto riguarda l'esistenza d'un'eventuale uricolisi nell'uomo.

(20) E. R. HOLIDAY, «Bioch. Journ.», 24, 619 (1930).

Patologia. — *Ricerche sulla liberazione da calore di acido nucleinico dei germi, in rapporto alla età delle culture* (*). Nota di PIETRO CANTELMO, presentata (**) dal Corrisp. L. CALIFANO.

È risultato che sottoponendo cellule batteriche alla azione del calore, si libera, nel liquido ambiente, acido nucleinico o, forse, la parte più labile e meno legata dell'acido nucleinico protoplasmatico.

La temperatura alla quale questo fenomeno ha inizio, temperatura che è varia nei diversi germi, pare che corrisponda alla temperatura di inattivazione di essi, per cui è da ritenere che il fenomeno messo in evidenza rappresenti uno dei meccanismi che intervengono nella inattivazione dei batteri al calore (Califano) ⁽¹⁾.

Il fenomeno è stato studiato con l'apprezzamento dell'assorbimento nell'ultravioletto del liquido di centrifugazione di sospensioni batteriche esposte alla azione del calore.

Le ricerche qui riferite dimostrano come vari la liberazione per mezzo del calore, dell'acido nucleinico da parte di germi a diverse epoche di sviluppo.

Osservazioni di Caspersson ⁽²⁾, di Malmgren e Hedén ⁽³⁾, a mezzo della ingegnosa metodica della microspettrofotografia dimostrano che i batteri, nelle loro diverse fasi (lag fase, fase logaritmica e fase di riposo) presentano contenuto differente di acido nucleinico.

È risultato che i batteri, durante la lag fase, hanno un contenuto in acido nucleinico maggiore che nella fase logaritmica; il contenuto minore si ha nei germi in fase di riposo.

Assai convincenti sono le fotografie contenute nella esposizione che Caspersson fece nel 1947 al «Simposio» sull'acido nucleinico a Cambridge, e quelle di Malmgren e Hedén.

Questi risultati contribuiscono a dare ulteriore appoggio alla nota teoria di Caspersson sulla importanza dell'acido nucleinico nella sintesi proteica, e perciò, nella moltiplicazione cellulare, ed aprono nuove vie alla indagine citologica batterica ed a quella immunologica, specie per quanto riguarda la costituzione antigena in rapporto all'età della cellula.

Poichè come si è detto, è risultato che l'acido nucleinico può essere liberato dalla cellula batterica a mezzo del calore, si è posto il problema del rapporto tra liberazione di acido nucleinico protoplasmatico da calore, ed età delle cellule.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1950.

(1) L. CALIFANO, *Ricerche sulla liberazione di acido nucleinico da cellule batteriche per azione del calore*. «Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei», vol. VIII, p. 94 (1950).

(2) T. CASPERSSON, «Symposia of the Society for experimental biology», vol. 1 p. 127 (1947).

(3) B. MALMGREN and G. C. HEDÉN, *Studies of the nucleotide metabolism of bacteria*. «Acta Path. et Microbiol. Scand.», vol. XXIV, p. 417 (1947).

TECNICA. — Si è sperimentato con l'*Escherichia coli* (ceppo 806, I. S. I.) da culture in agar glucosio o in brodo, e con lo *Staphylococcus aureus* da culture in agar glucosio.

Di tali germi si sono adoperate culture di varie età (4, 8, 12, 24 ore)

I germi venivano lavati tre volte in centrifuga con soluzione fisiologica e quindi sospesi anche in soluzione fisiologica.

Le sospensioni venivano portate alla stessa torbidità a mezzo del colorimetro di Klett Summerson.

Si contavano i germi di diverse ore di sviluppo ed aventi la stessa torbidità in camera di Thoma Zeiss con un microscopio fornito di ottica a contrasto di fase.

Quantità esattamente misurate ed eguali di tali sospensioni venivano sottoposte per dieci minuti primi all'azione del calore a varie temperature: 20°, 50°, 60°, 70° C.

Si centrifugavano quindi tali sospensioni a 16 mila giri (durata della centrifugazione circa mezz'ora) e si ottenevano così liquidi limpidi ed assolutamente privi di germi.

In essi si ricercava la presenza di acido nucleico con la indagine spettrofotometrica usando lo spettrofotometro di Beckman con lampada a idrogeno e vaschette di quarzo di un cm. di lato.

Si determinava l'assorbimento a lunghezze di onda comprese tra 2250 e 2800 Å, risalendo da 2250 a 2800 Å di 50 in 50.

Venivano costruite in tal modo grafiche, nelle quali erano rappresentate sulle ordinate le lunghezze di onda, e sulle ascisse, l'estinzione.

RISULTATI. — Dai risultati ottenuti si desume che le cellule di *E. coli* di 4 ore di sviluppo liberano, per azione del calore, quantità di acido nucleico maggiori di quelle liberate da germi da culture di 24 ore.

Per lo Stafilococco il massimo di liberazione di acido nucleico si raggiunge ad 8 ore di sviluppo.

Tale differenza può essere forse interpretata ammettendo che lo Stafilococco si prepari alla moltiplicazione in un lasso di tempo maggiore di quello occorrente alla *E. coli*.

Mentre a 60° C. dal *B. coli* si libera maggiore quantità di acido nucleico che non a 70° C., per lo Stafilococco accade l'inverso e cioè a 70° C. si ha liberazione più cospicua che a 60° C.

La più larga liberazione di acido nucleico dalle cellule giovani in confronto di quelle più adulte sta evidentemente ad indicare che l'acido nucleico è non solo contenuto in maggiore quantità nelle prime, ma, forse, anche più debolmente legato agli altri costituenti del corpo batterico.

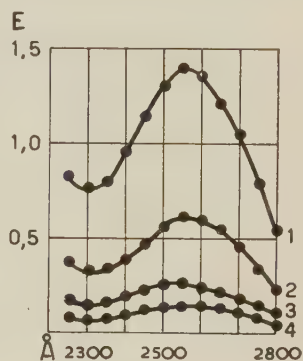


Fig. 1. — Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni di *Escherichia coli* tenute per 10 m' a 50° C.

Torbidità delle sospensioni 300 (Klett-Summerson)

- 1 = germi di 4h. di sviluppo. 390000/mm³
- 2 = germi di 8h. di sviluppo. 525000/mm³
- 3 = germi di 12h. di sviluppo. 600000/mm³
- 4 = germi di 24h. di sviluppo. 625000/mm³

Va notato che dalle conte dei germi risulta che, per eguali valori di torbidità di sospensioni di germi in età di sviluppo diversa, il numero di essi varia di molto, essendo minore nelle sospensioni a 4 ore di sviluppo ed aumentando a mano a mano che si arriva a quelle di 24 ore. Ciò perchè i germi giovani

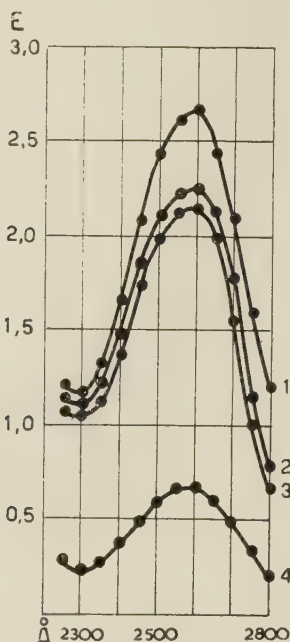


Fig. 2. - Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni di *Escherichia coli* tenute per 10 m' a 60° C.

Torbidità delle sospensioni 300 (Klett-Summerson)

1=germi di 4h. di sviluppo

2=germi di 8h. di sviluppo

3=germi di 12h. di sviluppo

4=germi di 24h. di sviluppo

Numero dei germi per mm³ come nella Fig. 1.

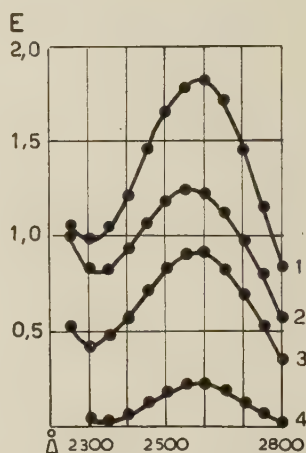


Fig. 3. - Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni di *Escherichia coli* tenute per 10 m' a 70° C.

Torbidità delle sospensioni 300 (Klett-Summerson)

1=germi di 4h. di sviluppo

2=germi di 8h. di sviluppo

3=germi di 12h. di sviluppo

4=germi di 24h. di sviluppo

Numero dei germi per mm³ come nella Fig. 1.

sono più grossi di quelli in fase di riposo, come si conosce già da varie ricerche e specialmente da quelle di Henrici (1928)⁽⁴⁾.

Da ciò si deduce che le determinazioni di opacità dei germi, quale metodo di misura del numero delle cellule, è corretto se si stimano culture dello stesso preciso periodo di sviluppo, ma non è valevole per culture di età differenti, in quelle più recenti corrispondendo cellule più grosse e quindi in concentrazioni minori. Le determinazioni spettrofotometriche qui riferite sono state, come si è detto, eseguite con sospensioni batteriche della stessa torbidità, ma a varie epoche di sviluppo, cioè a contenuto diverso in cellule, essendo più ricche le sospensioni da cultura di 24 ore in confronto delle più giovani.

(4) A. T. HENRICI, *Microbiology monographs*, vol. I Baltimore (1928).

La quantità di acido nucleinico liberata dal calore per una stessa torbidità è assai più elevata per le sospensioni delle cellule più giovani che per quelle di cellule adulte.

Ciò significa che, sebbene le cellule più giovani sieno contenute in minor numero delle adulte per una stessa torbidità, perdono, col calore, quantità di acido nucleinico assai superiore a quello ceduto dalle cellule adulte, per cui, se le prove si eseguono con sospensioni batteriche ad eguale contenuto in cellule ma, necessariamente, a diversa torbidità, le differenze riportate nelle grafiche andrebbero circa raddoppiate in valore.

Un'altra considerazione è inoltre opportuna e cioè che, a costituire una popolazione batterica, ad esempio di cultura di 24 ore, concorrono in massima parte cellule adulte e, in proporzioni minori, cellule giovani di poche ore di sviluppo, non essendosi ancora determinato il completo blocco bacteriostatico e, perciò, la liberazione al calore di acido nucleinico avviene per queste a temperature inferiori che

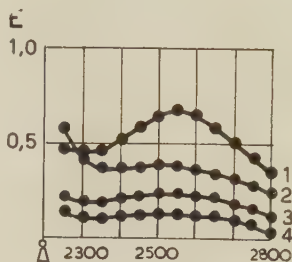


Fig. 4 - Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni di *Staphylococcus aureus* tenute per 10 m' a 50° C.

Torbidità delle sospensioni 200 (Klett-Summerson)

- 1=germi di 4h. di sviluppo. 210000/mm³
2=germi di 8h. di sviluppo. 340000/mm³
3=germi di 12h. di sviluppo. 420000/mm³
4=germi di 24h. di sviluppo. 550000/mm³

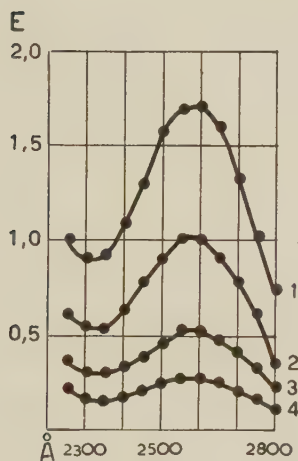


Fig. 5 - Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni di *Staphylococcus aureus* tenute per 10 m' a 60° C.

Torbidità delle sospensioni 200 (Klett-Summerson)

- 1=germi di 4h. di sviluppo
2=germi di 8h. di sviluppo
3=germi di 12h. di sviluppo
4=germi di 24h. di sviluppo

Numero dei germi per mm³ come nella Fig. 4.

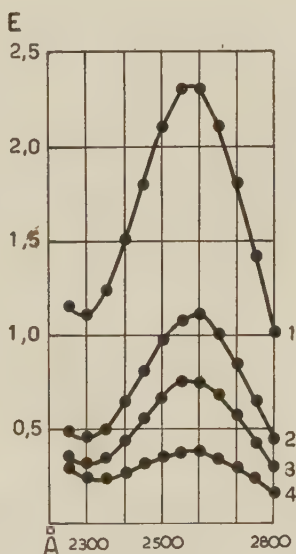


Fig. 6 - Curve di assorbimento del liquido di centrifugazione di sospensioni di *Staphylococcus aureus* tenute per 10 m' a 70° C.

Torbidità delle sospensioni 200 (Klett-Summerson)

- 1=germi di 4h. di sviluppo
2=germi di 8h. di sviluppo
3=germi di 12h. di sviluppo
4=germi di 24h. di sviluppo

Numero dei germi per mm³ come nella Fig. 4.

non per le cellule vecchie, onde il lieve assorbimento che si riscontra a temperature relativamente basse (per esempio 50° C.) è probabilmente non già espressione di tracce di acido nucleinico liberato da ciascuna cellula, ma piuttosto corrisponde a quello che si distacca dalle cellule giovani coesistenti nella sospensione batterica; le cellule adulte invece sono sensibili al fenomeno solo a temperature più elevate cioè a quella propria di inattivazione della specie batterica.

Essendo le cellule più giovani inattivabili a temperature inferiori a quelle utili per le cellule adulte, il criterio dell'inattivazione al calore deve tener conto anche della età della cultura.

Biologia. — *L'azione dell'acido pantotenico sopra i processi rigenerativi. (Esperimenti su larve di Anfibi Anuri)* (*). Nota (**) di LEO RAUNICH, presentata dal Corrisp. G. BRUNELLI.

Le nostre conoscenze sull'azione biologica dell'acido pantotenico sono ancora oggi tutt'altro che chiare. Si sa che esso esercita una notevole influenza sull'accrescimento di numerosi microrganismi e su vari animali da esperimento (Uccelli e Mammiferi), come hanno dimostrato numerosi lavori sperimentali che sono riportati nei lavori sintetici più recenti⁽¹⁾.

Date queste premesse, non mi è sembrato privo di interesse di studiare l'azione dell'acido pantotenico sopra un materiale in attiva crescita, come sarebbe un blastema rigenerativo. L'acido pantotenico infatti ha dimostrato di favorire l'accrescimento di colture in vitro, come dimostrato recentemente dal Gaglio⁽²⁾. Ho scelto perciò un materiale biologico particolarmente dotato di capacità rigenerative, ossia i girini degli Anfibi Anuri, che notoriamente hanno la capacità di rigenerare la coda, qualora questa venga amputata, entro un periodo più o meno breve, proporzionale alla temperatura ambiente e ad altri fattori, con modalità già note e su cui non è il caso di intrattenersi⁽³⁾. Si può quindi agevolmente controllare se l'acido pantotenico eserciti o meno un'azione sul processo rigenerativo, amputando a un sufficiente numero di girini (qualche centinaio) la coda, cercando quanto più possibile di tagliarla sempre al medesimo livello, e distribuendo

(*) Ricerche compiute presso l'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Bologna diretto dal Prof. P. Pasquini, con l'ausilio di un contributo del C. N. R. per il 1950.

(**) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1950.

(1) Vedi ad esempio il lavoro di S. ANGELICO e M. QUINTILIANI, *Contributo alla conoscenza dell'acido pantotenico*. «Rendiconti Istituto Superiore di Sanità», Roma, 12°, p. 788 (1949).

(2) M. GAGLIO, *Azione dell'acido pantotenico sull'accrescimento degli espianti dei tessuti*. «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», 22, 1100 (1946).

(3) Cfr. i lavori di T. H. MORGAN, *The physiology of regeneration*. «Journ. exp. Zool.», 3, 457 (1906); M. L. DURBAN, *An analysis of the rate of regeneration throughout the regenerative process*. «Journ. exp. Zool.», 7, 397 (1909); M. M. ELLIS, *The relation of the amount of tail regenerated to the amount of amount removed in tadpoles of Rana clamitans*. «Journ. exp. Zool.», 7, 421 (1909); H. PRZIBRAM, *Tierische Regeneration als Wachstumsbeschleunigung*. «Arch. Entw. Mech.», 45, 1 (1919); e numerosi altri.

questi girini operati in bacinelle di vetro, ed allevandone una parte in acqua pura (controlli), gli altri in soluzioni di varia concentrazione di acido pantotenico.

Le operazioni di amputazione sono state eseguite, in narcosi cloretonica, in bacinelle col fondo di paraffina nera, con un piccolo bisturi panciuto assai affilato, sotto il binoculare. I girini vennero indi trasferiti in una bacinella con acqua pura fino al loro risveglio, dopo di che si portarono, a gruppi di 10-20, in bacinelle più ampie; dato che lo spazio a disposizione dei girini, e la qualità e quantità di cibo influiscono notevolmente sul loro accrescimento, ebbi particolare cura di mettere tutti i girini nelle identiche condizioni, cioè in bacinelle identiche, con la stessa quantità di liquido di coltura e di alimento (polvere di ortica lavata e filtrata).

Come criterio di misura della velocità dell'accrescimento rigenerativo ho scelto dapprima la lunghezza del rigenerato; in seguito ho preferito, con un più esatto criterio, misurare direttamente la lunghezza totale del girino (dal muso all'apice della coda) e la lunghezza della sola coda (scegliendo come punto di partenza gli abbozzi degli arti posteriori). Le misurazioni sono state effettuate ogni 2-3 giorni su carta millimetrata sotto al binoculare, in narcosi cloretonica. Ho usato 200 girini di *Bufo vulgaris*, di circa 60 giorni; le concentrazioni di acido pantotenico (4) sono state le seguenti: 1 : 1.000, 1 : 5.000 e 1 : 10.000. Non ho avuto alcuna mortalità.

Data l'impossibilità tecnica di seguire l'accrescimento di ogni singolo girino separatamente, ho misurato volta per volta tutti i girini di ciascuna bacinella, ricavandone poi una misura d'accrescimento medio. Il metodo non può considerarsi rigorosamente esatto, tuttavia lo ritengo egualmente utile, dato che le differenze riscontrate sono state sensibilmente superiori alle normali variazioni della variabilità fluttuante.

Non mi dilungo ulteriormente sull'andamento degli esperimenti, e mi limito a riportare nella seguente tabella i risultati delle misurazioni iniziali e di quelle finali (le cifre riportate indicano la lunghezza della sola coda).

TABELLA I.

Serie A: 4 bacinelle di 20 girini ciascuna = totale 80 girini

» B: 4 » » 10 » » = » 40 »

» C: 4 » » 20 » » = » 80 »

totale 200 girini

| | Controlli | | | 1 : 1.000 | | | 1 : 5.000 | | | 1 : 10.000 | | |
|------------------|-----------|-----|-----|-----------|-----|------|-----------|-----|------|------------|-----|-------|
| | A | B | C | A | B | C | A | B | C | A | B | C |
| 15 maggio 1950 . | 6,1 | 6,5 | 7,2 | 6,7 | 7,1 | 6,7 | 6,56 | 7,0 | 6,9 | 6,7 | 6,7 | 7,1 |
| 24 maggio 1950 . | 8,1 | 8,5 | 9,5 | 9,2 | 9,8 | 9,23 | 9,25 | 9,5 | 9,65 | 9,54 | 9,5 | 10,05 |

(4) Che sotto forma di sale di calcio mi è stato cortesemente messo a disposizione dalla Casa Lepetit, che vivamente ringrazio.

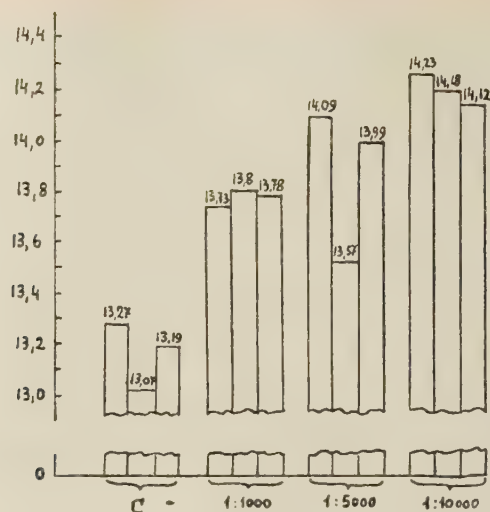


Fig. 1.

Tenendo ora presente che le medie delle lunghezze iniziali non erano naturalmente esattamente le stesse, occorre calcolare l'aumento di lunghezza in rapporto alla lunghezza originaria, secondo la formula

$$\Delta = \frac{l \times 10}{l_i}$$

in cui Δ rappresenta il rapporto di accrescimento, l la lunghezza raggiunta, l_i la lunghezza iniziale che viene così portata al valore 10.

Si ottengono così i seguenti valori per Δ :

Valori di Δ

| | | | | |
|----------|---------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Serie A: | $\Delta_C = 13,279$ | $\Delta_{1.000} = 13,731$ | $\Delta_{5.000} = 14,091$ | $\Delta_{10.000} = 14,239$ |
| » B: | » = 13,076 | » = 13,80 | » = 13,57 | » = 14,18 |
| » C: | » = 13,19 | » = 13,78 | » = 13,99 | » = 14,12 |

che sono rappresentati graficamente alla fig. 1 e da cui risulta che l'acido pantoténico esplica una netta azione acceleratrice sulla rigenerazione della coda dei girini.

TABELLA II.

Lunghezza del corpo (Serie A).

| | Controlli | 1 : 1.000 | 1 : 5.000 | 1 : 10.000 |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|------------|
| iniziale | 7,4 | 7,7 | 7,94 | 7,5 |
| finale | 7,2 | 7,3 | 7,66 | 7,38 |
| differenza | — 0,2 | — 0,4 | — 0,28 | — 0,12 |

L'aumento così chiaramente rilevabile di lunghezza rispetto ai controlli non è, a quanto pare, riconducibile semplicemente ad una maggiore crescita della mole corporea del girino, in quanto proprio la lunghezza del corpo ha presentato un lieve accorciamento durante il periodo rigenerativo, come risulta dalla tabella II.

Questi risultati, data la assoluta assenza di lavori sull'argomento, non possono necessariamente essere che di carattere preliminare. Restano infatti da colmare notevoli e numerose lacune, come il consumo di acido pantotenico in ogni vaschetta, la quantità di acido pantotenico presente normalmente nei liquidi di allevamento (rispettivamente nell'alimento), e moltissime altre questioni che dovranno e potranno essere risolte solamente con lo svolgimento di questo lavoro. La sola conclusione certa che per ora si può trarre dai presenti esperimenti è che l'aggiunta di pantotenato di Ca ai liquidi di allevamento di girini di Anuri con coda in rigenerazione esercita una indiscutibile azione accelerante sul processo rigenerativo.

Enzimologia. — *Curva dell'attività fosforilasica durante il ciclo biologico del tubero di patata*^(*). Nota^(**) di ERASMO MARRÈ e LUCIANA FELICI, presentata dal Socio U. LOMBROSO.

Il problema del ricambio dell'amido nella pianta, problema di cui non è necessario sottolineare l'entità e l'importanza, è stato finora studiato, nel suo aspetto enzimatico, esclusivamente in rapporto alle α e β amilasi. In tal senso abbiamo anche noi orientato le nostre ricerche sui fenomeni correlativi che regolano il comportamento delle riserve amilacee del frutto e del fiore (Marrè⁽¹⁾). Ma dopo la scoperta da parte di Cori della fosforilasi animale e della sua importanza nel ricambio del glicogeno e dopo i lavori di Hanes^(2, 3), Green⁽⁴⁾, Haworth e collaboratori⁽⁵⁾, che ritrovano nella pianta un fermento con caratteristiche sostanzialmente simili a quelle della fosforilasi di Cori, il problema del ricambio dell'amido deve essere necessariamente ripreso alla luce del ruolo che in esso esplica questo enzima.

In questo lavoro ci siamo proposti la ricerca di un eventuale rapporto tra l'attività della fosforilasi vegetale e fasi, rispettivamente, di accumulo (sintesi) e di mobilitazione (lisi) dell'amido: in altri termini, la ricerca di una partecipazione differenziale del fermento ai due opposti processi.

Il tubero di patata ci è apparso come materiale particolarmente adatto a questo scopo, con la sua ben definita fase di accumulo nel periodo di crescita e con l'altrettanto ben definita fase di dissoluzione della riserva in amido alla germinazione; periodo, questo ultimo in cui, d'altro lato, i giovani germogli divengono

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto botanico « Hanbury » dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1950.

(1) E. MARRÈ, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », XXIII, 12 (1947); XXXIV, 5 (1948); XXXV, 3, (1949).

(2) C. S. HANES, « Proc. Roy. Soc. », B. 128, p. 421 (1940).

(3) C. S. HANES, « Proc. Roy. Soc. », B. 129, p. 147 (1940).

(4) D. E. GREEN, and P. K. STUMPF, « Journ. Biol. Chem. », 142, p. 355 (1942).

(5) W. N. HAWORTH, S. PEAT, and E. J. BOURNE, « Nature », 154, p. 236 (1944).

a loro volta altro prezioso materiale di esperienza, con il loro primo intenso accumulo amilaceo durante lo sviluppo iniziale (fino a una lunghezza di 15-20 mm.), e la sua successiva rapida lisi. Inoltre, per la ricerca propostaci, il tubero di patata sembrava, in partenza, particolarmente adatto per la scarsità dell'attività amilasica (Doby⁽⁶⁾) e per la pratica assenza (almeno durante la fase di riposo) di un'attività fosfoglicomutaseica (Hanes⁽³⁾).

Il dosaggio dell'attività fosforilasica nei vari stadi ci ha posti di fronte a problemi tecnici di una certa difficoltà. Già dalle prime prove abbiamo dovuto desistere dall'idea di poter dosare l'enzima purificato mediante precipitazione frazionata con $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$, poichè la percentuale di attività perduta durante il processo appariva variare in modo incontrollato, da stadio a stadio.

Dopo ripetuti tentativi il metodo più sicuro e meno soggetto a interferenze, almeno per questo materiale, ci è apparso il dosaggio del fosforo inorganico liberato nella reazione Glucosio I fosfato \rightarrow Amido + P inorganico, eseguito in condizioni simili a quelle proposte da Cori⁽⁷⁾ per la fosforilasi degli estratti grezzi di muscolo, e precisamente impiegando estratti molto diluiti (eliminazione dell'interferenza fosforilasica, soprattutto negli stadi più giovani), e proteggendo il fermento con cisteina. Complessivamente, il nostro procedimento si può così riassumere: I) estrazione rapida con acqua distillata; II) centrifugazione e diluizione del sopranatante fino a un titolo dell'1-2 % del peso fresco, mediante tampone al citrato, cui al momento erano stati aggiunti: cloridrato di cisteina neutralizzato con NaOH, amido solubile Merck, Gl. I fosfato in quantità tali che le concentrazioni finali fossero, rispettivamente, 0,03 M, 0,6 % e 0,6 %. Quindi si procedeva a una prima determinazione del P libero (metodo di Briggs⁽⁸⁾, nelle condizioni consigliate da Zambotti⁽⁹⁾) e, successivamente, a una seconda, dopo permanenza per 20' in termostato a 30 gradi. La differenza tra i due valori fornisce la misura dell'attività fosforilasica.

Nelle condizioni sopra descritte, la quantità di P liberato risulta soddisfacentemente proporzionale alla concentrazione del fermento, non si rilevano sensibili interferenze fosfatasiche e fosfoglicomutaseiche, e anche l'attività della β amilasi, di per sé debole nel tubero, appare ridotta al punto di non destare preoccupazioni ai fini dell'esattezza dei risultati; così pure la quantità del fosforo inizialmente presente, e di quello liberatosi, nell'intervallo da noi prescelto, sono sufficientemente piccole da non influenzare la velocità di reazione.

Il glucosio I fosfato usato come substrato era stato da noi preparato secondo il metodo di Hanes⁽³⁾, o la sua modifica di Sumner e Somers⁽¹⁰⁾ e appariva praticamente puro da destrine, fosfati e esteri esosiofosforici riducenti.

Come è ovvio, la ricerca è stata preceduta da una serie di determinazioni preliminari, allo scopo di definire la variabilità del materiale, sia come variabilità individuale dei singoli tuberi, sia, nel medesimo tubero, in rapporto alla maggiore o minore vicinanza alle gemme. Mentre la variabilità individuale è apparsa quasi

(6) G. DOBY, « Bioch. Zeit. », 67, p. 166 (1914).

(7) G. T. CORI, « Journ. Biol. Chem. », 158, p. 2 (1945).

(8) A. P. BRIGGS, « Journ. Biol. Chem. », 59, p. 255 (1924).

(9) V. ZAMBOTTI, « Mikrochemie », 24, p. 113 (1939).

(10) J. B. SUMNER, and G. F. SOMERS, « Arch. of Bioch. », 4, p. 11 (1943).

trascurabile, notevole invece sembra essere l'importanza del fattore topografico, in quanto, nei territori più vicini alle gemme, non sappiamo se per ragioni strutturali o fisiologiche, la fisionomia enzimatica presenta, da caso a caso, una variabilità che contrasta con la larga costanza offerta dalla massa del tubero situata al polo opposto: massa che può quindi fornirci la fisionomia più essenziale del tessuto, indipendentemente da azioni locali dei singoli centri di sviluppo.

In base a questi risultati, i dosaggi sono stati costantemente eseguiti su questo territorio, prelevando il tessuto da esaminare su un settore compreso tra la superficie e la zona centrale. Per ogni estratto, si impiegavano campioni di non meno di 4 tuberi diversi. La varietà scelta, per la sua maggiore omogeneità, è stata quella detta di Torriglia.

Accanto alle ricerche sui tuberi, altre sono state condotte sui germogli; il loro confronto si presta a considerazioni di particolare interesse. Per quanto riguarda i primi, abbiamo seguito: *a)* sui vecchi, gli stadi successivi, dal momento precedente la semina fino alle ultime tappe della germinazione; *b)* sui giovani, le fasi progressive di accrescimento e maturazione. Per quanto concerne i germogli la scelta degli stadii è stata guidata dal fatto, sopra riferito, della prima iniziale carica d'amido e della successiva rapida lisi dello stesso, che subentra nel momento di massimo accrescimento per distensione dei fusticini ancora sotterranei.

Per ogni serie di determinazioni, i dosaggi venivano eseguiti contemporaneamente, onde aver materiale in identiche condizioni di ambiente. A questo scopo, si era proceduto alla semina, a intervalli opportunamente scalati, di patate di un medesimo lotto, in modo da disporre al momento voluto di tutti gli stadi desiderati.

Riassumiamo nel grafico e nella seguente tabella i risultati di due serie complete di determinazioni, avvertendo che numerose altre, eseguite su intervalli parziali del ciclo vengono a confermarne in pieno l'andamento.

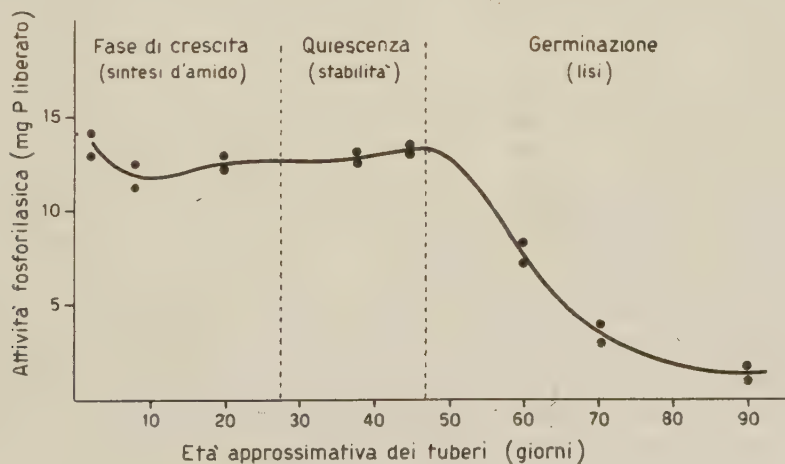


Fig. 1. — Andamento dell'attività fosforilasica durante il ciclo biologico del tubero di patata (ricostruito dalla tabella).

Come risulta dalle curve, i dati si allineano con un andamento notevolmente regolare.

Patate della varietà « Torriglia » seminate a vari intervalli.

Composizione dell'incubato: tessuto 1 %, GI-I fosfato 0,6 %, amido sol. 0,6 %, Tampone al citrato pH 6,2 20 %, Cisteina cloridr. neutralizzata 0,03 M. Temperatura 30 gradi C.

| STADIO DEI TUBERI | Attività fosforilasica espressa in mg. di P inorganico liberati da 10 gr. di tessuto fresco in 20' a 30 gradi | |
|--|---|---------------|
| | Primo lotto | Secondo lotto |
| A) <i>Tuberi vecchi.</i> | | |
| I) Fine del periodo di quiescenza, 10 giorni prima della semina | 13 | 13,2 |
| II) Alla semina | 13,5 | 13,4 |
| III) 15 giorni dopo. (Amido in lenta mobilitazione) | 7,1 | 8,3 |
| IV) Dopo 25 giorni. (Amido in rapida lisi) | 3,9 | 2,8 |
| V) Dopo 45 giorni. (Amido quasi scomparso, nuovi tuberi in avanzato sviluppo). | 1,1 | 1,3 |
| B) <i>Tuberi neoformati.</i> | | |
| I) Diametro mm. 3-6 | 14,3 | 13 |
| II) Diametro mm. 7-12 | 12,6 | 11 |
| III) Diametro mm. 35-40 | 13 | 12,7 |
| C) <i>Giovani germogli.</i> | | |
| I) Lunghezza mm. 3-5, attiva sintesi d'amido | 9,1 | |
| II) mm. 8,12, amido stazionario | 6,9 | |
| III) mm. 15,30, amido in lisi | 3,8 | |
| IV) mm. 40-60, amido quasi scomparso | 1,4 | |
| V) mm. 80-100, amido in lieve ripresa, sviluppo delle prime foglie | 1,7 | |

Nel tubero un elevato livello fosforilasico corrisponde sia a tutto il periodo di accumulo (sintesi), sia a quello di riposo, caratterizzato da un'alta carica d'amido e da relativamente bassi valori degli zuccheri solubili. È il passaggio alla fase di smobilitazione della riserva, dopo la semina, a germinazione avviata, il momento che segna un brusco cambiamento di fisionomia enzimatica, con un'improvvisa rapida caduta dell'attività del fermento. In altri termini, alla fase di sintesi o di stabilità d'amido corrisponde nel tubero un'intensa attività fosforilasica, alla fase di lisi una forte depressione della medesima.

Un tale rapporto, se può dettagliatamente essere messo in evidenza nel tubero, dove facili a individuarsi sono le tre tappe distinte di accumulo, di stasi e di lisi, della riserva glucidica, riappare, sia pure su più breve ampiezza, nel germoglio, dove la fosforilasi è particolarmente vivace nel primo periodo, di attiva carica amilacea, mentre si deprime nel secondo, di rapida mobilitazione dell'amido.

Una simile convergenza di comportamento fra tessuti a fisionomia così profondamente diversa viene ad assumere un particolarissimo interesse, indicandoci come questo parallelismo tra movimento dell'amido e facies fosforilasica sia espressione diretta del gioco d'azione del fermento, indipendente dalle particolari condizioni contingenti del tessuto.

Dai nostri dati, emerge dunque un evidente rapporto tra stato delle riserve glucidiche e attività della fosforilasi, nel senso che il fermento sembra essere essenzialmente interessato alla sintesi e al mantenimento di un'alta carica d'amido. Ulteriore luce sul significato e sulla natura di questo rapporto potrà venire dal confronto tra il comportamento della fosforilasi e quello dell'altra componente enzimatica interessata al ricambio dell'amido, il sistema amilasico; argomento su cui abbiamo attualmente in corso altre ricerche.

Biochimica. — *Contributo allo studio dell'azoto proteico di tumori umani nei rapporti col tessuto matrice*^(*). Nota ^(**) di DOMENICO GIGANTE, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Le proteine tumorali sono state studiate con vari metodi di indagine e specie con le tecniche di frazionatura. P. Rondoni ⁽¹⁾, adottando il procedimento di Luck ⁽²⁾, che permette lo studio delle proteine estraibili con soluzioni saline e successivamente di quelle estraibili con soluzioni alcaline, ha esaminato 12 sarcomi da benzopirene del ratto e in confronto il tessuto matrice, rappresentato dalla cute e dal sottocutaneo, ed ha potuto concludere che le proteine sono nel tumore più facilmente estraibili mediante soluzioni saline ed alcaline.

Abbiamo ritenuto utile estendere queste ricerche alla patologia umana, e studiare con lo stesso metodo le proteine di tessuti neoplastici, e comparativamente dei tessuti matrice.

TECNICA. — Il materiale da esaminare veniva prelevato all'Istituto Regina Elena per lo studio e la cura dei tumori e agli Ospedali Riuniti di Roma, al termine di interventi chirurgici, o più raramente nel corso di riscontri autoptici. Si procedeva quindi ad accurata preparazione del pezzo, ed il tessuto neoplastico veniva separato dai tessuti vicini. Nel contempo si prelevava il relativo tessuto matrice, il più possibile a distanza dal tumore. Preparati così i frammenti da esaminare, questi venivano pesati con bilancia di precisione, quindi tagliuzzati ed accuratamente pestati in mortaio: tutte queste manipolazioni avevano in genere una durata non superiore ad un'ora. Quindi si procedeva alla preparazione degli estratti secondo la seguente tecnica: nel mortaio alla poltiglia di tessuto si aggiungeva, continuando a pestare, una soluzione di NaCl al 10 %, in quantità

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica della Università di Roma durante gli anni 1945-1946.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1950.

(1) P. RONDONI, «H. S. Zeitschr. für phys. Chem.», 256, 102 (1940).

(2) J. M. LUCK, «Journ. of biol. Chem.», 115, 491 (1936).

dieci volte maggiore del peso del tessuto in esame. Dopo 4-5 ore di riposo in ghiacciaia, si filtrava e al residuo si tornava ad aggiungere la soluzione di NaCl al 10 %, in quantità cinque volte maggiore del peso iniziale del tessuto, e si lasciava pernottare in ghiacciaia. La mattina successiva, si filtrava nuovamente, ed il filtrato veniva unito alla soluzione precedente, anch'essa conservata durante la notte in ghiacciaia: si aveva così un estratto salino, contenente le frazioni solubili in NaCl. Al restante tessuto veniva aggiunta quindi una soluzione di NaOH al 0,25 %, in quantità dieci volte maggiori al peso iniziale del tessuto, si lasciava 4-5 ore in ghiacciaia, quindi si filtrava ed al residuo si aggiungeva cinque volte il peso di NaOH al 0,25 %: si lasciava quindi pernottare in ghiacciaia. Il mattino successivo si filtrava, e il filtrato veniva aggiunto al precedente: si otteneva un estratto alcalino contenente le frazioni solubili in NaOH.

In ogni estratto fu determinato, col metodo di Kjeldahl, l'azoto totale, e l'azoto non proteico dopo precipitazione con acido tricloroacetico al 10 %: la determinazione dell'acido solforico in eccesso si faceva titolandolo con una soluzione 0,1 n di idrato sodico, usando come indicatore il metilarancio. I risultati sono espressi in mg di azoto per 100 cc. di estratto.

Frammenti del tessuto neoplastico e di origine venivano fissati in formalina e successivamente esaminati istologicamente ad un duplice scopo: il primo di studiare la struttura istopatologica del tumore, il secondo di controllare che nel tessuto matrice non vi fosse presenza di infiltrazioni tumorali.

Pei tumori della mammella, come tessuto di origine, abbiamo esaminato la ghiandola mammaria, pei fibromiomi dell'utero invece il miometrio, pei cancro dello stomaco e del retto le rispettive mucose. Negli epitelomi cutanei, come tessuto matrice, fu esaminata la pelle. Per gli epitelomi dell'utero e per i sarcomi non fu possibile invece il prelievo del tessuto matrice normale e per questi casi ci limitiamo a riferire i dati relativi al solo tessuto neoplastico, essendoci sembrato interessante anche il confronto fra i diversi tessuti tumorali a seconda della sede e del tipo istologico.

RISULTATI SPERIMENTALI. - Riportiamo in tabella solo i valori medi dei 42 casi esaminati, che bene sono espressione dei risultati conseguiti. Infatti le differenze osservate nei vari tumori dello stesso tipo istologico e della stessa sede furono in genere lievi e solo eccezionalmente si discostavano notevolmente in più o in meno dei valori medi. Ad esempio nei 12 epitelomi della mammella in 11 casi i valori dell'azoto proteico nelle due frazioni variavano da quelli medi di $\text{mg} \pm 5$ e solo in un caso superavano di circa $+8$; analogo è stato il comportamento per i tumori ad altra sede, eccetto che nei tre sarcomi osservati, nei quali mentre i valori di azoto proteico dell'estratto salino differivano fra loro di $\text{mg} \pm 4$, quelli dell'estratto alcalino erano molto vari e precisamente di $\text{mg} 56,34, 37,15, 21,79$.

Differenze invece sensibili si sono avute nei tumori a seconda della sede e del diverso tipo istologico: di solito i valori più alti furono osservati negli epitelomi della cute e nei linfosarcomi, i più bassi nei tumori del retto. Confrontando poi i dati ottenuti per la frazione salina e per quella alcalina di estratti di tumori con i

rispettivi dati relativi agli estratti di tessuto matrice, eseguiti in maniera del tutto eguale, si può constatare chiaramente che questi ultimi sono nettamente più bassi. Ciò appare già dal confronto fra le medie riportate nella tabella, che del resto è fedele indice dei risultati conseguiti in tutti i singoli casi. Infatti ad esempio negli estratti di ghiandola mammaria, si è trovato un contenuto in azoto proteico di circa mg 12 in meno rispetto agli epitelomi della mammella, per la mucosa gastrica di circa mg 10 in meno rispetto agli epitelomi dello stomaco e per la pelle di circa mg 16 in meno rispetto agli epitelomi cutanei. Nei singoli casi le differenze trovate sono state molto vicine per le due frazioni. Solo nei fibromiomi dell'utero le differenze con il miometrio sono state meno sensibili, specie per la frazione alcali-solubile.

TABELLA.

| TESSUTO | N. casi esaminati | Contenuto medio in mg N per 100 cc di estratto | | | |
|------------------------|----------------------|--|------------|-------------------|------------|
| | | Estratto salino | | Estratto alcalino | |
| | | N totale | N proteico | N totale | N proteico |
| Cancro mammella . . | 12 | 41.88 | 31.53 | 33.52 | 25.38 |
| Ghiandola mammaria | | 24.42 | 19.67 | 18.59 | 12.72 |
| Cancro stomaco . . . | 4 | 40.91 | 32.16 | 41.65 | 33.23 |
| Mucosa gastrica . . . | | 31.56 | 24.35 | 30.83 | 24.82 |
| Cancro retto | 4 | 28.84 | 22.66 | 29.61 | 22.12 |
| Mucosa rettale | | 22.34 | 16.84 | 21.78 | 17.44 |
| Cancro cute | 5 | 46.43 | 40.99 | 44.20 | 38.79 |
| Pelle | | 36.29 | 22.63 | 28.08 | 22.86 |
| Cancro utero (corpo) | 2 | 45.57 | 31.52 | 50.98 | 39.25 |
| Cancro utero (portio) | 3 | 43.49 | 32.83 | 42.90 | 33.07 |
| Seminoma | 2 | 46.08 | 32.10 | 51.42 | 36.20 |
| Testicolo | | 29.95 | 26.22 | 45.05 | 32.64 |
| Linfosarcoma | 2 | 56.42 | 38.95 | 53.55 | 44.87 |
| Sarcomi polimorfi . . | 3 | 42.90 | 37.58 | 39.47 | 33.28 |
| Fibromioma utero . . | 5 | 38.95 | 31.10 | 33.49 | 26.54 |
| Miometrio | | 33.95 | 25.67 | 35.28 | 25.24 |

Questi risultati concordano con quelli ottenuti dal Rondoni per i tumori sperimentali da benzopirene nel ratto, e dimostrano che il contenuto in azoto proteico è maggiore negli estratti di tumori che nei tessuti normali. In altri termini il tessuto neoplastico dimostra comparativamente al tessuto normale matrice, di contenere una maggiore quantità di proteine estraibili con soluzioni saline e alcaline, e pertanto si può ritenere che nel tumore, rispetto al tessuto normale, o le proteine siano legate più labilmente, o vi sia in effetti un maggiore contenuto proteico.

Fisiologia. — *Contributo alla conoscenza dei rapporti tra tiroide e termoregolazione. (Prime osservazioni sui ratti)* (*). Nota (**) di GAETANO LIVREA, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Nel 1943, G. Mansfeld (1) ha affermato che la regolazione della temperatura corporea contro il caldo è accompagnata dalla secrezione, da parte della tiroide, di sostanze che deprimono i processi ossidativi (2).

Le prove principali a sostegno di quest'affermazione sarebbero le seguenti (3, 4):

a) il siero di sangue degli animali esposti ad elevate temperature, iniettato agli animali normali, diminuisce in questi il livello dei processi ossidativi;

b) la sensibilità dell'organismo alla tiroxina durante i mesi marzo-novembre è molto diminuita ed è necessaria una dose tripla di tiroxina per ottenere quell'aumento delle combustioni che d'inverno si ottiene con una dose;

c) l'ablazione della tiroide determina negli animali una sensibilità alla tiroxina, che è uguale sia nei mesi estivi che invernali;

d) è possibile preparare per idrolisi un estratto attivo della ghiandola tiroide, il quale abbassa: 1° la notevole sensibilità alla tiroxina presentata dagli animali nei mesi invernali, 2° il livello delle ossidazioni negli animali normali, 3° l'aumento delle ossidazioni degli animali trattati con tiroxina.

Sarebbe stato dimostrato da Mansfeld che l'attività degli estratti è dovuta all'azione di due sostanze, le quali sono state denominate termotirina A e B. La prima è secreta ogni qualvolta l'organismo è esposto alle temperature elevate (ormone del raffreddamento), la seconda è secreta soltanto durante i mesi estivi (ormone tiroideo estivo).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1950.

(1) G. MANSFELD, *Die hormone der Schilddruse und ihre Wirkungen*. Benno Schwabe & CO, Basel, 1943.

(2) G. MANSFELD, nel suo libro citato, non solo afferma questa sin oggi insospettata funzione della tiroide, ma ci pone di fronte a tutta una serie di conclusioni rivoluzionarie sulle funzioni di questa ghiandola.

Tali conclusioni, poggiate su basi sperimentali solide, o in apparenza tali, avranno, se confermate, un significato ed un'importanza pratica tanto grande quanto stupefacente è la loro eterodossia. Noi non possiamo addentrarci in una disamina del volumetto di Mansfeld e ci limitiamo a segnalarne le principali affermazioni.

La tiroide, secondo Mansfeld, non produce un solo ormone, bensì quattro; due sono le *termotirine*, delle quali particolarmente ci interessiamo nel corso del nostro articolo; uno è il cosiddetto *ormone mielotropico*, connesso con la formazione del sangue; il quarto è la vecchia *tiroxina*. Questa però non è del tutto l'ormone che noi conoscevamo. Eleva, sì, il consumo di ossigeno, agendo sulle cellule, ma ad esse perviene non per la via del sangue, bensì lentamente per la via dei nervi. Essa inoltre agisce sull'ipofisi, causando la produzione di un ormone sinora sconosciuto, il quale per via ematica innalza il consumo di ossigeno dei muscoli a riposo. Infine una sua ultima attività ancora più complicata è rappresentata dalle interrelazioni con le termotirine. Su queste interrelazioni faremo qualche cenno nel corso del nostro articolo.

(3) A. MANSFELD, «Nature», 157, 491 (1946).

(4) A. MANSFELD, «Schweiz. med. Wschr.», 76, 439 (1946).

Nel 1946, A. Mansfeld ha comunicato che le due termotirine sono state isolate allo stato cristallino, sia dalla tiroide che dai sieri umani e da quelli degli animali. La formula empirica, calcolata in base all'analisi elementare, sarebbe per la termotirina A: $C_{20}H_{42}O$ o $C_{20}H_{40}O$, e per la termotirina B: $C_{20}H_{42}$.

I pesi molecolari determinati crioscopicamente in exaltone sono stati: termotirina A, 290 (calc. per $C_{20}H_{40}O$, 296); termotirina B, 277 (calc. per $C_{20}H_{42}$, 282).

Sebbene gli effetti fisiologici del caldo e del freddo e i fattori endocrini della termoregolazione, con particolare riguardo alla tiroide, compresi gli effetti della tiroidectomia e della tiroparatiroidectomia, siano stati largamente studiati dal 1943 al 1949 (5-9), nessuno, per quanto ci consta, ad eccezione di B. Berde (10-15), ha soffermato la sua attenzione sulle affermazioni di Mansfeld. Selye (16), nella 2ª edizione del suo Manuale di Endocrinologia, che pur racchiude le più importanti scoperte endocrinologiche pubblicate tra il 1947 e 1949, tace completamente di questa nuova e insospettata proprietà della tiroide. Lo stesso dicasi di Means ed altri (17) in un *symposium* pubblicato nel 1949, sulla «funzione della tiroide quale appare con i più recenti metodi di studio».

Ed ecco ora i contributi apportati da B. Berde. Egli ha dimostrato (15) che la somministrazione di metiltiouracile ai cani e ai conigli (gr. 0.10/pro chilo per 4 settimane) «inibisce non solo la formazione di tiroxina ma anche quella di termotirina A». Difatti l'esposizione degli animali così trattati a temperatura di 34-35° per 5 ore porta ad un innalzamento della loro temperatura corporea di 0,5-1,5° C. ed il loro siero ricavato al termine dell'esposizione all'anzidetta temperatura ed iniettato in dose di 2,5 cc. ai ratti normali, non riduce il consumo di O_2 di questi. Invece tale riduzione, sebbene di entità variabile dal 18 al 48 %, viene prodotta dall'iniezione delle stesse quantità di siero ricavato da cani e conigli non trattati ed esposti a temperatura di 34-35° C. per 5 ore.

Da queste osservazioni, e poichè la termotirina A non contiene iodio, Berde ha tratto giustamente anche la conclusione che «l'azione dei composti tiouracilici non può essere esclusivamente un'inibizione dei processi di fissazione dello iodio», ma si estende verosimilmente anche alle altre funzioni della tiroide.

In articoli precedenti, Berde aveva dimostrato (11-14) che:

a) la tolleranza al calore delle cavie tiroidectomizzate e poste in termostato a 34-35° è ridotta - proprio come quella degli animali ai quali si somministra metiltiouracile;

b) la deficienza di tolleranza al calore di questi animali non è corretta dalla somministrazione di tiroxina, anzi, al contrario, la somministrazione di questo ormone aumenta ulteriormente l'altezza e la durata dell'innalzamento della temperatura corporea;

(5) J. FIELD and V. HALL, *Physiological effects of heat and cold*. «Ann. Rev. of Phys.» (1944).

(6) A. HEMINGWAY, *Physiological effects of heat and cold*. «Ann. Rev. of Phys.», 1945.

(7) D. J. INGLE, *Metabolic functions of the endocrine system*. «Ann. Rev. of Phys.», 1945,

(8) J. R. BROBECK, *Physiology of heat and cold*. «Ann. Rev. of Phys.», 1946.

(9) F. D. W. LUKENS, *Metabolic functions of the endocrine glands*. «Ann. Rev. of Phys.» (1947).

(10) B. BERDE, «Exper.», 2, 498 (1946).

(11) B. BERDE, «Hungarica Acta Physiologica», 1, 52 (1947).

(12) B. BERDE, «Nature», 159, 748 (1947).

(13) B. BERDE, «Hungarica Acta Physiologica», 1, 62 (1947).

(14) B. BERDE, «Exper.», 3, 245 (1947).

(15) B. BERDE, «Exper.», 3, 500 (1947).

(16) H. SELYE, *Textbook of Endocrinology*. Second Edition, 1949. «Acta Endocrin. Inc.», Montreal, Canada.

(17) J. H. MEANS e al., *Thyroid Function as Disclosed by Newer Methods of Study*. «Annals New York Academy of Sciences», 50, art. 5, pp. 279-508 (1949).

c) la ridotta tolleranza al calore delle cavie tiroideotomizzate può essere migliorata con la somministrazione, per via sottocutanea, di 1-3 cc. di «termotirina totale» (18) 3 ore prima degli esperimenti di sovrariscaldamento.

La conoscenza di questi contributi e l'ingiustificato disinteresse con cui essi sono stati accolti, ci ha fatto pensare che poteva essere non privo di utilità il riprendere, rivedere ed estendere le osservazioni dei Mansfeld e di Berde.

Abbiamo ritenuto d'iniziare le nostre osservazioni dal ratto albino, in quanto che questo animale, anche nella maturità, regola scarsamente la propria temperatura corporea ed è considerabile, quindi, per esprimerci con le parole di H. H. Donaldson (19), «somewhat poikilothermous».

Di questo peculiare comportamento dei meccanismi termoregolari del ratto, ci siamo resi edotti pure noi stessi, nel corso di alcune nostre osservazioni ancora non pubblicate condotte in collaborazione con F. Caputo, circa gli effetti sulla temperatura corporea e sulla termoregolazione indotti in questi animali, in diverse epoche della loro vita, dalle crisi convulsive da ES. In queste osservazioni, servendoci del metodo del termometro a mercurio applicato molto profondamente nel retto, abbiamo trovato negli animali normali, per temperature esterne di 18°-24°, una temperatura corporea media di circa 38,1° per i maschi giovani e di circa 38,6° per le femmine giovani e di 38,0° per i maschi adulti e di 38,4° per le femmine adulte. Inoltre, d'accordo con alcune vecchie osservazioni di Bierens de Haan (20, 21), abbiamo trovato pure che, entro certi limiti di temperatura esterna, nelle nostre osservazioni tra 18° e 30°, ad ogni aumento di 5° della temperatura esterna corrisponde ad un dipresso un aumento della temperatura corporea di 0.5°-0.7° C. «Per un cambiamento della temperatura ambiente la regolazione della dispersione del calore è stentata. Così i ratti portati da una stanza fredda ad una calda hanno una temperatura corporea più alta dei ratti abituati alla stanza calda, Przibram (personale, 1923)» [citato da Donaldson (19)].

Dopo le anzidette affermazioni di Mansfeld e le conferme di Berde, si può porre, e supponiamo ragionevolmente, il quesito, se questa deficiente termoregolazione del ratto al calore non dipenda da una deficiente o mancante elaborazione da parte di quest'animale dell'ormone tiroideo del raffreddamento.

In conseguenza si possono avanzare le seguenti ipotesi di lavoro: a) se si tratta di una mancante elaborazione, la tiroideotomia e il sovrariscaldamento non dovrebbero influenzare l'andamento della curva termica; b) se si tratta di deficiente elaborazione, la tiroideotomia e il sovrariscaldamento dovrebbero determinare un

(18) La «termotirina totale» è una frazione di ghiandola tiroide idrolizzata, libera di tiroxina e contenente le due termotirine A e B. Tale preparato è stato prodotto e posto a disposizione di Berde dalla Signora A. Mansfeld-Oppenheimer.

(19) H. H. DONALDSON, *The rat*, Philadelphia, 1924.

(20) J. A. BIERENS DE HAAN, «Arch. f. Ent. der Organismen», 50, 1-12 (1922) (citato da DONALDSON).

(21) J. A. BIERENS DE HAAN e H. PRZIBRAM, «Arch. f. Ent. der Organismen», 50, 13-40 (1922) (citato da DONALDSON).

ulteriore aumento dell'altezza e della durata dell'innalzamento della temperatura corporea; c) nel caso di una deficiente elaborazione, l'ipertrofia della tiroide, determinata mediante la somministrazione di estratto del lobo anteriore dell'ipofisi avente principalmente un'azione stimolante sulla tiroide, dovrebbe essere accompagnata da una migliore tolleranza al calore, sempre che l'azione dell'ormone tireotropo non si limiti soltanto ad una stimolazione della secrezione della tiroxina.

Abbiamo sottoposto all'analisi sperimentale le anzidette ipotesi e in questa Nota, essendo impossibile nel ratto la tiroidectomia senza la complicità della concomitante paratiroidectomia, riferiamo i risultati delle prime osservazioni condotte circa gli effetti in questi animali della tiroparatiroidectomia sulla termoregolazione.

Le osservazioni sono state condotte su 12 ratti provenienti da una colonia addomesticata di ratti allevati in laboratorio. Gli animali sono stati divisi in 4 serie, ciascuna comprendente 3 animali nati dalla stessa madre, di ugual sesso ed età, e cioè: 2 serie di sesso maschile, una di animali giovani, ma sessualmente maturi, ed una di animali adulti, ma tuttora fecondi; e 2 serie di sesso femminile, ugualmente comprendenti ciascuna 3 animali giovani e sessualmente maturi e 3 animali adulti e fecondi.

Tutti gli animali sono stati sottoposti per più giorni a quotidiane osservazioni termometriche, sempre intorno alla stessa ora antimeridiana, e in base ai dati termometrici ottenuti è stato stabilito il comportamento medio della temperatura corporea di ciascun animale alla temperatura ambientale. Indi ciascun animale è stato esposto per 2 ore in termostato ad una temperatura di 37°-38° circa e dopo ogni ora di permanenza in termostato è stata controllata la temperatura corporea.

L'esposizione in termostato è stata ripetuta 4 volte per ciascun animale e ciascuna esposizione è avvenuta a 3 o 4 giorni di distanza dalla precedente. Con tutti i dati ricavati è stato stabilito il comportamento medio della temperatura corporea di ciascun animale in termostato all'anzidetta temperatura. Dopo di che gli animali sono stati sottoposti alla tiroparatiroidectomia.

Abbiamo adoperato la seguente tecnica operatoria non aseptica, della quale ci eravamo impadroniti precedentemente, praticandola su un lotto di animali di diverso sesso ed età provenienti da una colonia non addomesticata di ratti: 1° anestesia eterea; 2° fissazione dell'animale sul dorso col capo iperesteso; 3° rasatura; 4° incisione, di circa 3 cm., della cute del collo sulla linea mediana; 5° liberazione del campo per via ottusa dalle ghiandole salivari mediante spostamento laterale delle stesse; 6° incisione mediana dello sternioideo e dello sternotiroideo, dall'osso ioide fino a metà distanza dal manubrio sternale; 7° esposizione della tiroide mercè divaricamento dei muscoli ottenuto mediante un filo sottile di cotone passato attraverso i margini dell'incisione muscolare e facendo tirare lo stesso da un assistente: la ghiandola tiroide col suo colore rosso scuro spicca sulla tinta pallida dei tessuti circostanti e mostra due lobi simmetrici ed un istmo molto sottile e trasparente; 8° visualizzazione del laringeo ricorrente e delle arterie tiroidee superiori; 9° allacciature di queste; 10° incisione mediana dell'istmo della tiroide; 11° sollevamento in alto e lateralmente di ciascun lobo tiroideo mediante una pinza sottile munita di denti all'estremità; 12° dissezione delle aderenze della ghiandola rispettando il laringeo ricorrente; 13° sutura dei muscoli con un sol punto; 14° sutura della cute.

Tempi molto delicati dell'intervento, tali da poterne compromettere il successo o quanto meno l'interpretazione dei risultati, sono: l'allacciatura delle arterie tiroidee superiori, la dissezione delle aderenze molto solide dei lobi ghiandolari e la dissezione dell'istmo. Se è vero che per la lesione delle arterie tiroidee superiori non si ha un'imponente emorragia, è anche vero che è necessaria una completa emostasi per procedere ad un'accurata dissezione delle aderenze dei lobi. Tale dissezione, pur essendo i lobi circoscritti ed incapsulati, è tutt'altro che agevole e ciò a cagione della loro piccolezza e a cagione del fatto che essi aderiscono solidamente, specie alla parte superiore, alla faccia laterale del laringe, e si estrinsecano posteriormente dietro la trachea, inviando talvolta dei prolungamenti tra la trachea e l'esofago e contraendo aderenze altrettanto solide con l'esofago. La dissezione dell'istmo, resa difficile a causa della sua sottigliezza, può apportare la lesione della trachea. La dissezione dei lobi può apportare la lesione della trachea, dell'esofago e del ricorrente, il quale all'estremità superiore è spesso impegnato nello spessore del lobo.

Si può senz'altro essere d'accordo con Hammett⁽²²⁾, allorché dichiara che il successo della tiroidectomia nel ratto è « questione di conoscenza dei rapporti anatomici e di tecnica ». Ma bisogna pure ammettere che, indipendentemente dalla conoscenza dei rapporti anatomici e della tecnica, l'ablazione della tiroide nel ratto può non avvenire « con completezza e precisione » anche se « il campo dell'operazione è mantenuto libero dal sangue », e che il giudizio d'ablazione completa è bene emetterlo soltanto *a posteriori*, quando, ultimate le osservazioni sperimentali, l'animale viene sacrificato e sottoposto ad un accurato esame macroscopico, con lente d'ingrandimento, e, all'occorrenza, microscopico della regione tiroidea.

È sorprendente che, malgrado le innumerevoli osservazioni condotte sui ratti da ricercatori antichi e recenti al fine di studiare il comportamento delle più svariate funzioni in assenza della tiroide, si taccia delle difficoltà tecniche di un'asportazione completa e dell'indispensabile cautela di interpretare i risultati soltanto dopo il controllo autotipico dell'animale tiroidectomizzato.

È stato quindi non senza soddisfazione che abbiamo incontrato in Folley (1947)⁽²³⁾ queste asserzioni: « In considering many of these results, the great difficulty, if not virtual impossibility, of achieving complete thyroid removal, at any rate in the rat (Folley, Scott Watson, e Amoroso, 1942)⁽²⁴⁾ must not be overlooked ». Ed ancora: « Interpretations of the results is complicated... in the case of the rat by the difficult of affecting complete thyroid removal and by the fact that the operation must involve the removal of the parathyroids ».

La concomitanza dell'inevitabile paratiroidectomia non solo complica l'interpretazione dei risultati, ma rappresenta pure una causa d'insuccesso, in quanto che, a cagione dell'assenza pressoché abituale nei ratti di paratiroidi accessorie funzionalmente potenti, ed in proposito veggasi Cristiani⁽²⁵⁾, Jolly⁽²⁶⁾, Thompson⁽²⁷⁾ ed Hammett⁽²⁸⁾, l'ablazione dell'apparato tiroparatiroideo dispone gli animali, specie i giovani, alla tetania paratiroepiva, la quale non sempre può essere prevenuta dalla somministrazione di sali di calcio o dall'iniezione di estratti di paratiroide, né mitigata dagli abituali presidi.

Nella nostra pratica della tiroparatiroidectomia nel ratto abbiamo perso il 60 % degli animali e di questi i 2/3 erano animali giovani. È da notare però che i ratti da noi operati per impadronirci della tecnica, provenivano tutti, come abbiamo già detto, da una colonia non addomesticata, che aveva avuto con noi i semplici contatti connessi con la somministrazione del cibo e la pulizia delle gabbie. Erano pertanto ratti apprensivi e timidi, che opponevano resistenza al maneggiamento e manifestavano il loro naturale istinto di difesa, di paura e di rabbia col

(22) F. S. HAMMETT, « Am. Jour. Physiol. », 70, 259 (1922).

(23) S. J. FOLLEY, « British medical Bulletin », 2-3, 133, 138 (1947).

(24) S. J. FOLLEY, H. M. WATSON SCOTT e E. C. AMOROSO, « J. Endocrinology », 3, 178 (1942).

(25) H. CRISTIANI, « Arch. de Physiol. », 5^e série, 5^e tome, 164-168 (1893).

(26) VINCENT SWALE and W. A. JOLLY, « Journal of Physiology », 34, 295-305 (1906).

(27) THOMPSON, « Trans. Roy. Soc. », CCI, 91 (1911) (citato da HAMMETT).

(28) F. S. HAMMETT, « Am. Jour. Physiol. », 56, 196 (1921).

mordere. In altre parole erano in uno stato di tensione emotiva e possedevano una soglia molto bassa della reattività neuro-muscolare agli stimoli.

Ora Hammett⁽²⁶⁾ ha dimostrato che simili animali sottoposti alla tiroparatiroidectomia danno una mortalità del 79% per tetania paratireopriva, mentre invece i ratti addomesticati danno una mortalità del 13%.

Nei nostri casi gli effetti dell'estirpazione si sono manifestati dopo un periodo di latenza di poche ore, al massimo di 12 circa. Il quadro sintomatologico, pur essendo variabile e più o meno accentuato, nelle sue linee essenziali è costituito dapprima da respirazione soffiante e poi da veri e propri accessi di dispnea con tirage, scosse e tremori, aumento del tono muscolare circoscritto a questo o a quell'arto, movimenti a scatti, e, specialmente eccitando l'animale, crisi convulsive generali, durante le quali l'animale diventa intensamente cianotico. La morte, quando occorre, sopraggiunge in queste condizioni e verosimilmente è dovuta ad asfissia.

Noi siamo convinti che l'iperpnea, comunque provocata, accentui i sintomi e forse ciò è dovuto all'alcalosi. In due casi abbiamo notato lo stabilirsi rapido, in meno di un'ora, della rigidità cadaverica, ad incominciare dai muscoli del collo.

Superati gli effetti immediati dell'operazione, se si deve escludere l'esistenza di paratiroidi accessorie funzionalmente potenti, bisogna ammettere l'instaurarsi di un certo adattamento neuro-muscolare, per cui gli animali sopravvivono, all'infuori di ogni trattamento curativo, senza presentare sintomi di tetania.

Secondo la nostra esperienza, gli animali che presentano i sintomi paratireoprivi sono quelli che, sopravvivendo, danno più sicura garanzia di una completa rinozione della tiroide e presentano più chiaramente i ben noti segni esteriori dell'assenza di questa ghiandola.

Contrariamente ad Hammett⁽²⁸⁾, che, come abbiamo già detto, accusa nei ratti addomesticati il 13% di mortalità per tetania paratireopriva, noi abbiamo avuto il 41,6% di insuccessi. L'esito era preceduto dalla sintomatologia paratireopriva descritta più sopra e non abbiamo potuto trovare una ragione della diminuita resistenza dei nostri ratti, rispetto a quelli di Hammett, alla mancanza degl'increti tiroparatiroidi, a meno che non debbano chiamarsi in causa le precedenti ripetute esposizioni dei nostri animali alla temperatura di 37°-38°.

La ferita operatoria dei sopravvissuti è sempre guarita per prima intenzione. Questi, dopo 48-62 ore dalla tiroparatiroidectomia, sono stati sottoposti a nuovi controlli della temperatura corporea alla temperatura ambientale e quindi, mai prima di 72 h dalla tiroparatiroidectomia, sono stati nuovamente e singolarmente esposti per 2 ore in termostato alla temperatura di 37°-38°, controllando, come prima, la temperatura corporea dopo ogni ora di permanenza a questa temperatura.

Le osservazioni termometriche a temperatura ambientale e in termostato sono state iniziate alle anzidette distanze di tempo dall'intervento, onde essere pressochè sicuri dell'assenza in circolo degli increti tiroidei e sono state ripetute ogni tre giorni sino a 30 giorni dopo la tiroparatiroidectomia. Durante questo periodo le femmine sono state tenute separate dai maschi, onde evitare un'eventuale gravidanza, che poteva incidere sull'andamento dell'esperienza.

Con tutti i dati termometrici a disposizione è stato stabilito il comportamento medio della temperatura corporea dei ratti tiroparatiroidectomizzati alla temperatura ambiente e alla temperatura di 37°-38°.

Cosicchè in ultima analisi per ogni ratto sopravvissuto si sono avute le medie di 6 valori termometrici, come apparè dall'unita tabella.

TABELLA.

REPERTO AUTOPTICO

| Numero della serie e sesso degli animali | Numero degli animali della serie | Media (1) della T° corporea di ciascun animale a T° ambiente tale di 20°-24° | Media (2) dell'aumento della T° corporea di ciascun animale in termostato a 37°-38° | | Data dello intervento | Esito dell'intervento | Media (3) della T° corporea di ciascun animale tiroparatiroidectomizzato a T° ambiente di 24°-26° | Media (4) dell'aumento della T° corporea di ciascun animale tiroparatiroidectomizzato in termostato a 37°-38° | | |
|--|----------------------------------|--|---|------|-----------------------|---------------------------------|---|---|------|--|
| | | | 1° h | 2° h | | | | 1° h | 2° h | |
| I ^a serie ♂ giovani | 1 | 38.4° | 1.6° | 1.4° | 24-6-1949 | muore dopo 5 h circa | — | — | — | minutissime zolle di tessuto ghiandolare in corrispondenza dei primi anelli tracheali |
| | 2 | 38.3° | 1.5° | 1.2° | 24-6-1949 | guarigione per prima intenzione | 37.8° | 1.3° | 1.2° | asportazione apparentemente completa |
| | 3 | 37.9° | 1.1° | 0.6° | 26-6-1949 | guarigione per prima intenzione | 37.3° | 1.3° | 1.0° | asportazione apparentemente completa |
| II ^a serie ♀ giovani | 1 | 38.7° | 1.3° | 0.8° | 26-6-1949 | guarigione per prima intenzione | 38.1° | 1.5° | 1.1° | asportazione apparentemente completa |
| | 2 | 38.5° | 1.5° | 1.5° | 28-6-1949 | muore dopo 20 h circa | — | — | — | asportazione apparentemente completa |
| | 3 | 38.9° | 1.6° | 1.3° | 28-6-1949 | muore dopo 8 h circa | — | — | — | asportazione apparentemente completa |
| III ^a serie ♂ adulti | 1 | 37.5° | 1.5° | 1.6° | 30-6-1949 | guarigione per prima intenzione | 38.0° | 1.5° | 1.4° | minute zolle di tessuto ghiandolare in corrispondenza della faccia laterale d. della laringe |
| | 2 | 38.1° | 1.4° | 1.8° | 30-6-1949 | guarigione per prima intenzione | 37.6° | 1.2° | 1.3° | asportazione apparentemente completa |
| | 3 | 38.4° | 1.6° | 1.0° | 2-7-1949 | muore dopo 16 h circa | — | — | — | asportazione apparentemente completa |
| IV ^a serie ♀ adulte | 1 | 38.2° | 2.1° | 1.8° | 2-7-1949 | guarigione per prima intenzione | 37.9° | 1.6° | 1.5° | asportazione apparentemente completa |
| | 2 | 38.1° | 1.8° | 1.2° | 4-7-1949 | guarigione per prima intenzione | 37.4° | 1.9° | 1.6° | asportazione apparentemente completa |
| | 3 | 38.9° | 1.4° | 1.4° | 4-7-1949 | muore dopo 24 h circa | — | — | — | asportazione apparentemente completa |

(1) Ciascuna media è ricavata da 8 osservazioni a T° ambiente.

(2) Ciascuna media è ricavata da da 4 osservazioni in termostato.

(3) Ciascuna media è ricavata da 10 osservazioni a T° ambiente.

(4) Ciascuna media è ricavata da 9 osservazioni in termostato.

Dall'analisi e dal confronto di queste medie risulta che:

a) la temperatura corporea media dei ratti maschi giovani è di $38,2^{\circ}$, delle femmine giovani è di $38,7^{\circ}$, dei maschi adulti è di 38° e delle femmine adulte è di $38,4^{\circ}$;

b) i ratti normali di diverso sesso ed età regolano scarsamente la loro temperatura corporea, allorquando vengono portati dalla temperatura ambiente a quella di 37° - 38° . Infatti, in queste condizioni nelle nostre osservazioni, i maschi giovani hanno presentato nella 1^a ora d'esposizione un aumento medio della temperatura corporea di $1,4^{\circ}$ e nella 2^a ora di $1,06^{\circ}$, le femmine giovani di $1,4^{\circ}$ e di $1,2^{\circ}$, i maschi adulti di $1,5^{\circ}$ e di $1,4^{\circ}$ e le femmine adulte di $1,7^{\circ}$ e di $1,4^{\circ}$;

c) gli stessi ratti tiroparatiroidectomizzati hanno presentato alla temperatura ambiente un abbassamento della temperatura corporea variabile da $0,3^{\circ}$ a $0,9^{\circ}$;

d) gli stessi ratti tiroparatiroidectomizzati portati dalla temperatura ambiente a quella di 37° - 38° e mantenuti a questa temperatura per 2 ore non hanno presentato un comportamento medio della temperatura corporea sensibilmente diverso da quello che essi presentavano prima dell'intervento.

La diminuzione sia pure lieve della media complessiva dell'aumento della temperatura corporea degli animali normali e tiroparatiroidectomizzati, alla fine della 2^a ora d'esposizione in termostato, sta ad indicare, a nostro modo di vedere, che in questo periodo incomincia a stabilirsi, sia pure stentatamente, la regolazione della dispersione del calore. In questo periodo, salvo le eccezioni visibili nella tavola, nelle quali la media dell'aumento della T° corporea è rimasta pressochè invariata, si nota un'accentuazione dell'eliminazione d'acqua da parte degli animali, spesso già iniziata nella 1^a ora.

Indichiamo come eliminazione di acqua quel fenomeno per cui alcuni dei nostri animali, esposti in termostato alla T° di 37° - 38° , possono risultare al termine della prima o della seconda ora più o meno madidi in corrispondenza delle regioni anteriori della testa, della regione inferiore del collo e dell'addome, degli arti e della coda.

Stando agli studi di Römer⁽²⁹⁾ (1896) sulla cute dei Mammiferi, nel ratto le ghiandole sudoripare sono presenti in notevole quantità soltanto sulla « palma delle mani » e sulla « pianta dei piedi ». Ciò è stato confermato da Gegenbaur⁽³⁰⁾ (1898) e più recentemente accettato da von Eggeling⁽³¹⁾ (1931). Eggeling dice testualmente: « Bei manchen Säugern fehlen sie an den behaarten Stellen, können aber an unbehaarten (Handteller und Fusssohle) sehr stark entwickelt sein (z. B. Mus, Lepus, Hystrix) ».

Dovendo escludere la presenza di gh. sudoripare all'infuori delle zone scoperte di peli, a prima vista si può pensare che i nostri animali risultino bagnati in corrispondenza delle regioni su dette, per diffusione del sudore secreto dalle zone

(29) F. RÖMER, « *Jenaische Zeitschr. f. Naturw.* », 23, 604-622 (1896).

(30) C. GEGENBAUR, *Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere*, Leipzig, 1898.

(31) H. VON EGGELING, *Hautdrüsen in Handbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbeltiere*, 1 Bd, Ed. Urban e Schwarzenberg, Berlin, 1931.

non coperte di peli; tale diffusione essendo favorita dalla posizione semiacquattata che gli animali sogliono in certi momenti assumere e mantenere in termostato.

Con un'adatta osservazione abbiamo potuto accertare l'inesattezza di questa supposizione. Ponendo diversi altri ratti, uno per volta, in termostato e sorvegliandoli continuamente attraverso la parete di vetro, abbiamo notato che gli animali si bagnano per il fluire dagli angoli della bocca di grosse gocce di liquido incolore e limpido come l'acqua. Non possiamo discutere qui per ora la questione dell'origine di tale liquido e diciamo solo che il suo flusso, specialmente se la T° del termostato supera i 40° , si stabilisce poco dopo l'immissione degli animali nello stesso, per continuare, poi, ininterrotto, più o meno abbondante a seconda della T° . Talvolta, di tanto in tanto, gli animali raccolgono sulle palme alcune gocce e se le soffregano sulle regioni anterolaterali della testa. Le altre gocce, a seconda della posizione assunta dagli animali o dei movimenti che essi compiono, possono cadere sulla rete della gabbia, sulla coda, scivolare lungo il collo e diffondersi per contiguità all'addome e agli arti.

Con un altro semplice esperimento abbiamo potuto convincerci ancora meglio che gli ultimi segmenti degli arti, sprovvisti di peli, ma forniti di gh. sudoripare, non contribuiscono gran che, o affatto, a bagnare gli animali. Precisamente abbiamo ricoperto gli arti degli animali con sottilissimi guanti di gomma e, chiusi questi all'estremità superiore in modo da non ostacolare il circolo sanguigno, abbiamo posti gli animali, uno per volta, in termostato. In queste condizioni abbiamo notato che gli animali si bagnano ugualmente e nei guanti non si raccoglie sudore; soltanto si umettano sulla superficie interna.

Da queste semplici osservazioni, che aprono la via a diverse ipotesi di lavoro, sembra risultare chiaramente che le gh. sudoripare delle parti scoperte di peli non contribuiscono molto nell'eliminazione di acqua del ratto sovrariscaldato e che l'animale in queste condizioni si bagna non per sudore, ma, soprattutto, per liquido che gocciola dagli angoli della bocca.

Comunque sia, lo stabilirsi dell'eliminazione di acqua, e il suo accentuarsi nella seconda ora, può rappresentare una spiegazione già bastevole della regolazione sia pure stentata della dispersione del calore: l'acqua, evaporando, assorbe dal corpo del ratto una certa quantità di calore e il corpo quindi si raffredda. È difficile obbiettare nel ratto modeste variazioni dell'anzidetta eliminazione di acqua, e per ora dobbiamo limitarci a dire che ci è sembrato che qualche ratto tiroparatiroidectomizzato, esposto in termostato alla T° di 37° - 38° , si sia bagnato meno che non nelle precedenti esposizioni, allorché l'apparato tiroparatiroideo non era stato ancora rimosso.

Questo punto dell'eventuale rapporto tra apparato tiroparatiroideo, rispettivamente termotirine, sudorazione ed evaporazione cutanea di acqua meriterebbe accurate ricerche.

Le vaste ripercussioni delle affermazioni di G. Mansfeld balzano ovvie agli studiosi. Esse per quanto riguarda le termotirine, se confortate da altre conferme oltre a quelle di B. Berde, potrebbero fornire, tra l'altro, anche un fondamento ormonale specifico al problema dell'omeo- e dell'eterotermia.

Le nostre osservazioni, poichè sono state condotte di proposito su di un animale che regola scarsamente la temperatura corporea e la cui tiroidectomia comporta anche la paratiroidectomia, non possono costituire una conferma diretta di quelle affermazioni.

Il risultato delle nostre ricerche è che i ratti tiroparatiroidectomizzati non presentano in termostato una tolleranza al calore diversa da quella che essi presentavano prima dell'intervento.

Questo risultato non è disaccordo con le affermazioni di Mansfeld e i risultati di Berde.

Postulando l'esistenza delle termotirine, possiamo spiegarci soddisfacentemente la parziale eterotermia del ratto, ammettendo che la deficiente regolazione della temperatura corporea del ratto normale esposto al calore dipenda da una deficiente o mancante secrezione da parte della tiroide di questo animale della termotirina A o ormone tiroideo del raffreddamento.

In base al risultato delle nostre osservazioni dobbiamo pensare che nel ratto normale più che una secrezione deficiente vi sia una secrezione mancante di termotirina A, altrimenti non potremmo renderci conto del come nelle nostre osservazioni l'ablazione apparentemente completa dell'apparato tiroparatiroideo non abbia peggiorato la tolleranza al calore.

A meno che la concomitanza dell'assenza delle paratiroidi, concomitanza inevitabile nella tiroidectomia del ratto, non riesca a compensare in qualche modo la mancanza della termotirina A. Però, allo stato attuale delle nostre conoscenze sulla funzione delle paratiroidi, tale azione di compenso non sembra probabile.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1950 - Settembre-ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Equazioni differenziali. — *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità.* Nota I (*) del Corrisp. GUIDO ASCOLI.

Dato un sistema differenziale lineare omogeneo

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_1^n a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

a coefficienti funzioni di t , integrabili in ogni parte finita dell'intervallo $t_0 \leq t < +\infty$, e a soluzioni limitate, si può domandare sotto quali condizioni per le funzioni η_{ik} , aventi la stessa proprietà, il sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_1^n (a_{ik} + \eta_{ik}) x_k$$

ha pure soluzioni limitate.

Nel caso in cui gli a_{ik} siano costanti, risultati molto notevoli sull'argomento sono stati dati sin dal 1940 da L. Cesàri; altri possono ricavarsi dalle ricerche più recenti di Faedo, N. Levinson ed E. Levi⁽¹⁾, in cui si studiano, più generalmente, condizioni perchè le soluzioni di (1) e (2), anche se non limitate, presentino identico comportamento asintotico. Per il caso generale è stato dimostrato da D. Caligo⁽²⁾ nel 1940 un teorema il quale riflette il caso in cui le

(*) Presentata nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) Per la bibliografia rimandiamo alla recentissima Nota di E. LEVI, *Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee*. Questi «Rendiconti», vol. VIII, fasc. 5, pp. 465-70, Nota I e vol. IX, fasc. 1-2, pp. 26-32, Nota II (1950).

(2) D. CALIGO, *Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni ai sistemi di equazioni differenziali lineari*. «Atti del 2° congresso dell'Un. Matem. Italiana», pp. 177-185 (1940); *Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni*. «Rend. Accad. Italia», I, 497-506 (1939-40). In questi lavori si considerano sistemi non omogenei, con lievissima complicazione; noi ci limitiamo al caso omogeneo che offre maggiori facilità di confronto con i risultati di altri autori.

η_{ik} sono assolutamente integrabili tra t_0 e $+\infty$, e che sembra sia sfuggito a più recenti ricercatori ⁽³⁾; esso si può così enunciare:

« Siano $X_{ik}(t, \tau)$, con $t \geq t_0$; $\tau \geq t_0$; $i, k = 1, 2, \dots, n$ quelle ben determinate n^2 funzioni per le quali è

$$X_{ik}(t, t) = \delta_{ik}$$

dove δ_{ik} è il noto simbolo di Kronecker, e che, per ogni scelta determinata di i e di τ , costituiscono una soluzione di (1). Se le X_{ik} sono limitate per $t > \tau$ e le η_{ik} sono assolutamente integrabili tra t_0 e $+\infty$, il sistema

$$(2) \quad \frac{dz_i}{dt} = \sum (a_{ik} + \eta_{ik}) z_k$$

ha soluzioni limitate ».

La dimostrazione, assai semplice, si appoggia alla trasformazione del sistema (2) in un opportuno sistema di equazioni integrali del tipo di Volterra e sulla maggiorazione *a priori* delle soluzioni mediante un noto procedimento, originariamente dovuto a Liouville. Di questo notevole teorema il Caligo ha dato varie estensioni ed applicazioni. Ma altre osservazioni, forse non prive di interesse, esso può suggerire; esse formano oggetto della presente Nota.

1. Insieme al sistema (1) si consideri il suo aggiunto:

$$(1') \quad \frac{dy_i}{dt} = - \sum_1^n a_{ki} y_k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

È ben noto, e di immediata verifica, che tra due soluzioni di (1) e (1') sussiste la relazione

$$\sum x_i y_i = \text{cost.}$$

e che, se

$$x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

sono n soluzioni di (1), linearmente indipendenti, un sistema fondamentale di soluzioni di (1') è formato dalle x^{si} definite dalle relazioni

$$\sum_i x_{hi} x^{si} = \delta_{hs}$$

e costituenti quindi la trasposta dell'inversa della matrice $\|x_{si}\|$. Si ha

$$x^{si} = \frac{D_{si}}{D}$$

dove D è il determinante della matrice stessa, D_{si} l'aggiunto di x_{si} .

(3) Ved., per esempio, A. WINTNER, *Linear variations of constants*. «Amer. Journ. of Math.», 68, 185-213 (1946); N. LEVINSON, *The asymptotic behavior of a system of linear differential equations*. «Amer. Journ. of Math.», 68, 1-6 (1946); R. BELLMAN, *The boundedness of solutions of linear differential equations*. «Duke Math. Journ.», 14, 83-97 (1947).

È facile ora riconoscere che le X_{ik} considerate dal Caligo sono date da

$$X_{ik}(t, \tau) = \sum x_{is}(\tau) x^{ks}(t)$$

e che quindi le $X_{ik}(\tau, t)$ compiono, rispetto al sistema (1') l'ufficio compiuto dalle $X_{ik}(t, \tau)$ rispetto al sistema (1)⁽⁴⁾. Ne segue che se le $X_{ik}(t, \tau)$ sono limitate per $t \leq \tau$ e le η_{ik} soddisfano alla condizione già accennata, sono limitate le soluzioni del sistema

$$(2') \quad \frac{du_i}{dt} = - \sum (a_{ki} + \eta_{ki}) u_k$$

aggiunto di (2).

2. Come immediata conseguenza delle precedenti osservazioni, abbiamo che se per ogni $t \geq t_0, \tau \geq t_0$ le X_{ik} sono limitate, sono insieme limitate le soluzioni di (1), (1'), (2), (2'), e in particolare le x_{ik}, x^{ik} . È il caso, cioè, in cui sono limitate insieme le soluzioni del sistema (1) e quelle del suo aggiunto. Per intenderci, diremo allora che il sistema (1) è stabile in senso stretto. La stessa proprietà compete allora anche al sistema aggiunto.

Quando il sistema (1) ha coefficienti costanti, si riconosce subito che per la stabilità in senso stretto è necessario e sufficiente che le radici dell'equazione caratteristica relativa alla matrice $\|a_{ik}\|$ siano immaginarie pure e che i relativi divisori elementari siano lineari. Ciò equivale a dire che le soluzioni sono limitate sia per $t \rightarrow +\infty$ sia per $t \rightarrow -\infty$ (stabilità passata e futura). Nel caso generale, invece, quando siano limitate le x_{si} , risultano senz'altro limitati gli aggiunti D_{si} , onde per la stabilità in senso stretto è sufficiente che sia

$$|D| > K > 0;$$

e di qui, ricordando la nota espressione di D (Jacobi), risulta subito la condizione

$$R \int_{t_0}^t \sum a_{ii}(\tau) d\tau > c$$

data da A. Wintner⁽⁵⁾ nel 1946 per dedurre soltanto dalla stabilità di (1) quella di (2). Essa è, come si vede, notevolmente più restrittiva di quella del Caligo, ed è compresa, del resto, in un altro dei risultati di questo.

3. a) Il carattere della stabilità in senso stretto rimane anche illuminato dalla seguente proprietà: Se il sistema (1) è stabile in senso stretto, per ogni sua solu-

(4) Per quanto ci è noto, questa osservazione si trova per la prima volta in forma esplicita nella Nota di B. MANIÀ: *Un'osservazione sui sistemi differenziali lineari*. « Boll. Un. Mat. Ital. », 15, 118-122 (1936).

(5) Loc. cit. nota (3). In questo lavoro si fa però anche un rapido accenno ad un criterio per dedurre dalla stabilità di (1) quella di (2), il quale equivale alla condizione che le X_{ik} siano sempre limitate, e quindi alla stabilità di (1) in senso stretto.

zione x_i il modulo del vettore $\{x_i\}$ ha un estremo inferiore positivo. E difatti, non essendo le x_i tutte nulle, vi è almeno un indice s per il quale è

$$\sum x_i x^{si} = \lambda \neq 0$$

onde, per una nota disuguaglianza,

$$\sum |x_i|^2 \sum |x^{si}|^2 \geq |\lambda|^2, \quad \sum |x_i|^2 \geq \frac{|\lambda|^2}{\sum |x^{si}|^2},$$

e poichè il denominatore è limitato, segue l'asserto.

In particolare, un sistema stabile in senso stretto non ammette soluzioni infinitesime per $t \rightarrow \infty$.

b) Ne segue: Nella stessa ipotesi è possibile scegliere funzioni η_{ik} piccole a piacere e infinitesime per $t \rightarrow +\infty$ (non però assolutamente integrabili tra t_0 e $+\infty$) in modo che il sistema variato (2) abbia soluzioni non limitate. Si ponga infatti in (1)

$$x_i = (t - t_1)^{-\alpha} z_i \quad (t_1 < t_0, \alpha > 0);$$

le z_i soddisfano allora al sistema

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum \left(a_{ik} + \frac{\alpha}{t - t_1} \right) z_k$$

che ha la forma (2), con le η_{ik} dotate delle proprietà richieste. Ma si ha, per a),

$$\sum |z_i|^2 = (t - t_1)^{2\alpha} \sum |x_i|^2 > c (t - t_1)^{2\alpha} \quad (c > 0)$$

e quindi le z_i non possono essere tutte limitate. In questo senso potrebbe dirsi che un sistema stabile in senso stretto si trova sulla frontiera della stabilità ⁽⁶⁾.

c) Nel caso della stabilità in senso stretto il risultato del Caligo può essere così precisato: Se il sistema (1) è stabile in senso stretto e si ha:

$$\int_{t_0}^{\infty} |\eta_{ik}| dt < +\infty \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

anche il sistema (2) è stabile in senso stretto, e ad ogni soluzione \bar{z}_i del secondo corrisponde una soluzione \bar{x}_i del primo, e una sola, tale che per $t \rightarrow \infty$

$$(3) \quad \bar{z}_i = \bar{x}_i + o \left(\sum_{i,k} \int_{t_0}^{\infty} |\eta_{ik}| dt \right)$$

E viceversa.

La prima parte della tesi risulta già dalle osservazioni del n. 1; per la seconda occorre riprendere le equazioni integrali dedotte dal Caligo per le z_i ,

(6) Questa proprietà va messa a confronto con ciò che avviene invece per i sistemi a coefficienti costanti a radici caratteristiche con parte reale negativa, a norma di un noto teorema di O. PERRON (« Math. Zeitsch. », 1929).

che con i nostri simboli, e sostituendo alle X_{ik} le loro forme esplicite, si scrivono (7):

$$(4) \quad z_h(\tau) = \sum_s \gamma_s x_{sh}(t) + \sum_{i,k,s} \int_{t_1}^t x_{sh}(t) x^{si}(\tau) \eta_{ik}(\tau) z_k(\tau) d\tau$$

dove le γ_s sono costanti ed è $t_1 \geq t_0$.

Dedotta da queste, col metodo di Liouville, che le z_i sono limitate, esse possono scriversi:

$$\begin{aligned} z_h(t) &= \sum_s \left(\gamma_s + \sum_{i,k} \int_{t_1}^{\infty} x^{si}(\tau) \eta_{ik}(\tau) z_k(\tau) d\tau \right) x_{sh}(t) - \\ &\quad - \sum_{i,k,s} \int_{t_1}^{\infty} x_{sh}(t) x^{si}(\tau) \eta_{ik}(\tau) z_k(\tau) d\tau, \\ z_h(t) &= \sum_s C_s x_{sh}(t) + \mathcal{O} \left(\sum_i \int_{t_1}^{\infty} |\eta_{ik}(\tau)| d\tau \right) \end{aligned}$$

ciò che dimostra, per ogni particolare soluzione z_i di (2) l'esistenza di una soluzione \bar{x}_i di (1) che soddisfa alla (3). Tale soluzione è unica: infatti, se ne esistessero due, la loro differenza sarebbe infinitesima per $t \rightarrow \infty$, e quindi nulla. Scambiando, come è ora lecito, le parti dei due sistemi, risulta anche che la corrispondenza tra \bar{x}_i e \bar{z}_i è biunivoca. E con ciò il teorema è completamente dimostrato.

4. Non ci fermiamo ad indicare l'applicazione che può farsi del teorema del Caligo e delle osservazioni precedenti all'equazione differenziale di ordine n

$$(5) \quad w^{(n)} = p_1 w^{(n-1)} + p_2 w^{(n-2)} + \dots + p_n w$$

trasformata, mediante la posizione $w^{(n-r)} = x_r$ nel sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_i^n p_i x_i, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_2, \dots, \frac{dx_n}{dt} = x_{n-1},$$

(7) Alle (4) si giunge direttamente nel modo seguente. Dalle (1), tenuto conto che le x^{ik} soddisfano al sistema aggiunto (1'), si deduce facilmente:

$$\frac{d}{dt} \sum_i x^{si} z_i = \sum_{i,k} \eta_{ik} x^{si} z_k.$$

Integrando tra t_1 e t si ricavano le $\sum x^{si} z_i$; risolvendo poi rispetto alle z_i si trovano le (4). Osserviamo, per incidenza, che per l'applicazione del metodo di Liouville basta che riescano assolutamente integrabili rispetto a τ le

$$\sum x_{sh}(t) x^{si}(\tau) \eta_{ik}(\tau) = \sum x_{sh}(t) D_{si}(\tau) \eta_{ik}(\tau) / D(\tau);$$

e per questo basta supporre le η_{ik}/D assolutamente integrabili. Ne segue il criterio dato senza dimostrazione dal Caligo come teor. IV della sua prima Nota.

ciò che permette di evitare la trattazione indipendente che ne ha fatto lo stesso Caligo nella sua seconda Nota. Osserveremo soltanto che la condizione di Wintner

è soddisfatta se $\int_{t_0}^t p_1(\tau) d\tau$ è inferiormente limitato.

In particolare, ciò vale per $p_1' = 0$, cioè per l'equazione incompleta

$$(7) \quad w^{(n)} = p_2 w^{(n-2)} + p_3 w^{(n-3)} + \dots + p_n w.$$

Ma si può rilevare qui il fatto, da me indicato sin dal 1935 per $n = 2^{(8)}$, e provato in generale dal Caligo con apposita dimostrazione (loc. cit.), che se gli integrali della (7) sono limitati insieme alle loro derivate sino all'ordine $n-2$, lo stesso avviene per l'equazione

$$(8) \quad u^{(n)} = q_2 u^{(n-2)} + q_3 u^{(n-3)} + \dots + q_n u$$

ove sia

$$\sum_2^n \int_t^\infty |q_i - p_i| d\tau < +\infty.$$

La cosa si deduce facilmente dalle nostre formule. Se si pone infatti

$$u^{(n-r)} = z_r, \quad q_i - p_i = \varphi_i$$

si vede che le η_{ik} sono tutte nulle salvo le

$$\eta_{12} = \varphi_2, \quad \eta_{13} = \varphi_3, \dots, \eta_{1n} = \varphi_n$$

onde le (4) si riducono a

$$z_k(t) = \sum_s \gamma_s x_{sh}(t) - \sum_1^n \sum_k^n \int_{t_1}^t x_{sh}(t) x^{s1}(\tau) \varphi_k(\tau) z_k(\tau)$$

le quali, ove si assuma $h > 1$, involgono soltanto funzioni e derivate sino all'ordine $n-2$. Ciò è evidente per le z_k e per le x_{sh} , e risultano per le x^{s1} dal fatto che queste differiscono per un fattore costante dagli aggiunti delle derivate di ordine massimo della matrice wronskiana degli integrali w_s della (7). Prescindendo dunque dalla prima delle (5), si può applicare alle altre il ragionamento di Liouville, e si ottiene così la tesi. Si può aggiungere anche qui che sussiste tra gli integrali di (7) e (8) una corrispondenza biunivoca tale da soddisfare alla condizione

$$\bar{u}^{(r)} = \bar{w}^{(r)} + \odot \left[\sum_1^n \int_t^\infty |q_i - p_i| d\tau \right] \quad (r = 0, 1, \dots, n-2).$$

(8) G. ASCOLI, *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali del 2° ordine*. «Rend. Acc. Lincei» (6), 22, 234-243, 2° sem. (1935); cfr. anche: *Sulla forma asintotica degli integrali dell'equazione differenziale $y'' + A(x)y = 0$ in un caso notevole di stabilità*. «Revista (Tucuman)», 131-140 (1941) a p. 138, e G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. II, p. 29.

Cosmogonia. — *Sopra l'origine del Sistema Solare.* Nota (*) del Socio GIUSEPPE ARMELLINI.

1. In una mia Nota ⁽¹⁾ su questo argomento, pubblicata nel 1943 nei « Rend. Acc. d'Italia », io ho cercato di spiegare l'origine dei pianeti senza ricorrere all'ipotesi di Laplace e sue modificazioni (ipotesi di Faye, di Ligondès, ecc.) per le ben note gravissime difficoltà che vi si oppongono; e così pure senza ricorrere ad ipotesi dualistiche (ipotesi di Moulton, di Chamberlin, di Jeffreys, ecc.) data la debolissima probabilità che una stella sia venuta a passare in vicinanza del Sole.

Ora recentemente ho avuto occasione di leggere, in riassunto francese, una Nota sopra lo stesso argomento del prof. G. Fesenkov; uno dei migliori astronomi russi, che oggi dirige l'Osservatorio Astronomico di Mosca. La Nota del Fesenkov venne pubblicata ⁽²⁾ nel 1945, e cioè due anni dopo la mia, che il Fesenkov non poteva in nessun modo conoscere giacchè nel periodo 1941-45 furono completamente interrotte le relazioni con la Russia a causa della guerra.

È quindi interessante notare come l'illustre astronomo russo, in modo completamente indipendente, sia venuto a conclusioni analoghe alle mie sopra l'origine dei pianeti ed anzi abbia portato nuovi argomenti in loro sostegno; sia pure servendosi di ipotesi non del tutto plausibili. Ed è pure assai interessante notare che egli, dopo essere giunto all'origine dei pianeti, urti contro la stessa difficoltà con cui anche io avevo urtato; difficoltà incontrata anche dal Russell che pure parte da un'ipotesi differentissima e cioè dall'ipotesi dualistica di Moulton e Chamberlin; difficoltà che — se non si vuole ricorrere all'espansione dell'Universo, urtando contro altre obiezioni forse anche più gravi — si può togliere soltanto introducendo nella legge di Newton un piccolo termine correttivo dipendente dalla velocità radiale, come io ho già indicato. E ciò è tanto vero che il Fesenkov, il quale si mantiene sempre nel campo della meccanica classica, si trova costretto ad affermare che una tale difficoltà *reste jusqu'à présent inexpliquée dans toutes les conceptions cosmogoniques.*

2. Per meglio esaminare l'interessante Memoria del Fesenkov, ricordiamo brevemente quanto io dimostrai nella mia citata Nota del 1943, cercando di spiegare l'origine dei pianeti senza far ricorso nè all'ipotesi laplaciana, nè all'ipotesi dualistica, nè a quella delle catture.

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1950.

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *Sopra l'origine dei pianeti dal Sole*. « Rend. Acc. d'Italia », 1° sem. (1943).

(2) Cfr. B. G. FESENKOV, *Sur l'origine du Système Solaire*. « Astronomical Journal of the Soviet Union », Tom. XXII B. 4 (1945).

A tale scopo, ho calcolato il momento d'inerzia del Sole rispetto al suo asse di rotazione, supponendo che la densità interna dell'astro variasse in conformità alla teoria moderna dell'equilibrio radiativo; teoria secondo la quale si verifica un forte addensamento centrale dell'astro, molto maggiore di quanto avviene nella teoria classica dell'equilibrio adiabatico.

Ciò posto, osservando che quando i pianeti erano ancora uniti al Sole, il momento della quantità di moto dell'astro era eguale a quello dell'odierno Sistema Planetario⁽³⁾ (Sole e Pianeti) risultò che l'astro impiegava allora poche ore a compiere una rotazione e quindi che all'equatore solare l'accelerazione centripeta era poco diversa dall'attrazione, onde la gravità g (differenza delle due accelerazioni) era ivi molto piccola.

Ne dedussi che, in tale stato di equilibrio poco stabile, non occorre invocare l'ipotesi poco probabile del passaggio di una stella nelle vicinanze del Sole per spiegare l'origine dei pianeti, bastando semplici fenomeni di parossismo solare per produrre l'eruzione di piccole masse dalle regioni equatoriali del Sole. Ovviamente queste masse però dovettero originariamente ruotare nelle vicinanze del Sole stesso; ma, una volta ammessa l'esistenza del *termine cosmogonico* da me introdotto nella legge di Newton, esse se ne allontanarono progressivamente dando così origine all'odierno Sistema Planetario.

3. Ora il Fesenkov adotta sostanzialmente la medesima ipotesi per l'origine solare dei pianeti, portando anche due nuovi argomenti in suo favore.

E cioè (dopo aver premesso che, in linea di massima, l'origine solare dei pianeti viene confermata dall'abbondanza relativa quasi identica di molti elementi chimici nella crosta terrestre e negli strati esterni del Sole, come pure dall'abbondanza relativa dei due isotopi del carbonio C_{12} e C_{13} che è la medesima nel Sole e nella Terra, mentre è molto diversa⁽⁴⁾ nelle stelle a carbonio di tipo spettrale N), il Fesenkov fa le seguenti considerazioni che gli permettono di aumentare ancora il rapporto K tra l'accelerazione centripeta J e quella di attrazione A all'equatore solare, favorendo così la nascita dei pianeti. E cioè:

a) Il Fesenkov osserva che, dopo la formazione del globo solare per condensazione di gas interstellari, le prime reazioni nucleari che si svilupparono nel suo interno furono le più semplici, o meglio quelle che domandano minore temperatura per iniziarsi; ad esempio quella del boro. Esaurita, o quasi, la provvista di boro che il Sole possedeva, diminuì la produzione di energia e quindi anche la pressione esercitata dal flusso di energia che attraversava l'astro, onde il Sole si contrasse. E fu appunto questa contrazione che aumentò ancora la

(3) Cfr. L. GIALANELLA, *Il momento della quantità di moto del Sistema Planetario*. «Rend. Lincei», 1° sem. (1936).

(4) Secondo i più recenti risultati, nelle stelle di tipo N ed R, su 100 atomi di carbonio, 65 appartengono al C_{12} e 35 all'isotopo pesante C_{13} mentre nella Terra e nel Sole, su 100 atomi di carbonio, 99 almeno appartengono al C_{12} ed appena uno al C_{13} . Cfr. C. FEHRENBACH et A. DAUDIN, *Les bandes dans les spectres des étoiles carbonées*. «Publ. Obs. Haute Provence», ser. B, n. 16 (1948).

temperatura centrale dell'astro, permettendo così l'inizio del cosiddetto « ciclo del carbonio » a cui è dovuta la trasformazione dell'idrogeno in elio, principale sorgente di energia del Sole attuale.

Ora Fesenkoy fa l'ipotesi che i pianeti siano nati appunto durante il periodo di contrazione solare che precedette l'inizio del « ciclo del carbonio » ed in cui il rapporto K era massimo. Notiamo in proposito che, se un astro si dilata omogeneamente col rapporto α , il suo momento d'inerzia assiale viene moltiplicato per α^2 e quindi — dovendo restare inalterato il momento della quantità di moto — la velocità angolare di rotazione ω viene moltiplicata per α^{-2} ed in conseguenza l'accelerazione centripeta equatoriale J viene moltiplicata per α^{-3} . Ma l'attrazione A risulta ovviamente moltiplicata per α^{-2} , e quindi il rapporto $K = J/A$ viene moltiplicato per α^{-1} .

Se immaginiamo quindi che, all'epoca della nascita dei pianeti, il diametro del Sole anziché essere eguale presso a poco all'attuale (come io supponevo nella mia Nota), sia stato invece eguale a circa i $4/5$ dell'attuale — e cioè se poniamo, col Fesenkoy, $\alpha = 0,8$ — occorrerà moltiplicare ancora per $1,25$ il valore di K da me trovato.

Vi è però una difficoltà, che sembra sia sfuggita al Fesenkoy. E cioè, secondo molti astronomi moderni, l'abbondanza dell'isotopo pesante C_{13} nelle stelle giganti rosse di tipo N si spiegherebbe col fatto che queste stelle sono relativamente molto giovani, onde in esse si è iniziato solo da poco tempo (o forse non è ancora iniziato) il « ciclo del carbonio ». Invece la rarità del C_{13} nel Sole, indicherebbe che nel Sole questo ciclo ha già luogo da molto tempo; come del resto avviene per le stelle della « sequenza principale » a cui appunto il Sole appartiene.

Ne segue che, se la Terra si fosse separata dal Sole prima che s'iniziasse il « ciclo del carbonio », come appunto suppone il Fesenkoy, l'isotopo pesante C_{13} dovrebbe essere molto abbondante sopra la Terra; ciò che non è. Si tratta però sempre di teorie che attendono conferma.

b) Poichè l'energia ha una massa, Fesenkoy fa notare che l'energia irradiata dal Sole ruotante porta via dal Sole anche il momento della quantità di moto, onde nel Sole primitivo tale momento era *maggiore* di quello attualmente posseduto dal Sistema Planetario; ciò che aumenta ancora la velocità angolare di rotazione dell'antico Sole, e quindi K .

Notiamo subito che l'osservazione è giustissima. Soltanto occorre considerare che la massa dell'energia irradiata da un astro — anche durante tutta la sua esistenza — è sempre molto piccola rispetto alla massa totale dell'astro stesso (per esempio nella trasformazione dell'idrogeno in elio si ha una perdita di massa di circa $1/130$), onde l'aumento di ω e quindi di K è certamente molto lieve. Si può notare che, oltre all'emissione di energia, vi è anche una emissione corpuscolare del Sole; ma anche questa ha massa trascurabile rispetto a quella totale del Sole stesso. In ogni modo per avere un effetto sensibile, benchè sempre molto tenue, occorre supporre che il Sole sia molto antico. Ed infatti il Fesenkoy, parlando della « sequenza principale » delle stelle nane, ritorna all'antica teoria sostenuta dal Jeans secondo cui si ammetteva per le stelle un'età di $10^{13} - 10^{14}$ anni,

in opposizione alla teoria oggi preferita dagli astronomi secondo cui tale età si ridurrebbe a 10^{10} - 10^{11} anni.

4. Servendosi di queste ipotesi, il Fesenkov trova che il Sole, all'epoca della nascita dei pianeti, ruotava tanto velocemente da avere la forma di un ellissoide di Jacobi; e cioè di un'ellissoide allungata a tre assi, ruotante intorno all'asse minore. I pianeti sarebbero appunto usciti dalle regioni prossime ai « vertici » dell'ellissoide jacobiana; e cioè dalle due estremità dell'asse maggiore. L'origine dei pianeti resta così spiegata.

Ma, giunti a questo punto, nasce la vera difficoltà; difficoltà che il Fesenkov ritiene, come abbiamo detto, quasi insormontabile; difficoltà che venne già incontrata da me e dal Russell in un suo recente libro⁽⁵⁾ e che sembra sbarrare inesorabilmente la strada a tutte le ipotesi cosmogoniche; almeno fino a che restiamo nella pura legge di attrazione di Newton.

Infatti:

a) I pianeti, appena generati, si muovevano certamente in orbite molto prossime al Sole; in proposito Fesenkov ritiene⁽⁶⁾ che la loro distanza dal Sole fosse di circa cinque o dieci raggi solari e cioè, come egli dice, che il primitivo sistema planetario fosse *très serré*. Per quale causa dunque i pianeti si sono oggi allontanati dal Sole a distanze « *relativement énormes* », onde l'attuale distanza di Nettuno dal Sole supera i seimila raggi solari?

b) Come si spiega il fatto che, dopo l'espulsione di queste masse relativamente molto piccole, il Sole abbia tanto rallentato la sua rotazione da passare da un periodo di poche ore ad un periodo di circa venticinque giorni, come oggi vediamo? In altre parole; è possibile supporre che queste piccole masse, espulse dal Sole, abbiano portato via quasi tutto il momento della quantità di moto del globo primitivo?

5. Come ho detto, queste medesime gravissime difficoltà sono state anche incontrate dal Russell, che pure partiva da un'ipotesi cosmogonica ben diversa; e cioè dall'ipotesi dualistica in cui si ammette il passaggio di una stella in vicinanza del Sole. Ecco le sue precise⁽⁷⁾ parole:

È facile comprendere come una stella passando vicina al Sole, ad una distanza di un milione e mezzo di chilometri, possa produrre eruzioni sopra la superficie del Sole stesso. Ma non si è trovato il modo di spiegare come la materia strappata dal

(5) « Si vede dunque come gli studi sull'origine del nostro Sistema, ci abbiano condotto in un vicolo cieco ». (H. N. RUSSELL, *Il Sistema Solare e la sua origine*, p. 223; trad. di T. Jervis; Mondadori, 1941).

(6) Notiamo che recentemente anche Himpel, che suppone che il Sole sia passato per la fase di « stella nuova » trova però che in tale ipotesi il Sistema Planetario dovrebbe essere molto più ristretto (*wesentlich engeren*) e ne attribuisce la dilatazione ad una diminuzione di massa (*Massenverlust*); ciò che però non basta a togliere la difficoltà, come ora diremo. Cfr. HIMPEL, *Das gegenwärtige Stand des Problems des Neuen Sterne*. « Sonderoff. Univ. Sternwarte Wien », Bd. I, n. 3 (1942).

(7) Cfr. H. N. RUSSELL, op. cit., p. 199.

Sole possa poi essere trasportata a distanze centinaia di volte maggiori ed ivi essere abbandonata dalla stella, ecc.

E poco prima, a proposito della difficoltà *b)*, lo stesso Russell ⁽⁸⁾ scrive:

« Anche qui si cozza contro una difficoltà fondamentale, assai più fatale all'ipotesi; la distribuzione della quantità di rotazione (momento della quantità di moto) nel Sistema Planetario. L'enigma è espresso dal seguente interrogativo: Perché il Sole possiede così poca quantità di rotazione? ».

Può dirsi che queste due difficoltà compaiano, più o meno, in tutte le ipotesi cosmogoniche sull'origine del Sistema Planetario.

Ultimamente infatti (gennaio 1950) D. T. Haar, esaminando ⁽⁹⁾ una nuova ipotesi cosmogonica proposta da Weizsacker secondo la quale il Sole fu un tempo contornato da uno strato di materia, a forma di disco molto schiacciato, trova che in tal caso il Sole dovrebbe oggi compiere una rotazione non già in 25 giorni (come mostrano le osservazioni) ma in un periodo compreso tra un minimo di 4 ore ed un massimo di 20 ore. In altre parole, il momento della quantità di moto, rimasto nel Sole, dovrebbe essere oggi da 30 a 150 volte maggiore di quanto indicano le osservazioni!

6. Non sembra che, restando nel campo classico della legge di Newton, sia possibile di superare le due difficoltà *a)* e *b)* sopra indicate. Infatti, nel campo classico, gli unici fenomeni a cui possiamo far ricorso, sono:

a) L'ipotesi di una *diminuzione della massa solare M*, avvenuta dopo il distacco dei pianeti dal Sole stesso.

b) L'azione delle maree, sollevate dal Sole nei pianeti e viceversa.

c) L'attrazione perturbatrice esercitata sui pianeti dall'insieme delle stelle del Sistema Galattico; stelle certamente lontanissime, ma anche molto numerose.

Ora è facile vedere che questi fenomeni sono assolutamente insufficienti a spiegare le grandi distanze attuali dei pianeti dal Sole, qualora si ammetta — come sembra necessario — che originariamente essi si muovessero nelle vicinanze del Sole, come pure a spiegare il piccolo momento della quantità di moto rimasto nel Sole.

Così per esempio sappiamo ⁽¹⁰⁾ che, variando *M* col tempo, l'eccentricità delle orbite planetarie si conserva presso a poco inalterata, mentre la distanza media dal Sole cresce in ragione inversa di *M*. Ne segue che, per aumentare per esempio l'orbita di Nettuno da un semiasse maggiore iniziale di una decina di milioni di chilometri (quindici raggi solari) al valore attuale di quattro miliardi e mezzo di chilometri, occorrerebbe supporre che la massa attuale del Sole sia la quattrocentocinquantesima parte della massa che esso aveva subito dopo il distacco di Nettuno. Ipotesi che non vale nemmeno la pena di discutere.

(8) Cfr. H. N. RUSSELL, op. cit., p. 164.

(9) Cfr. D. T. HAAR, *On the origin of the Solar System*. « Astrophysical Journal », vol. CXI, n. 1, p. 187 (gennaio 1950).

(10) Cfr. G. ARMELLINI, *Il problema dei due corpi di masse variabili*. « Mem. Soc. Naz. delle Scienze, detta dei XL », Tomo XIX, oltre a varie Note sopra lo stesso argomento pubblicate nei « Rendiconti Lincei ».

Certamente più importante è stata l'azione delle maree, come del resto appare da fenomeni ben noti. Basti ricordare che la Luna rivolge sempre la stessa faccia alla Terra; che Mercurio, il pianeta più prossimo al Sole, assai probabilmente rivolge anche esso sempre la stessa faccia al Sole; che Venere, il pianeta più prossimo dopo Mercurio, pur non rivolgendo sempre la stessa faccia al Sole, sembra avere un moto di rotazione assai lento, ecc. In ogni modo però, come risulta dai noti calcoli del Darwin, le modificazioni prodotte dalle maree nelle orbite dei pianeti - e specialmente in quelle dei pianeti superiori - sono indubbiamente molto modeste, pur avendo cooperato ad allontanare i pianeti ed a diminuire il momento della quantità di moto del Sole.

Quanto all'azione perturbatrice esercitata dalla totalità delle stelle del nostro Sistema Galattico, sul moto dei pianeti, possiamo ammettere in prima approssimazione che il Sistema Galattico sia un ellissoide omogeneo, rotondo e schiacciato, e che il Sole giaccia nel suo piano equatoriale; come, presso a poco, mostrano le osservazioni.

In conseguenza, l'attrazione che il Sistema Galattico esercita sul Sole S sarà una forza diretta verso il centro O dell'ellissoide galattico, proporzionale alla distanza OS ed alla densità ρ dell'ellissoide. Analogamente può dirsi per l'attrazione che l'ellissoide esercita sul pianeta P e quindi la differenza vettoriale delle due forze - e cioè la forza perturbatrice che la Galassia esercita sul moto relativo di P intorno a S - sarà una forza diretta da P verso S e proporzionale alla distanza PS. Per facili teoremi di meccanica, le equazioni del moto relativo di P intorno ad S saranno allora:

$$(1) \quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$$

$$(2) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 - \frac{fM}{r^2} - \lambda r$$

dove c, r, ϑ, t, M indicano rispettivamente la costante delle aree, il raggio vettore SP, l'anomalia, il tempo e la massa del Sole che supponiamo costante, mentre f è il coefficiente attrattivo della legge di Newton e λ un coefficiente positivo molto piccolo perchè proporzionale a ρ .

Eliminando ϑ tra (1) e (2) si ha subito:

$$(3) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{fM}{r^2} - \lambda r$$

e quindi, moltiplicando per $2 dr/dt$ ed integrando, si ottiene:

$$(4) \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = -\frac{c^2}{r^2} + \frac{2fM}{r} - \lambda r^2 + 2h$$

dove $2h$ indica la costante dell'energia che nei pianeti è negativa. In conseguenza, poichè il primo membro della (4) è positivo od almeno nullo, la r deve essere sempre compresa tra due radici positive consecutive dell'equazione di quarto grado

$$(5) \quad F(r) = -\lambda r^4 + 2hr^2 + 2fMr - c^2.$$

Ne segue che la minima e la massima distanza dal Sole che il pianeta P raggiunge durante il suo moto orbitale, rimangono *costanti* col variare del tempo. L'attrazione stellare non offre quindi nessuna spiegazione per l'allontanamento progressivo dei pianeti dal Sole, e nemmeno per quanto riguarda il debole momento della quantità di moto rimasto nel Sole.

7. Volendo dunque superare le difficoltà che abbiamo incontrato, non restano forse che due ipotesi; e cioè:

a) Ricorrere all'*ipotesi dell'espansione dell'Universo*, e cioè sostanzialmente alla cosmogonia di Lemaitre. A parte però che l'espansione non ci spiega perchè sia tanto piccolo il momento della quantità di moto rimasto nel Sole, sorgono altre difficoltà; basterà accennare al fatto che la solidificazione della crosta terrestre — che i geofisici moderni⁽¹¹⁾ fanno rimontare ad oltre tre miliardi di anni or sono — sarebbe anteriore al principio dell'espansione e cioè all'origine del Sistema Planetario; al fatto — messo in luce da Hubble — che occorrerebbe rinunciare alla distribuzione uniforme delle galassie nello spazio per dare alla nostra Via Lattea una situazione quasi privilegiata, ecc.

b) *Modificare la legge di Newton*, introducendovi, per esempio, un termine correttivo proporzionale alla velocità radiale, come io ho proposto⁽¹²⁾ in altre Note.

Se infatti supponiamo che la forza di attrazione F tra due punti di massa m ed m' sia data dalla formola

$$(6) \quad F = - \frac{f m m'}{r^2} \left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right)$$

dove ε indica un piccolo coefficiente positivo, si dimostra col calcolo che i pianeti tendono ad allontanarsi dal Sole e che il momento della quantità di moto tende a passare dai pianeti al Sole; ciò che risolverebbe pienamente la duplice difficoltà in cui ci siamo incontrati.

Sostanzialmente il termine $\varepsilon dr/dt$ (che io ho chiamato *termine cosmogonico*) corrisponde all'introduzione di una *forza dissipativa*, onde si hanno effetti analoghi (sebbene non identici) a quelli prodotti dalle maree; ma in una scala molto più ampia.

Al di fuori di queste due vie, non si vede ancora come sia possibile superare i due ostacoli che si presentano a tutti gli studiosi moderni di cosmogonia planetaria.

(11) Cfr. C. MORELLI, *L'età della Terra*. « Annali di Geofisica », vol. II, n. 3 (1949).

(12) Cfr. G. ARMELLINI, *I problemi fondamentali della cosmogonia e la legge di Newton*. « Rend. Lincei », 2° sem. (1937); 1° sem. (1938); 2° sem. (1938); 1° sem. (1939) e « Rend. Acc. d'Italia », 2° sem. (1939); 1° sem. (1940); 2° sem. (1940); 2° sem. (1940) e 1° sem. (1942).

Microbiologia. — *Azione del calore sulla liberazione di acido nucleinico dai batteri* (*). Nota (**) del Corrisp. LUIGI CALIFANO.

È stato precedentemente comunicato che la esposizione al calore di cellule batteriche determina il distacco da esse di acido nucleinico che si può dimostrare nel liquido in cui sono sospese le cellule, sia con la reazione di Bial come, più sensibilmente, con la caratteristica curva di assorbimento nell'ultravioletto (Califano ⁽¹⁾). Il fenomeno ha estensione differente nelle diverse specie batteriche (Califano ⁽¹⁾) e per una stessa specie varia con l'età delle cellule perchè quelle più giovani sono notevolmente più sensibili (Cantelmo ⁽²⁾) mentre le spore, anche se esposte a 120° C. non abbandonano acido nucleinico nel mezzo ambiente (Davia ⁽³⁾).

Le ricerche, che qui si riferiscono, rappresentano la estensione delle precedenti osservazioni ad altre specie batteriche e precisano l'andamento del fenomeno a varie temperature e per tempi di esposizione diversi.

PARTE SPERIMENTALE. — Si è sperimentato con i seguenti batteri: 1° *Escherichia coli* (ceppi, 800, 802, 803, 806, I.S.I.); 2° *Diplococcus pneumoniae* (tipo III, fase S); 3° *Neisseria gonorrhoeae*; 4° *Staphylococcus aureus*; 5° *Klebsiella pneumoniae*; 6° *Bacillus subtilis*; 7° *Thermobacterium* n. 2184 (National Cannery Association).

I germi erano coltivati in agar, tranne lo pneumococco coltivato in brodo Martin ed il gonococco coltivato in *tryptose agar* (Difco).

I batteri da 1 a 4 erano stati parzialmente esaminati nelle precedenti ricerche. Le cellule batteriche venivano lavate tre o quattro volte alla centrifuga con soluzione fisiologica, le sospensioni batteriche erano quindi filtrate su filtro di Jena a pori larghi (3G1 e 3G2) per allontanare tracce di terreno solido od ammassi di cellule. La esposizione al calore è durata dieci minuti, tranne che negli esperimenti nei quali si è ricercata l'influenza del tempo sul fenomeno. Si è sperimentato con temperature da 50° a 100° C. con intervalli di 10°. Dopo la esposizione al calore, le sospensioni venivano centrifugate a 9000 e talvolta a 12000 giri e si ottenevano liquidi limpidi o lievemente torbidi, a seconda della specie batterica e della temperatura di esposizione, ma sempre privi di germi. La centrifugazione ad alta velocità è condizione essenziale per la determinazione spettrofotometrica dell'acido nucleinico nelle condizioni sperimentali usate.

Si è adoperato lo spettrofotometro di Beckman con lampada a idrogeno e cuvette di quarzo di 1 cm. di lato. Se i liquidi di centrifugazione risultavano troppo concentrati così che l'assorbimento non era misurabile, si diluivano con acqua distillata. La torbidità delle sospensioni batteriche era determinata con colorimetro-nefelometro di Klett-Summerson.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia dell'Università di Napoli.

(**) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1950.

(1) L. CALIFANO, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, 8, 94 (1950).

(2) P. CANTELMO, Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, 9, 104 (1950).

(3) G. DAVIA, « Nuovi Annali di Igiene e Microbiologia », in corso di stampa.

Escherichia coli. — La liberazione di acido nucleinico da calore è in questo germe notevole. Già nelle precedenti ricerche si era notato che dalle cellule esposte a 60° C. si ha passaggio nel liquido di sospensione di una quantità di acido nucleinico più elevata di quella che si riscontra nel liquido di sospensione di cellule esposte a 70° C. Questo fatto viene qui confermato come fenomeno costante. Si è trovato, inoltre, che a temperature progressivamente maggiori (80°–90° C) si liberano dalle cellule quantità progressivamente minori di acido nucleinico. A 100° C. la quantità di acido nucleinico che si libera è un poco più

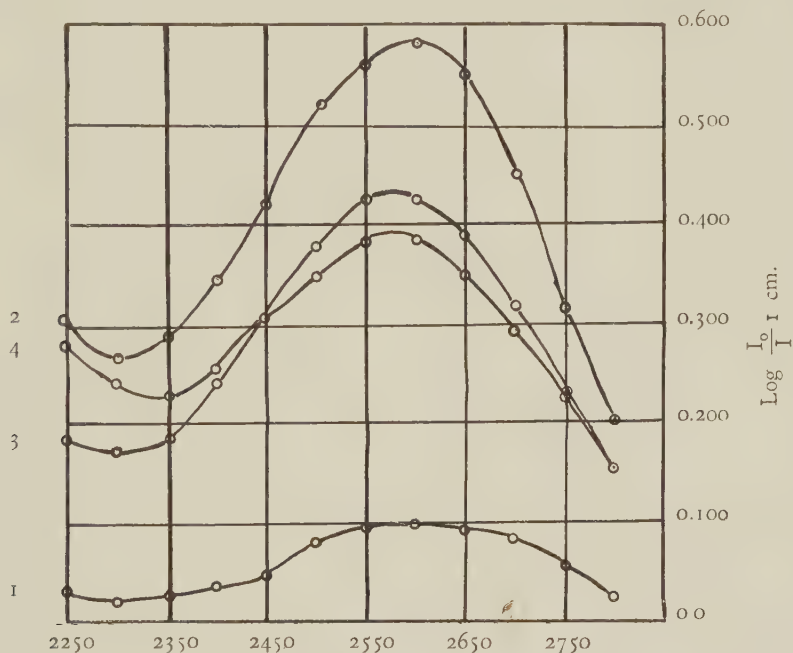


Fig. 1. — *E. coli.*

Curve di assorbimento di liquidi di centrifugazione, di sospensioni esposte:
1 a 50° C. ; 2 a 60° C. ; 3 a 70° C. ; 4 a 80° C. λ in Ångström.

elevata di quelle corrispondenti a 70°–80° e 90° C. ma sempre inferiore a quella che passa in soluzione a 60° C.

Si può pensare che il fenomeno proceda così: il distacco di acido nucleinico dalle cellule è indipendente dalla coagulazione delle proteine cellulari perchè inizia a temperatura più bassa (50° C) di quella alla quale si avvera la coagulazione, e progredisce col crescere della temperatura. Quando, però, interviene la coagulazione proteica, il precipitato che si forma include parte dell'acido nucleinico che, altrimenti, sarebbe passato in soluzione. Si viene così a determinare come un intervallo critico di temperatura che va dall'inizio della liberazione dell'acido nucleinico all'inizio della coagulazione proteica, praticamente tra 50° e 60° con un *optimum* intorno a 60° C. per un tempo di esposizione di dieci minuti. In queste condizioni, non essendo ancora intervenuta la denaturazione proteica da calore, si estrae dalle cellule la più elevata quantità di acido nucleinico. Si può

spiegare in questo modo anche la progressiva minore liberazione di acido nucleinico col crescere della temperatura di esposizione (70° – 80° – 90°) (fig. 1). Anche queste cellule passano per l'intervallo critico di temperatura, ma questo è tanto più breve quanta più elevata è la temperatura da raggiungere e corrispondentemente si liberano quantità di acido nucleinico progressivamente inferiori. È verosimile che quello che si è chiamato intervallo critico di temperatura non significhi altro che la interferenza esercitata da un altro fenomeno che interviene nel corso della liberazione dell'acido nucleinico per azione del calore, cioè la denaturazione proteica. A 100° , la architettura cellulare è così alterata che, evidentemente, altre quote di acido nucleinico si staccano dalle cellule e sarà interessante assodare la natura degli acidi nucleinici che passano in soluzione in tale circostanza. Ciò è tanto più verosimile in quanto l'assorbimento diffuso verso le onde più corte (2250 \AA) è maggiore nei liquidi di centrifugazione di cellule tenute a 100° C. di quello corrispondente a cellule esposte a temperature inferiori, ciò che è indice del passaggio in soluzione di altri costituenti cellulari non estraibili che a 100° C.

Diplococcus pneumoniae (Tipo III S). - Nel precedente lavoro si era comunicato che il distacco di acido nucleinico inizia, per questo germe, già a temperature intorno a 50° C. e raggiunge sviluppo notevole a 60° e 70° . Questa osservazione è stata confermata per un certo numero di esperimenti consecutivi, trovando pure che le quantità di acido nucleinico che si liberano a temperature superiori ai 70° C. non sono diverse da quelle che si distaccano a 60° o a 70° C. Nelle ricerche eseguite dopo circa sei mesi da queste si è osservato un assorbimento notevolmente più intenso verso la zona di onde più corte dell'ultravioletto (2250 \AA) e quantità molto più modeste di acido nucleinico che nelle prime ricerche. È verosimile che questo fatto si possa porre in rapporto con lo sviluppo della capsula che si è avverata col tempo. All'inizio, essa era poco sviluppata e quasi diafana, in seguito è diventata più ampia e più densa. Evidentemente, nelle prime ricerche l'acido nucleinico liberato dal calore facilmente diffondeva all'esterno e modesta era la quantità di materiale capsulare che abbandonava il corpo batterico. Quando, successivamente, la capsula è diventata più consistente si è avverato, per azione del calore, il distacco di maggiore quantità di materiale capsulare, cioè passaggio in soluzione di sostanze ad assorbimento diffuso a 2250 \AA . L'acido nucleinico somatico, invece, è come difficoltà a diffondere attraverso la spessa capsula, anche se parte del materiale di costituzione di questa è passata all'esterno. Ricerche quantitative sui costituenti cellulari che a varie temperature passano in soluzione, per i vari tipi e fasi di questo germe, potranno concorrere alla conoscenza della struttura citologica di esso.

Neisseria gonorrhoeae. - Notevole è la quantità di acido nucleinico che si libera da questo germe a 50° C. ; col crescere della temperatura aumenta la liberazione, segno che la coagulazione proteica che interviene non lo trattiene incorporato.

Staphylococcus aureus. - Il comportamento di questo germe al calore è del tutto caratteristico. A 50° è scarsissima la quantità di acido nucleinico che passa in soluzione o non ne passa affatto; a 60° è solo di poco maggiore, mentre è

molto elevata quella che si libera a 70°. A temperature superiori, di nuovo, piccole quantità passano in soluzione nel mezzo ambiente. La 2ª figura riproduce curve di assorbimento a 50°-60°-70°-90°. Si viene, così a determinare una temperatura ottimale che è quella di 70°. Il meccanismo con il quale essa si determina è evidentemente quello prospettato a proposito della *E. coli*, con la differenza che per lo stafilococco i fenomeni sono più netti e staccati per quanto riguarda l'effetto limitante che la coagulazione proteica ha sulla soluzione dell'acido nucleinico, forse perchè la temperatura, cui veramente inizia il distacco di acido nucleinico, è elevata (70°) e molto vicina a quella di coagulazione delle proteine,

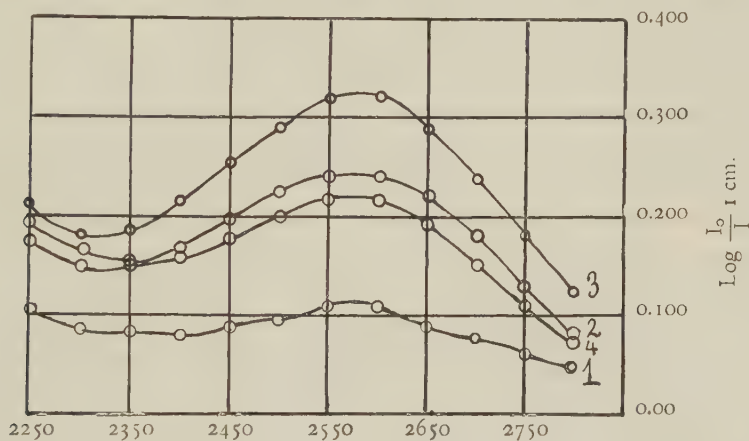


Fig. 2. - *St. aureus*.

Curve di assorbimento di liquidi di centrifugazione di sospensioni esposte:
1 a 50° C. ; 2 a 60° C. ; 3 a 70° C. ; 4 a 90° C. λ in Ångström.

mentre il *coli* già a 50° dà acido nucleinico in soluzione. A ciò si aggiunga che, evidentemente, il precipitato proteico che si forma è nello stafilococco particolarmente compatto. Ciò si deduce dal fatto che mentre per gli altri germi la densità ottica a 2250 Å cresce col crescere della temperatura, per lo stafilococco i massimi valori di densità si hanno proprio per le cellule esposte a 70° C., cioè in corrispondenza del massimo di liberazione di acido nucleinico, ciò che significa che assai scarsa è la quantità di altri componenti che passano in soluzione, i quali nemmeno si liberano alla temperatura di ebollizione dal precipitato che si è formato, come avviene, invece, negli altri casi.

È da notare la correlazione che esiste tra maggiore resistenza di questo germe alla liberazione di acido nucleinico al calore (70°) e resistenza di esso alla inattivazione al calore umido.

Se si aumenta la durata della esposizione ad una determinata temperatura, praticamente non si osserva aumento di acido nucleinico nel liquido in paragone delle quantità che si riscontrano per esposizione di dieci minuti a quelle temperature.

Klebsiella pneumoniae. -- La quantità di acido nucleinico che si libera è piuttosto modesta in confronto di quella che si riscontra con altri germi alla stessa torbidità. Il massimo si raggiunge intorno ai 60° C.; a 70° C. si hanno

valori un po' più modesti, che diventano di nuovo più elevati a temperature superiori. L'inizio del distacco di acido nucleinico si ha in modo molto netto a 50° C. mentre a temperatura ambiente esso è praticamente trascurabile. In conclusione, poichè a 50° C. si hanno valori di assorbimento che sono intorno alla metà di quelli che si riscontrano alla temperatura ottimale cioè a 60° C., questo germe è da ritenersi tra i più precocemente sensibili all'azione del calore. Per il fatto che a 70° C. si ha una lieve diminuzione del passaggio in soluzione di acido nucleinico, diminuzione che manca per temperature superiori, si può ritenere che mentre a 70° C. il precipitato è compatto esso si disfi a temperature superiori e sostanze passino nel liquido ambiente.

Ciò è tanto più verosimile in quanto la densità ottica a 2250 Å dei liquidi di sospensione di cellule tenute a temperature più elevate dei 70° è molto più elevata di quella di liquidi di cellule tenute a 60° C. cioè quando si ha il massimo di liberazione di acido nucleinico, ciò che significa che notevoli quantità di costituenti passano in soluzione a quelle temperature e quindi verosimilmente l'inclusione di acido nucleinico nel precipitato proteico è più limitata che nel caso di altri batteri.

B. subtilis. — Il massimo di liberazione di acido nucleinico si ha per questo germe a 70° C. L'inizio del fenomeno si ha a 50° C. con aumento notevole a 60° C. Anche dai germi tenuti a temperatura ambiente si ha una lieve quantità di acido nucleinico, probabilmente indice di un'iniziale autolisi. Temperature superiori ai 70° C. sino a 100° hanno bensì azione sulle cellule batteriche, determinando distacco di acido nucleinico, ma la quantità che si libera è inferiore a quella corrispondente alle cellule tenute a 70° C. e tanto minore quanto più elevata è la temperatura, per cui è da ritenere che il fenomeno proceda con lo stesso meccanismo prospettato in altri casi (per esempio *E. Coli*).

Thermobacterium. — Il bacterio termofilo su cui si è sperimentato proviene da una cultura cortesemente inviata dal Dr. C. E. Georgi che l'ha ottenuta dalla National Cannners Association col n. 2184. È un bacillo aerobico, con *optimum* di sviluppo a 65° C., minimo a 45° C., e massimo a 70° C. La coltivazione avveniva in *agar* per 24 h. a 67°–68° C. La quantità di acido nucleinico che si libera da questo germe per azione del calore è assai modesta, la più modesta riscontrata finora tra i germi presi in esame. Esiste rapporto tra temperatura di esposizione e quantità di acido nucleinico che si stacca. Anche nel liquido di sospensione di cellule tenute per due ore a temperatura ambiente si ha presenza di una piccola quantità di acido nucleinico. Cresce gradatamente, per quanto molto modestamente, tale quantità col crescere della temperatura di esposizione per raggiungere il massimo a 100° C. È interessante notare che, invece, per le sostanze che assorbono diffusamente a 2250 Å si ha un *optimum* a 70°. Le temperature superiori, evidentemente, per l'intervenuta coagulazione limitano la solubilità di esse nel mezzo ambiente.

DISCUSSIONE. — Il calore determina il distacco dalle cellule batteriche di componenti del protoplasma i quali passano in soluzione nel mezzo ambiente. Tra le sostanze che si liberano, la più importante, perché riscontrata in tutti i

casi studiati, è l'acido ribonucleinico facilmente identificabile dalla tipica banda di assorbimento con il suo massimo a 2575 Å. Non è, però, questa la sola sostanza che si libera dai germi per azione del calore perchè in alcuni casi, all'alto assorbimento a 2250 non corrisponde una proporzionata altezza della banda di assorbimento dell'acido nucleinico. Il più evidente esempio a questo riguardo è dato dallo pneumococco III, i liquidi di sospensione del quale hanno mostrato sempre notevole assorbimento diffuso a 2250 Å, assorbimento in rapporto alla temperatura di esposizione e sicuramente molto più intenso di quanto non comportasse la quantità di acido nucleinico, che per azione del calore veniva staccata dalle cellule. Quando nel corso degli esperimenti le cellule batteriche del ceppo usato, che inizialmente presentavano la capsula poco pronunziata e poco densa, si sono successivamente modificate e la capsula è diventata più larga e più densa, si è avuto che per azione del calore mentre era assai aumentata la densità ottica a 2250 Å, segno del passaggio in soluzione di componenti cellulari, la quantità di acido nucleinico che si staccava era ridotta, segno, probabilmente, della difficoltà dell'acido nucleinico, liberatosi dal corpo batterico, a diffondere attraverso la capsula.

Il fenomeno del distacco dell'acido nucleinico dal corpo cellulare per azione del calore ha sviluppo diverso nelle varie specie batteriche prese in esame, in rapporto alla temperatura. Non che esista per ciascuna specie una temperatura caratteristica cui inizia il fenomeno, ma la quantità di acido nucleinico che si libera ad una determinata temperatura è diversa e per vari germi si è trovata una temperatura in cui si osserva la massima liberazione di acido nucleinico nel mezzo ambiente nel senso che a temperature superiori ed inferiori si riscontrano valori più bassi allo spettrofotometro. Così è il caso della *E. coli* il cui *optimum* è a 60° C., come è a 60° C. per la *Klebsiella pneumoniae*, mentre per il *B. subtilis* e per lo *Staphylococcus aureus* esso è nettamente a 70° C. Per altri batteri l'*optimum* non è netto e piuttosto si osserva un progressivo aumento di acido nucleinico che si libera col crescere della temperatura, il massimo essendo a 100° C.

La prima condizione, cioè l'*optimum* di temperatura per la liberazione di acido nucleinico, si può pensare come dovuta alla limitazione che su di essa ha la denaturazione di altri costituenti citoplasmatici ed in particolare delle proteine. Finchè queste non sono coagulate l'acido nucleinico si stacca per azione del calore dalla proteina cui è legato e passa in soluzione. Quando si determina, invece, la denaturazione proteica, una parte più o meno notevole di acido resta inclusa nel precipitato che si forma e pertanto non si scioglie nel liquido di sospensione delle cellule. Con ciò non si vuole intendere che sia la sola proteina del nucleoproteide, che coagulando, trattiene l'acido nucleinico, perchè è possibile che tutto il complesso citoplasmatico, denaturabile al calore, costituisca il precipitato che include l'acido e non ne permette la soluzione.

Naturalmente, se il meccanismo prospettato è quello reale, bisogna ammettere che l'acido nucleinico che si riscontra nei liquidi di sospensione di cellule esposte alle temperature più elevate si sia liberato dalle cellule nell'intervallo di tempo intercorso dall'inizio del riscaldamento fino al raggiungimento della temperatura di coagulazione. Ciò sembra tanto più verosimile in quanto con l'*E. coli* e

con il *B. subtilis* si è trovato che a 90° C. si riscontra meno acido nucleinico che a 80°, ciò che si può mettere in rapporto col tempo più breve che è intercorso nel primo caso in confronto del secondo per il raggiungimento della temperatura di coagulazione. In questo modo, l'*optimum* di temperatura riscontrato è espressione soltanto di una condizione sperimentale e cioè della non ancora esercitantesi interferenza della coagulazione proteica sulla solubilità dell'acido nucleinico nel mezzo di sospensione.

La seconda condizione, cioè la corrispondenza tra liberazione di acido nucleinico e temperatura di esposizione può essere espressione della formazione di precipitati poco compatti e perciò meno capaci all'inclusione dell'acido nucleinico, che pertanto passa in soluzione. Non presentano temperatura critica lo pneumococco ed il gonococco. Un comportamento alquanto particolare è quello riscontrato per il termobatterio (n. 2184) il quale al calore libera piccole quantità di acido nucleinico, che diventano progressivamente più elevate col crescere della temperatura. Quantità evidenti di acido nucleinico si liberano anche dalle cellule esposte a 50° o 60° C., temperature queste perfettamente compatibili con la vita del germe, il cui *optimum* di sviluppo è, come si è detto, a 65° C. Si ha a che fare qui con una particolare architettura citochimica, già intuibile per il fatto stesso della moltiplicabilità del germe a temperature inattivanti la maggior parte delle forme vegetative batteriche, ma sperimentalmente messa in evidenza da Militzer e Collaboratori⁽⁴⁾ i quali hanno dimostrato come la malicodeidrogenasi estratta da questo germe resista alla temperatura di 65° C., che invece inattiva rapidamente lo stesso fermento estratto da batteri mesofili. Non è possibile, al momento, spiegare l'andamento della liberazione di acido nucleinico da questo germe, perchè sono necessarie preliminari ricerche sulla costituzione morfologica e chimica di esso.

Come si è detto, la liberazione di acido nucleinico è per varie specie già osservabile per le cellule tenute a 37° C. o anche a temperature più basse e questo fatto è facilmente spiegabile con l'autolisi cellulare che nei batteri più fragili (gonococco e pneumococco) è fatto ben conosciuto. Questa spiegazione non può avere però valore per i batteri esposti a temperature superiori, sia perchè la quantità di acido è in alcuni casi enorme e la liberazione troppo rapida per essere espressione di un fenomeno autolitico, sia perchè il fenomeno si avvera anche a temperature prossime e superiori a quelle di inattivazione degli enzimi e non resta perciò che la possibilità o di rottura, per azione del calore, di una struttura (membrana o strato mucoso periferico) che tiene incluso l'acido nucleinico, o la rottura dei legami chimici che uniscono l'acido nucleinico alla proteina del nucleoproteide o di altri complessi chimici. Questa seconda possibilità è forse la più reale, soprattutto per il fatto che anche dai *virus* cristallizzati si può avere distacco di acido nucleinico per azione del calore, come dimostrarono Cohen, e Stanley⁽⁵⁾ con un preparato cristallino di mosaico del tabacco, che riscaldato a 100° per minuto, diede in soluzione acido nucleinico libero.

(4) W. MILITZER, T. B. SONDEREGGER and L. E. TUTTLE and C. E. GEORGI, « Arch. of Bioch. », 24, 75 (1949).

(5) S. S. COHEN and W. M. STANLEY, « J. Biol. Chem. », 144, 589 (1942).

È da rilevare, che, come si è accennato in precedenza, esiste un certo rapporto tra liberazione di acido nucleinico al calore ed inattivazione dei germi al calore umido. I germi che sono inattivati a più basse temperature (gonococco, pneumococco) liberano a 50°-60° quantità di acido nucleinico notevolmente maggiori di quelle liberate ad esempio dallo stafilococco e dal *B. subtilis*. Questo fatto può rivestire una certa importanza nel meccanismo dell'inattivazione al calore umido dei germi, anche se non ne costituisce il fattore fondamentale.

La conoscenza del fenomeno della liberazione al calore di acido nucleinico dalla cellula batterica può utilmente servire per spiegare varie questioni di citologia batterica, come quelle derivanti dalla sensibilità verso il lisozima dei germi uccisi al calore (Califano, 1950⁽⁶⁾), o anche per interpretazione delle immagini di cellule di *E. coli* esposte al calore che recentemente Heden e Wyckoff⁽⁷⁾ hanno ottenuto con il microscopio elettronico.

Biologia generale. - *Mutazioni migranti per fondare nuove unità sistematiche.* - *Analogie con le «metastasi» delle malignità biologiche.* Nota (*) del Socio ACHILLE RUSSO.

Nelle collezioni zoologiche fatte da Luigi Sanzo⁽¹⁾, esplorando, con la R. Nave Amm. Magnaghi nel 1923-24, il Canale di Suez, furono trovati a Porto Said diversi esemplari di due *Asteroidi* tipicamente mediterranei, che Mortensen⁽²⁾, per errore, diagnosticò forme normali adulte di *Astropecten bispinosus*, Otto ed *Astropecten Ionstoni* D. Chiaie.

In una Nota, pubblicata in questi «Rendiconti»⁽³⁾, ho dimostrato invece che di tali specie esse siano le *mutazioni*, distinte da un'allela presenza-assenza (W. Bateson) del tipo *scute*, in quanto alcune spine, che ornano le braccia, sono ridotte a piccoli monconi in *A. bispinosus*, mancano affatto in *A. Ionstoni*, similmente a quello che fu osservato nelle *mutazioni* indotte di *Drosophila* per le setole, che sporgono nel cefalotorace.

È da notare anzitutto, che, mentre nel Mediterraneo la *mutazione* del *bispinosus* è rarissima⁽⁴⁾ e quella del *Ionstoni* è in preparazione, nel Canale le

(6) L. CALIFANO, «Boll. Ist. Sier. Mil.», 1950 in corso di stampa.

(7) C. G. HEDÉN and R. W. G. WYCKOFF, «Journ. of Bact.», 58, 153 (1949).

(*) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1950.

(1) L. SANZO, *Campagna idrografica nel Mar Rosso della R. Nave Ammiraglio Magnaghi*. «Ist. idrografico della R. Marina», Genova 1928.

(2) TH. MORTENSEN, *Report on the Echinodermes*. «Trans. Zoolog. Soc. London», 1926.

(3) A. RUSSO, *Mutazioni e varietà fenotipiche in alcuni Echinodermi*. «Rend. Acc. Lincei», vol. I, pp. 272-280 (1946).

(4) Dal 1935 al 1941, rastrellando il fondo fangoso alla foce del Simeto, dove vive accantonato *Astropecten bispinosus*, furono raccolti centinaia d'individui normali, ma solo nel 1939 si ebbe l'unico individuo mutato per atrofia delle spine radiuli. Il rarissimo esemplare potrebbe fare ritenere che la *mutazione*, come altre, studiate geneticamente, sia *omozigote* ed abbia il *fattore letale*, per cui, non lasciando successori nella zona dove si è costituita, si trasferisce in ambiente più favorevole per fondarvi una stirpe *eterozigote* senza fattore dannoso.

due *mutazioni* al completo, in tutto simili, per i caratteri esterni, a quelle mediterranee, furono raccolte in numerosi esemplari.

Restava, pertanto, da risolvere il problema della provenienza delle due forme mutate a Porto Said da lontana località, considerando che per i loro tardi movimenti e perchè accantonate in area limitata, in ambiente con determinati caratteri, non vi si potevano trasferire; nè, d'altra parte, che potessero derivare da trasformazione mutativa locale, mancando nel Canale la specie normale rappresentante il ceppo.

Escluse simili derivazioni ed altre, proposte soprattutto da Fox⁽⁵⁾, si è reso evidente che le due *mutazioni* abbiano potuto raggiungere l'imboccatura del Canale a mezzo dei diversi stadi larvali galleggianti, da quelle sessualmente prodotte in pieno Mediterraneo, i quali, trasportati con il *Plancton* dalle correnti marine, trovarono l'ambiente più favorevole per il loro successivo sviluppo.

Nel nuovo ambiente, come fu cennato nella mia Nota sopra citata, le *mutazioni* assumono carattere di unità sistematiche, riproducendosi per la fondazione di una nuova stirpe, conforme alle nozioni espresse in proposito da Timofeef-Ressovsky⁽⁶⁾.

L'autore, difatti, dopo avere analizzato i processi della *microevoluzione*, afferma: « Rimase così dimostrato che *stirpi sistematicamente reali* si costituiscono effettivamente a partire da mutazioni ».

L'asserzione di Timofeef, oltre a quanto fu detto per i due *Astropecten*, è convalidata da un altro Echinoderma, *Echinocardium cordatum* Penn., anche tipicamente mediterraneo, raccolto a Porto Said in numerosi esemplari tutti di piccole dimensioni in confronto dei grandi individui che si raccolgono in pieno Mediterraneo. Avendo esaminato con sezioni microtomiche gli organi sessuali delle forme africane, si è constatato che contenevano ova e spermii maturi per essere emessi, talchè potevano essere considerate già adulte con mutazione caratterizzata da *nanismo*. Tali individui, per la maturazione degli elementi sessuali, per la loro continuità genetica, per i numerosi esemplari raccolti, essendosi stabilizzati nel nuovo ambiente, raggiunto a mezzo delle larve galleggianti, come i due *Astropecten*, rappresentano anch'essi una nuova unità sistematica, secondo il concetto di Timofeef. (Cfr. Tavola fotografica nella mia Nota avanti citata).

I *tumori maligni*, anch'essi individualità mutate⁽⁷⁾, oltre a particolari caratteri ed a particolari funzioni, ne hanno alcuni, che sono comuni ad altre *mutazioni*, fra i quali il *carattere recessivo* ed il *potere germinale*.

Il primo di essi si manifesta negli *incroci*, che, come in altre *mutazioni*, seguono le *leggi di Mendel*, che lo fanno ricomparire nella 2ª generazione filiale, quando i caratteri si dissociano; il secondo è palese con il potere riproduttivo, che nei tumori

(5) M. Fox, *The Biology of the Suez Canal*. « Nature », vol. CXV, 1925. Dello stesso autore si consulti: *Zoological results of the Cambridge Expedition to the Suez Canal*. « Transactions of the Zoological Society of London », 1926-29.

(6) N. W. TIMOFEEF-RESSOVSKY, *Genetica ed evoluzione*. « Scientia Genetica », Torino 1939.

(7) Sebbene il riconoscimento delle mutazioni sia fondato su i risultati della *Genetica*, secondo i quali il loro insorgere è determinato da mutamenti interni dei *geni* protoplasmatici e cromosomici, che sono il corredo ereditario delle cellule sessuali e somatiche, pure, precedendo tali mutamenti interni i caratteri appariscenti all'esterno, solo questi, nella maggioranza dei casi, sono stati tenuti presenti.

ha varie manifestazioni. Esso, com'è noto, è dimostrato dai *trapianti*, dagli *innesti* diversi, *autoplastici*, *omoplastici*, *eteroplastici*, dalle culture *in vitro* e soprattutto dalle *metastasi*, oggetto dell'analogia con la migrazione delle *mutazioni* sopra trattate.

È noto, difatti, che, dopo la formazione del tumore da esso si distaccano cellule o gruppi di cellule con potere germinativo, che, trasportati lontano dal luogo di origine a mezzo di correnti ematiche, linfatiche, da liquidi interstiziali del connettivo o con altri mezzi (disseminazione, innesto), ove esse non siano distrutte per cause diverse, producono nell'organo in cui hanno preso sede, altri tumori, spesso di maggiore volume e virulenza e talora, per proliferazione, piccoli tumori.

Non ostante la diversità formale dei fenomeni sopra cennati, l'analogia è resa evidente dai caratteri comuni alle due *mutazioni* e dalla loro successiva dislocazione per migrazione di elementi germinativi, trasportati in altra sede da correnti liquide.

Tale fenomeno migratorio potrebbe collegarsi alle *migrazioni sessuali* di alcuni animali, che cercano ambienti più favorevoli, adatti al loro sviluppo ed alle particolari esigenze della sostanza vivente, ancora sconosciute.

Antropologia. — *Diagrafo ad uso della cranio-osteografia* (*).
Nota (**) del Socio SERGIO SERGI.

L'uso sempre più diffuso e generale dei craniogrammi e degli osteogrammi in antropologia, perchè essi costituiscono uno dei più validi mezzi di analisi delle caratteristiche morfometriche ed architetture dello scheletro, e la necessità che i rilievi debbono essere praticati con la più rigorosa precisione, mi inducono a presentare il nuovo modello di diagrafo da me ideato e perfezionato, che sostituisce vantaggiosamente i modelli correnti ed apporta notevoli miglioramenti anche a quelli che io stesso ho fatto fino ad ora costruire.

Il primo tipo, *modello A*, del mio diagrafo di cui mi sono valso per molto tempo fu da me descritto fin dal 1926 (1). Esso differisce dai tipi degli altri autori per l'altezza maggiore dell'asta verticale di sostegno e per l'aggiunta di una vite micrometrica di richiamo al cursore annesso al braccio orizzontale superiore, *braccio di livello*, così da me chiamato perchè questo con la sua punta individua il livello di quel piano orizzontale, al quale corrisponde la sezione del cranio o di qualsiasi osso di cui si desidera proiettare il contorno od i punti in esso contenuti. Mediante la vite micrometrica di richiamo collegata al braccio di livello si possono eseguire movimenti minimi di innalzamento e di abbassamento della punta del braccio allo scopo di farla facilmente ed esattamente coincidere con il piano orizzontale di riferimento. In questo primo *modello A* il braccio orizzontale inferiore (da me detto *braccio scrivente* o *registratore* perchè porta alla sua estremità libera verticalmente una matita con cui si segna la proiezione sul foglio

(*) Dall'Istituto di Antropologia della Università di Roma.

(**) Presentata nella seduta del 3 giugno 1950.

(1) SERGIO SERGI, *Un supporto per il cubocranioforo di Martin ed un nuovo modello di diagrafo*. « Riv. di Antropologia », vol. 27°, 1926-1927.

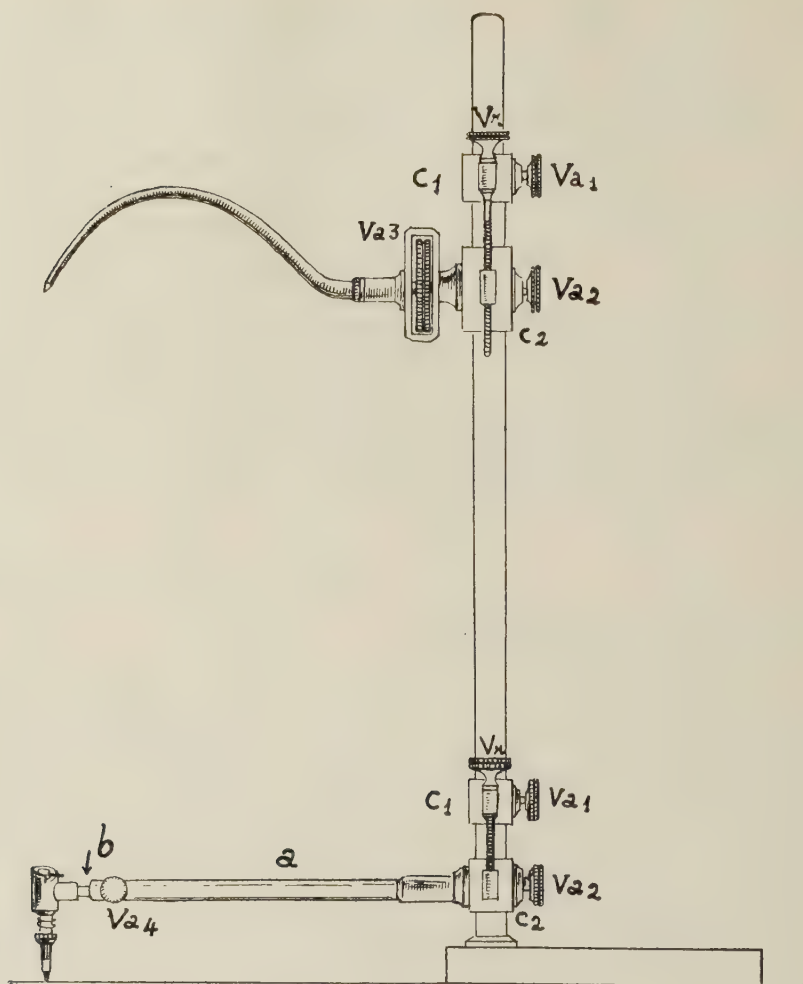
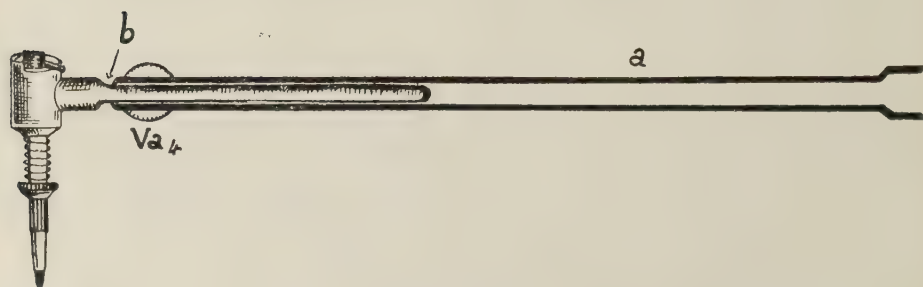


Fig. 1. - Diagramma di S. Sergi. Modello B.

Fig. 2. - Braccio scrivente del diagramma S. Sergi. Modello B.
(Spiegazione nel testo).

sottostante) era costituito di un solo pezzo cioè da un'asta cilindrica connessa all'asta verticale di sostegno mediante un semplice cursore munito di una vite di arresto. Il braccio scrivente in tal caso può soltanto essere abbassato ed innalzato a mano libera per essere avvicinato od allontanato dal foglio di proiezione.

Nel *modello A* la posizione sulla stessa verticale della punta scrivente e della punta di livello, condizione indispensabile per la esatta proiezione ortogonale, è assicurata in modo permanente dalla buona costruzione dello strumento. Ma se questa condizione viene alterata, come può accadere spesso e facilmente per cause le più varie e non sempre precisabili, non si può procedere alla immediata correzione del difetto. Di regola ogni strumento di precisione deve potere essere completato da dispositivi di controllo e di rettifica sensibili al massimo, che permettano di procedere ad ogni eventuale correzione e che possano anche rendere agevole e sicura la sua messa a punto prima e durante l'uso. Nell'adoperare il diagrafo occorre procedere ad ogni istante al controllo della verticalità delle sue punte e se questa risulta alterata occorre potere provvedere alla immediata correzione. La esperienza mi ha indotto pertanto a modificare il braccio scrivente così che l'operatore sia in grado in ogni istante di accorciarlo, allungarlo od inclinarlo secondo necessità in modo da riuscire ad assicurare in qualsiasi momento la posizione sulla stessa verticale delle due punte, quella di livello e quella scrivente. Per raggiungere questo scopo nel modo più semplice ho fatto costruire un altro modello di diagrafo, *modello B* (fig. 1 e 2), adottato da qualche tempo da molti istituti. In questo modello ho diviso il braccio orizzontale scrivente in due parti costituite: da un tubo orizzontale *a* che può essere innalzato ed abbassato sull'asta verticale di sostegno per mezzo di un cursore semplice munito da una vite di arresto o da un cursore doppio con vite di richiamo micrometrica e da una asticella cilindrica *b* innestata nel tubo *a* nel quale essa può scorrere con dolce attrito e che porta alla sua estremità libera il portamatite fissato ad angolo retto. Lo scorrimento dell'asticella *b* nel tubo *a* permette di allungare od accorciare il braccio, mentre la rotazione dello stesso sul suo asse permette anche l'inclinazione della punta della matita. Una vite di blocco V_{a_1} in prossimità dell'estremo libero del tubo fissa ogni volta l'asticella *a* nella posizione necessaria. Il controllo della esatta posizione delle due punte sulla stessa verticale si effettua con il mio livellatore verticale o con il filo a piombo. In questo *modello B* tutti i movimenti suddetti sono praticati a mano libera.

Un ulteriore miglioramento che rende più perfetto lo strumento è stato ora da me realizzato con l'ultimo *modello C* (1950) del quale riporto anche fotografie e disegni (figg. 3, 4). Nella nuova costruzione il braccio di livello è riprodotto come nelle mie costruzioni precedenti mentre il braccio scrivente è modificato in modo che lo scorrimento longitudinale in avanti ed indietro della punta della matita che nel *modello B* era effettuata a mano libera, ora viene regolato da una vite micrometrica.

BREVE DESCRIZIONE DEL NUOVO DIAGRAFO (Figg. 3, 4, 5). — Il nuovo diagrafo, *modello C*, è costituito da un'asta verticale di sostegno a sezione quadrata millimetrata in una delle sue faccie e fissata da un piede di forma ellissoidale, simile

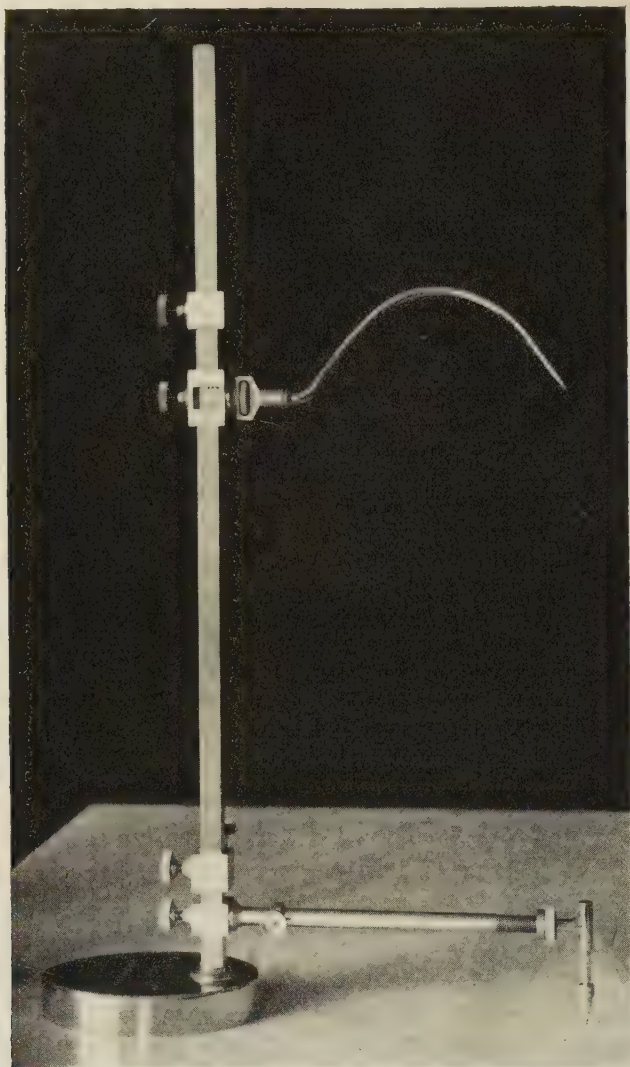


Fig. 3. - Diagrafo S. Sergi. Modello C.

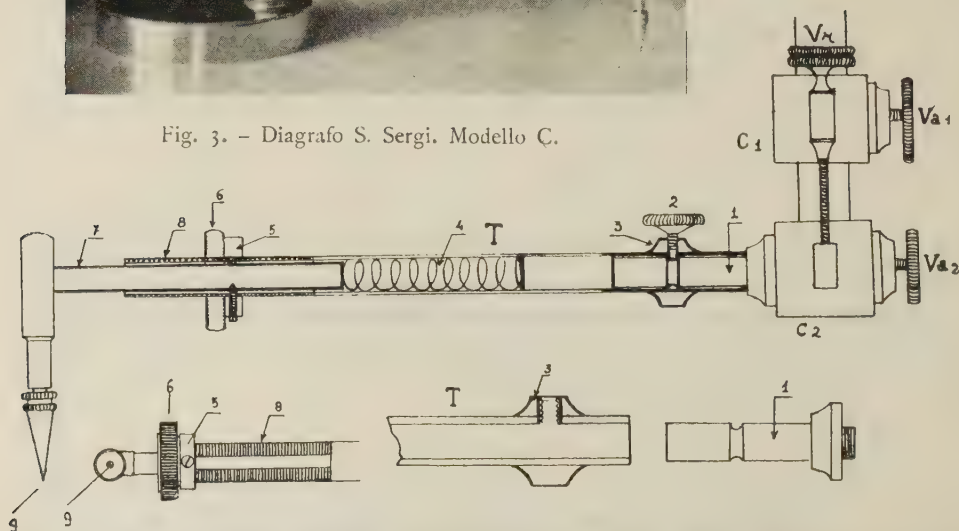


Fig. 4. - Diagrafo S. Sergi. Modello C. Particolari del braccio scrivente. (Spiegazioni nel testo).

a quello del diagrafo di Martin, ma l'asta è alquanto più alta che in questo. Sull'asta scorrono due bracci orizzontali, che possono essere fissati a qualsiasi livello. Il braccio superiore è il *braccio di livello*, cioè rilevatore del piano, il braccio inferiore è il braccio portamatita *braccio scrivente o registratore*. Ognuno dei due bracci si può inalzare od abbassare per mezzo di un sistema di due

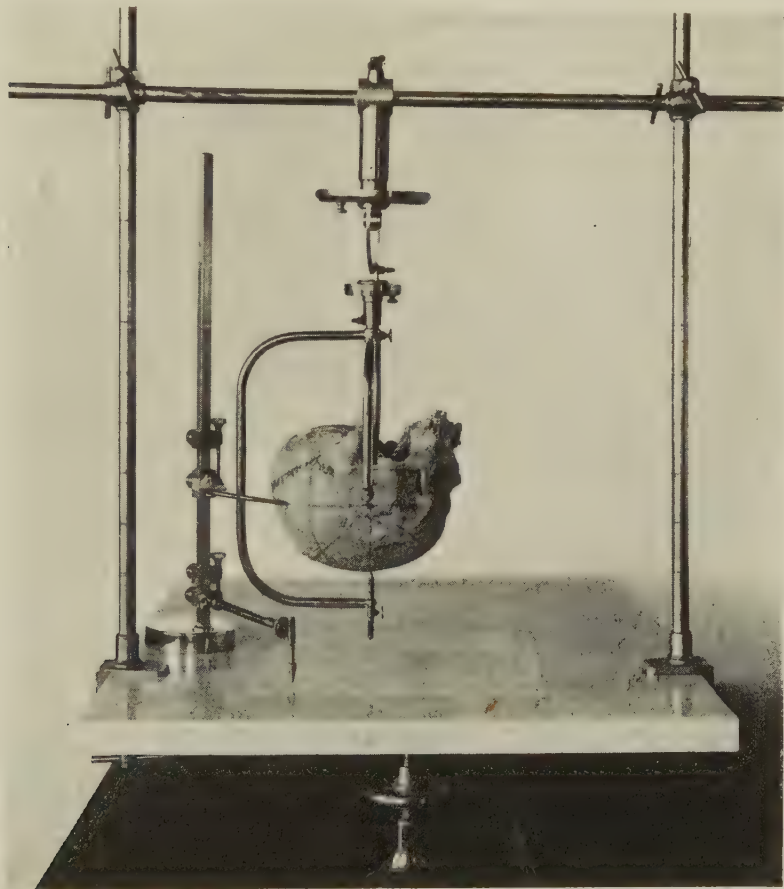


Fig. 5. — Esempio dell'uso del diagrafo modello C per rilevare un craniogramma. Il cranio è fissato sulla verticale basionbregma per mezzo dell'assidiatetero applicato al pantogoniostato. La punta del braccio superiore, o di livello, si trova all'altezza del piano orizzontale che passa per il λ . Sul cranio è segnato a matita il piano a livello del quale scorre la punta del braccio superiore: la punta della matita applicata al braccio inferiore scrivente traccia sul foglio sottostante la proiezione della curva.

cursori vincolati tra loro da una vite micrometrica di richiamo. Ciascuno dei sistemi di cursori è costituito da un cursore superiore C^1 e da un cursore inferiore C^2 con un foro passante a sezione quadra, che scorrono sull'asta di sostegno e sono muniti ciascuno di vite di arresto V_a^1 V_a^2 . Essi sono tra loro collegati lateralmente da una vite verticale di richiamo che può muovere in direzione verticale il cursore inferiore C^2 quando questo è lasciato libero mentre il cursore

superiore C^1 è fermato all'asta di sostegno dalla sua vite di arresto. Ognuno dei due bracci orizzontali è connesso con il cursore inferiore C^2 del rispettivo sistema, di cui segue il movimento effettuato per mezzo della vite di richiamo V_r .

Il braccio di livello con il suo collegamento al cursore C^2 corrispondente è costruito secondo il modello del diagrafo di Martin. Cioè esso è arcuato, può ruotare intorno al suo asse ed assumere qualsiasi posizione, nella quale può venire fermata da una vite di arresto.

Il braccio registratore collegato al rispettivo sistema di cursori nel modo descritto è formato da tre parti: 1° un asse orizzontale 1 fissato al cursore inferiore C^2 , 2° da un tubo di ottone T nel quale si innesta l'asse 1 e che costituisce il segmento più esteso del braccio, 3° da un asse orizzontale 7 portamatita innestato al tubo T dalla parte opposta a quella dell'innesto dell'asse 1. Il tubo T può ruotare intorno all'asse 1 e può essere fissato su questo nella posizione voluta per mezzo di una vite di arresto 2. Un anello fissato su asta filettata per vite di arresto ricinge il tubo allo stesso livello nel quale l'asse portatubo si restringe in un colletto che accoglie la punta fissatrice della vite di arresto. Nella figura (fig. 4) sono rilevati i particolari della costruzione. La vite 2, che nella fotografia della fig. 3 guarda di lato con la sua testa, nel disegno della fig. 4 è girata in alto per rappresentare con un solo schema le caratteristiche della costruzione. L'asse 7 del portamatita innestato al tubo T è costituito da un cilindretto fissato ad angolo retto con il portamatita. Nel cavo del tubo T si svolge una molla di acciaio ad elica cilindrica 4 che, poggiata su una traversina contenuta nel tubo, esercita dal lato opposto la sua pressione sull'estremità dell'asse mobile 7 del portamatita e per la quale quest'ultima viene sollecitata ad essere respinta fuori del tubo. All'estremità dell'asse 7 scorrevole nel tubo T è fissato un anello guida 5 con una chiavetta. Questa con la sua punta libera si affaccia nel cavo del tubo T lungo il quale può scorrere seguendo il taglio di chiavetta praticato nella parete inferiore dello stesso tubo. Per tutto il tratto 8 corrispondente al taglio di chiavetta il tubo è filettato. La punta scrivente 9 può essere spostata longitudinalmente nei due sensi mediante un rocchetto 6 godronato e filettato all'interno, disposto innanzi all'anello guida 5. La filettatura interna del rocchetto corrisponde alla filettatura esterna di tutto quel tratto 8 del tubo T nel quale è praticato il taglio di chiavetta.

Con il nuovo modello di diagrafo C si può, quando è necessario, procedere alla rapida ed immediata sistemazione della posizione della punta scrivente per riportarla sulla stessa verticale della punta del braccio di livello, condizione sulla quale è fondata la funzione dell'apparecchio. Il braccio scrivente si può in ogni istante inalzare od abbassare, inclinare, allungare ed accorciare. Lo spostamento in senso longitudinale, che è il più interessante agli effetti della correzione più di frequente richiesta, si ottiene con piccolissimi movimenti regolati da vite micrometrica.

Per l'uso dell'apparecchio si veda la fig. 5. Per la tecnica di fissazione ed orientamento del cranio e delle ossa si veda: Sergio Sergi, *Pantogoniostato craniosteoforo e assidiatetero. Le posizioni del cranio e delle ossa per la tecnica craniografica ed osteografica*, « Riv. d. Antropologia », vol. 37, 1949-50.

Scienza dell'Alimentazione. — *I fattori lipotropi di fronte a steatosi epatiche di origine differente*^(*). — I. *Azione della metionina e del lipocaic sulla steatosi epatica da epatectomia subtotale*. Nota^(**) di UGO LOMBROSO e CESARE ARDY, presentata dal Socio U. LOMBROSO.

In una serie di ricerche che si sono iniziate nel nostro Istituto a proposito dell'azione dei cosiddetti fattori lipotropi di fronte a steatosi epatiche di origine differente, è stata presa in considerazione anche un tipo di steatosi di breve durata, ma ad evoluzione costante e perfettamente ripetibile nelle varie esperienze: si tratta della deposizione di grassi che si verifica nel fegato dopo la estirpazione subtotale dell'organo, e che presenta il suo acme alla 2^a giornata, quando il contenuto lipidico di quel parenchima diventa circa triplo del normale.

È interessante ricordare a questo proposito che, dalle ricerche svolte sul metabolismo gassoso degli animali epatectomizzati, mentre non si avverte un aumento sensibile dei processi ossidativi, si resta invece colpiti dall'osservazione di un elevatissimo quoziente respiratorio; precisamente, nel periodo in cui la deposizione di lipidi nel fegato raggiunge la sua massima intensità (1^o-2^o giorno dall'intervento) il Q. R. dell'animale si innalza al punto che, nella maggior parte delle nostre esperienze, si porta al di sopra dell'unità. Sul significato di questo dato è stato discusso in precedenti Note⁽¹⁾.

Alcuni ricercatori hanno indagato prima di noi, se la steatosi da epatectomia poteva essere influenzata da un fattore lipotropo molto usato: la colina, che ha dato evidenti effetti positivi su altri tipi di steatosi (da pancreasectomia, da diete iperlipidiche, ecc.). Già nel 1936 Mc. Kay e Carne⁽²⁾ comunicarono che la colina non riesce a modificare per nulla la steatosi da epatectomia; affermazione che venne perfettamente confermata, 11 anni dopo, da Allegri, Ferrari e Vogogna⁽³⁾; questi ultimi AA., per quanto riportino cifre di tassi lipidici epatici che sono molto inferiori a quelle riferite da tutta la letteratura, e da noi, confermano però il dato di fatto della inefficacia della colina sulla steatosi in questione.

In una comunicazione preventiva⁽⁴⁾ abbiamo esposto il risultato ottenuto utilizzando, in questo tipo di steatosi, la metionina: riferiamo ora, in dettaglio, i dati relativi a queste esperienze.

Furono usati 20 ratti albin, maschi, adulti, di peso variante fra gr. 160 e 210, tenuti ad alimentazione mista ordinaria e provenienti dall'allevamento del Centro Apistico di Modena. Citiamo la provenienza perchè i ratti dell'allevamento suddetto, da noi utilizzati, hanno dimostrato tutti un tasso lipidico epatico che

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1950.

(1) U. LOMBROSO, « Athena », fasc. 5^o, 1950, e C. ARDY e S. CAPONNETTO, « Boll. S. I. B. S. », fasc. 2 (1950).

(2) E. M. MC. KAY e H. O. CARNE, « Proc. Soc. Exp. Med. Biol. », 38, 803 (1938).

(3) A. ALLEGRI, V. FERRARI, L. VOGOGNA, « Boll. Soc. Med. Chir. Pavia », fasc. 5-6 (1949).

(4) U. LOMBROSO e C. ARDY, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », in corso di stampa.

risulta un poco superiore a quello che generalmente si riscontra in questi animali, ed a quello da noi riferito appunto come normale in altri lavori ⁽⁵⁾.

I ratti furono operati di parziale epatectomia con la tecnica di Crandall e Drabkin ⁽⁶⁾ con la quale si asporta circa il 70 % dell'organo; sui lobi così asportati furono eseguiti dosaggi degli acidi grassi col Kumagawa-Suto. Dal giorno dell'operazione furono somministrati giornalmente 100 mg. di metionina per bocca; 10 ratti vennero uccisi in 2^a e 10 in 4^a giornata; sul fegato prelevato alla morte vennero nuovamente dosati gli acidi grassi. Riferiamo nella tabella che segue i dati ottenuti.

TABELLA I.
Ratti trattati con metionina.

| N. del ratto | Ac. grassi % nel fegato all'interv. | Ucciso dopo gg. | Ac. grassi % all'uccisione | Peso del ratto alla morte gm. | Peso del fegato alla morte gm. |
|--------------|-------------------------------------|-----------------|----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1 | 4.23 | 2 | 5.73 | 202 | 4.93 |
| 2 | 4.32 | 2 | 5.21 | 150 | 5.40 |
| 3 | 4.35 | 2 | 5.46 | 166 | 6.30 |
| 4 | 4.21 | 2 | 4.10 | 175 | 3.97 |
| 5 | 4.17 | 2 | 4.10 | 190 | 3.77 |
| 6 | 4.23 | 2 | 5.85 | 176 | 4.10 |
| 7 | 4.41 | 2 | 5.53 | 206 | 4.55 |
| 8 | 4.14 | 2 | 5.42 | 192 | 3.86 |
| 9 | 4.49 | 2 | 5.66 | 210 | 5.10 |
| 10 | 4.22 | 2 | 4.55 | 180 | 3.88 |
| MEDIA | — | — | 4.96 | 184 | 4.58 |
| 11 | 4.23 | 4 | 4.18 | 180 | 4.01 |
| 12 | 4.24 | 4 | 4.22 | 190 | 3.86 |
| 13 | 4.12 | 4 | 4.01 | 223 | 5.60 |
| 14 | 4.05 | 4 | 4.59 | 141 | 4.65 |
| 15 | 4.21 | 4 | 4.00 | 205 | 3.92 |
| 16 | 4.28 | 4 | 2.93 | 151 | 6.25 |
| 17 | 4.03 | 4 | 4.81 | 183 | 7.40 |
| 18 | 4.11 | 4 | 4.62 | 154 | 3.05 |
| 19 | 3.99 | 4 | 4.43 | 204 | 5.01 |
| 20 | 4.37 | 4 | 4.68 | 196 | 4.70 |
| MEDIA | 4.22 | — | 4.24 | 182 | 4.84 |

(5) C. ARDY, S. PONTREMOLI, L. ARRIGO, «Pathologica», fasc. 3 (1950).

(6) M. W. CRANDALL e D. L. DRABKIN, «J. Biol. Chem.», 166, 653 (1946).

La tabella ci documenta che la metionina esplica una netta azione lipotropa sulla steatosi da epatectomia; la sua azione è così efficace da ridurre ad un 17% l'aumento dei lipidi epatici che si osserva in modo così cospicuo allorchè la metionina non interviene, quando cioè il fegato triplica il proprio tasso lipidico percentuale. La metionina dunque, blocca l'insorgenza di questa steatosi a differenza di quanto era stato visto dagli Autori che avevano sperimentato con colina.

Questo dato viene nettamente in appoggio al dubbio formulato da Polonowski nel 1948 ⁽⁷⁾, che il meccanismo dell'azione lipotropa della metionina non sia quello di fornire gruppi metilici per la genesi di colina.

TABELLA II.

Ricambio respiratorio di ratti normali e ratti trattati con metionina.

| N. del ratto | Trattamento | CO ₂ per kg. h. (gm.) | O ₂ per kg. h. (gm.) | Q. R. |
|--------------|-------------|----------------------------------|---------------------------------|-------|
| 1 | normale | 1.98 | 2.00 | 0.72 |
| 2 | » | 2.73 | 2.36 | 0.84 |
| 3 | » | 2.62 | 2.22 | 0.86 |
| 4 | » | 3.48 | 3.16 | 0.80 |
| 5 | » | 2.60 | 2.46 | 0.77 |
| 6 | » | 3.22 | 3.00 | 0.78 |
| 7 | » | 2.20 | 1.86 | 0.86 |
| 8 | » | 2.50 | 2.30 | 0.79 |
| 9 | » | 1.88 | 1.80 | 0.76 |
| 10 | » | 2.47 | 2.20 | 0.81 |
| 11 | » | 2.04 | 1.96 | 0.80 |
| 12 | » | 2.38 | 2.40 | 0.72 |
| 13 | » | 2.93 | 2.80 | 0.76 |
| MEDIA | | 2.54 | 2.34 | 0.79 |
| 14 | metionina | 3.32 | 3.10 | 0.78 |
| 15 | » | 3.19 | 2.86 | 0.81 |
| 16 | » | 3.19 | 2.70 | 0.86 |
| 17 | » | 2.45 | 3.30 | 0.76 |
| 18 | » | 3.88 | 3.12 | 0.91 |
| 19 | » | 3.45 | 3.06 | 0.82 |
| 20 | » | 2.25 | 2.10 | 0.78 |
| 21 | » | 3.74 | 3.16 | 0.86 |
| 22 | » | 2.20 | 2.01 | 0.80 |
| 23 | » | 1.99 | 1.86 | 0.78 |
| 24 | » | 3.43 | 3.16 | 0.79 |
| MEDIA | | 3.11 | 2.80 | 0.81 |

(7) M. POLONOWSKI, «Exp. Ann. de Bioch. Méd.», 8, 109 (1948).

Per quanto riguarda l'essenza del meccanismo dell'azione antisteatogena della metionina, noi abbiamo seguito l'intensità del ricambio respiratorio ed il quoziente respiratorio di alcuni degli animali trattati nelle esperienze sopra descritte; e ciò allo scopo di comparare i dati ottenuti con quelli relativi ai ratti semplicemente epatectomizzati e non trattati con metionina.

Riportiamo nelle tabelle II, III, IV e V i dati sul ricambio respiratorio di ratti normali, ratti normali trattati con metionina, ratti epatectomizzati e ratti epatectomizzati trattati con metionina.

TABELLA III.

| N. del ratto | Tratta- mento | 1° giorno | | | 2° giorno | | | 3° giorno | | | 4° giorno | | |
|-----------------|-------------------------------|---------------------------|--------------------------|-------|---------------------------|--------------------------|-------|---------------------------|--------------------------|-------|---------------------------|--------------------------|-------|
| | | CO ₂ kg. h. | O ₂ kg. h. | Q. R. | CO ₂ kg. h. | O ₂ kg. h. | Q. R. | CO ₂ kg. h. | O ₂ kg. h. | Q. R. | CO ₂ kg. h. | O ₂ kg. h. | Q. R. |
| 1 | <i>non trattati</i> | 2.44 | 1.71 | 1.03 | 2.91 | 1.87 | 1.13 | 1.87 | 1.70 | 0.80 | 2.10 | 1.85 | 0.82 |
| 2 | | 3.38 | 2.20 | 1.12 | 3.11 | 2.04 | 1.11 | 3.48 | 2.13 | 1.15 | 3.44 | 2.40 | 1.04 |
| 3 | | 2.71 | 1.83 | 1.08 | 2.54 | 1.57 | 1.17 | 3.23 | 2.21 | 0.95 | 2.46 | 1.90 | 0.94 |
| 4 | | 3.68 | 2.38 | 1.12 | 3.70 | 2.53 | 1.06 | 3.11 | 2.57 | 0.88 | 2.85 | 2.27 | 0.91 |
| 5 | | 3.10 | 2.14 | 1.05 | 2.87 | 2.00 | 1.04 | 2.42 | 2.11 | 0.83 | 2.04 | 1.91 | 0.78 |
| 6 | | 2.70 | 1.81 | 1.09 | 2.65 | 1.98 | 0.97 | 2.44 | 2.18 | 0.81 | — | — | — |
| 7 | | 3.54 | 2.43 | 1.06 | 3.54 | 2.35 | 1.09 | 2.71 | 2.50 | 0.79 | 2.60 | 2.20 | 0.86 |
| 8 | | 3.46 | 2.27 | 1.11 | 4.37 | 2.54 | 1.25 | 2.79 | 2.28 | 0.89 | 2.67 | 2.31 | 0.84 |
| 9 | | 2.79 | 1.91 | 1.06 | 3.11 | 2.05 | 1.10 | 2.24 | 1.85 | 0.88 | 2.54 | 2.07 | 0.89 |
| MEDIA | | 3.08 | 2.07 | 1.08 | 3.20 | 2.10 | 1.09 | 2.68 | 2.16 | 0.88 | 2.59 | 2.11 | 0.88 |
| 1 | <i>trattati con metionina</i> | 3.50 | 2.51 | 1.00 | 3.21 | 2.30 | 1.02 | 2.84 | 2.40 | 0.86 | 2.74 | 2.35 | 0.85 |
| 2 | | 4.80 | 3.30 | 1.06 | 4.64 | 3.16 | 1.07 | 3.58 | 3.21 | 0.81 | 3.52 | 3.52 | 0.82 |
| 3 | | 4.44 | 2.91 | 1.11 | 4.16 | 2.99 | 1.01 | 3.40 | 2.87 | 0.86 | 3.38 | 2.92 | 0.84 |
| 4 | | 4.06 | 2.76 | 1.07 | 3.62 | 2.61 | 1.01 | 2.93 | 2.43 | 0.88 | 2.95 | 2.65 | 0.81 |
| 5 | | 4.27 | 2.87 | 1.08 | 3.98 | 3.01 | 0.96 | 3.88 | 3.10 | 0.91 | 3.15 | 2.86 | 0.80 |
| 6 | | 4.32 | 3.18 | 1.10 | 4.30 | 3.03 | 1.03 | 3.76 | 3.10 | 0.88 | 3.53 | 3.01 | 0.85 |
| MEDIA | | 4.31 | 2.92 | 1.07 | 3.98 | 2.85 | 1.01 | 3.39 | 2.85 | 0.86 | 3.21 | 2.81 | 0.82 |

Si nota nella tabella III che l'intensità dei processi ossidativi negli animali operati cui è stata somministrata metionina, è un poco superiore, a quella degli animali operati e non trattati. Però questo aminoacido conduce di per sè, nelle dosi usate ad un aumento delle ossidazioni, pari a circa il 20% anche nei ratti normali (non operati). La tabella III ci dimostra pure che la metionina non sposta quel Q. R. uguale o superiore all'unità, che nel nostro laboratorio abbiamo visto accompagnare costantemente il periodo di massima steatosi da epatectomia (1^a e 2^a giornata).

Altre ricerche sono state da noi eseguite, adoperando, in luogo della metionina, lipocaic preparato secondo Entenmann. È noto che il lipocaic è stato usato in modo particolare nella steatosi epatica che compare negli animali che sono tenuti a lungo in vita, col trattamento insulinico, dopo pancreasectomia; ed è stato altresì largamente usato nelle steatosi determinate da diete iperlipidiche ed ipoproteiche. Non ci risulta che sia stato sperimentato in questa particolare steatosi la quale rappresenta un tipo a sè stante, determinata con ogni probabilità da una profonda mobilitazione dei grassi di deposito, i quali però non subiscono esaltazioni combusive (anzi l'alto Q. R. ci dimostra che l'ossidazione dei grassi è ridotta); steatosi inoltre, che non è esclusiva del fegato, ma si trova più o meno generalizzata in altri parenchimi⁽⁸⁾, seppure in misura più modesta.

Le esperienze sono state condotte con le stesse modalità e dosi del lipocaic, descritte per quelle con metionina; riportiamo nelle tabelle e grafici seguenti i risultati ottenuti:

TABELLA IV.
Ratti trattati con lipocaic.

| N. del ratto | Ac. grassi % nel fegato all'interv. | Ucciso dopo gg. | Ac. grassi % all'uccisione | Peso del ratto alla morte gm. | Peso del fegato alla morte gm. |
|--------------|-------------------------------------|-----------------|----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1 | 4.20 | 2* | 5.01 | 192 | 5.72 |
| 2 | 3.92 | 2 | 4.18 | 203 | 5.80 |
| 3 | 4.27 | 2 | 4.93 | 206 | 5.68 |
| 4 | 4.36 | 2 | 4.88 | 194 | 5.52 |
| 5 | 4.18 | 2 | 5.06 | 180 | 5.92 |
| 6 | 3.96 | 2 | 5.01 | 178 | 5.88 |
| 7 | 4.29 | 2 | 5.23 | 206 | 6.07 |
| 8 | 4.45 | 2 | 4.81 | 196 | 6.05 |
| MEDIA | — | — | 4.88 | 194 | 5.83 |
| 9 | 4.26 | 4 | 4.30 | 206 | 6.12 |
| 10 | 4.48 | 4 | 4.68 | 201 | 6.18 |
| 11 | 4.17 | 4 | 4.02 | 178 | 5.90 |
| 12 | 4.13 | 4 | 4.26 | 199 | 5.89 |
| 13 | 4.19 | 4 | 4.19 | 207 | 6.23 |
| 14 | 4.33 | 4 | 4.09 | 201 | 6.18 |
| 15 | 4.30 | 4 | 4.29 | 205 | 6.32 |
| 16 | 4.51 | 4 | 3.98 | 206 | 6.38 |
| MEDIA | 4.25 | — | 4.22 | 200 | 6.15 |

(8) L. ARRIGO e S. PONTREMOLI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», in corso di stampa.

TABELLA V.

Ricambio respiratorio di ratti epatectomizzati, trattati con lipocaic.

| N. del ratto | 1° giorno | | | 2° giorno | | | 3° giorno | | | 4° giorno | | |
|-----------------|---------------------------|--------------------------|-------|---------------------------|--------------------------|-------|---------------------------|--------------------------|-------|---------------------------|--------------------------|-------|
| | CO ₂ kg. h. | O ₂ kg. h. | Q. R. | CO ₂ kg. h. | O ₂ kg. h. | Q. R. | CO ₂ kg. h. | O ₂ kg. h. | Q. R. | CO ₂ kg. h. | O ₂ kg. h. | Q. R. |
| 1 | 2.34 | 2.10 | 0.81 | 2.53 | 2.14 | 0.86 | 3.15 | 2.87 | 0.80 | 2.20 | 1.98 | 0.81 |
| 2 | 2.35 | 2.06 | 0.83 | 2.21 | 2.01 | 0.80 | 2.61 | 2.34 | 0.81 | 2.25 | 2.10 | 0.78 |
| 3 | 2.67 | 2.43 | 0.80 | 2.57 | 2.40 | 0.79 | 2.21 | 2.12 | 0.76 | 2.98 | 2.66 | 0.81 |
| 4 | 2.68 | 2.26 | 0.86 | 2.64 | 2.31 | 0.83 | 2.74 | 2.40 | 0.83 | 2.50 | 2.30 | 0.79 |
| 5 | 2.15 | 1.98 | 0.79 | 2.26 | 2.01 | 0.82 | 2.21 | 2.01 | 0.80 | 2.27 | 1.95 | 0.85 |
| 6 | 2.64 | 2.18 | 0.88 | 2.35 | 2.06 | 0.83 | 2.42 | 2.10 | 0.81 | 2.80 | 2.40 | 0.85 |
| MEDIA | 2.47 | 2.16 | 0.82 | 2.42 | 2.15 | 0.83 | 2.55 | 2.30 | 0.80 | 2.38 | 2.23 | 0.81 |

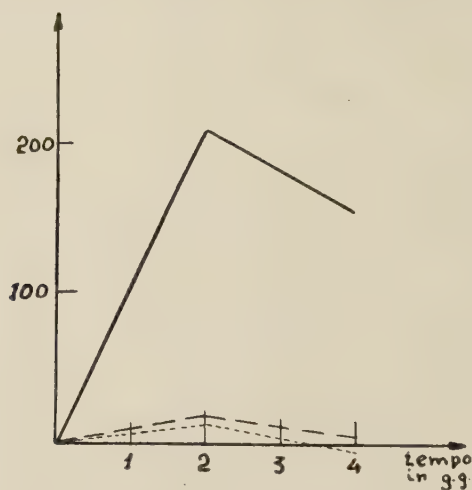


Fig. 1. - Sull'ordinata l'aumento percentuale degli acidi grassi nel fegato; sull'ascissa il tempo, in giorni, dall'epatectomia.

— ratti semplicemente epatectomizzati.
 - - - ratti trattati con metionina.
 ratti trattati con lipocaic.

Da queste tabelle e grafici, emerge dunque che il lipocaic esplica sulla steatosi epatica da epatectomia, un'azione antisteatogena elevatissima, della stessa intensità di quella svolta dalla metionina; con questa differenza però: che, mentre la metionina esalta i processi combustivi, senza modificare il Q. R., fermo al di sopra dell'unità (come negli animali semplicemente epatectomizzati), il lipocaic non modifica le ossidazioni e porta invece ad una notevole diminuzione del Q. R.;

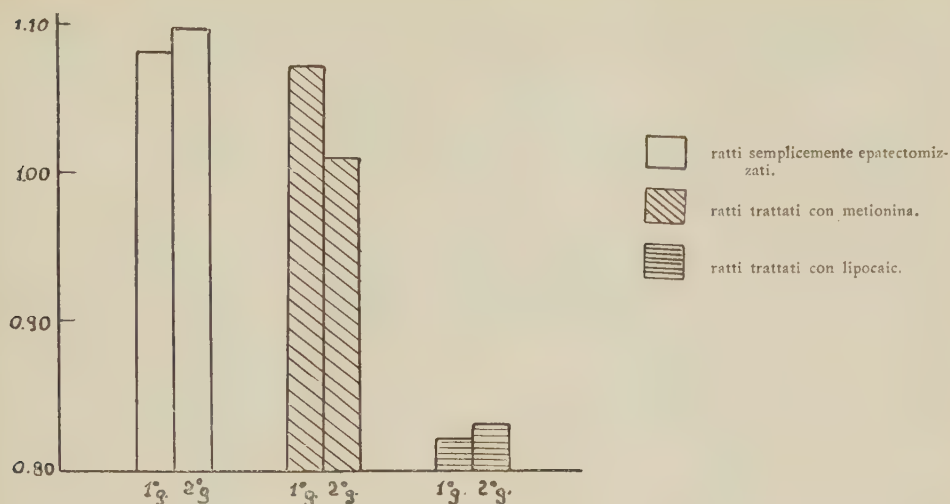


Fig. 2. — Sull'ordinata i valori del quoziente respiratorio in 1ª e 2ª giornata.

si dovrebbe perciò logicamente ammettere che il meccanismo d'azione del lipocaic consista nel far partecipare alle combustioni anche i grassi, e forse in misura maggiore che non nelle normali condizioni, mentre per la metionina, che dal punto di vista antisteatogeno manifesta un'azione lipotropa uguale a quella del lipocaic, non si può affermare uno stesso meccanismo di azione, dato che, come abbiamo sopra detto, questa si manifesta associata ad un Q. R. elevato, talvolta notevolmente superiore all'unità.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla distribuzione delle temperature di un anello in regime permanente e posto in condotti percorsi da correnti gaseose a temperature diverse* (*). Nota (**) di CORRADO CASCI, presentata dal Socio M. PANETTI.

Un anello posto in due correnti gaseose — la cui temperatura è nota all'entrata —, ed essendo le correnti fra loro termicamente isolate, la temperatura di esse varia lungo ciascuna semicirconferenza, definita dal piano diametrale separatore, dipendentemente dalla conduttività del materiale e dalla trasmissione di calore dalla corrente gaseosa all'anello.

Le limitazioni imposte, per semplicità di risoluzione, sono le stesse fatte in altra pubblicazione dove però la temperatura del gas si supponeva costante lungo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Macchine del Politecnico. Centro di Studi per la Dinamica dei Fluidi del C. N. R. Torino.

(**) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1950.

la semicirconferenza ⁽¹⁾ e cioè, trattandosi di un anello avente una dimensione radiale molto piccola rispetto al raggio di curvatura dell'anello stesso, ammettiamo che le superficie della sezione siano isoterme. Supponiamo inoltre che i coefficienti di conduttività λ_1 e λ_2 relativi all'anello metallico e alla corrente gasosa, e il coefficiente di trasmissione di calore K siano costanti, indipendenti quindi dalla temperatura e dalla velocità della corrente gasosa.

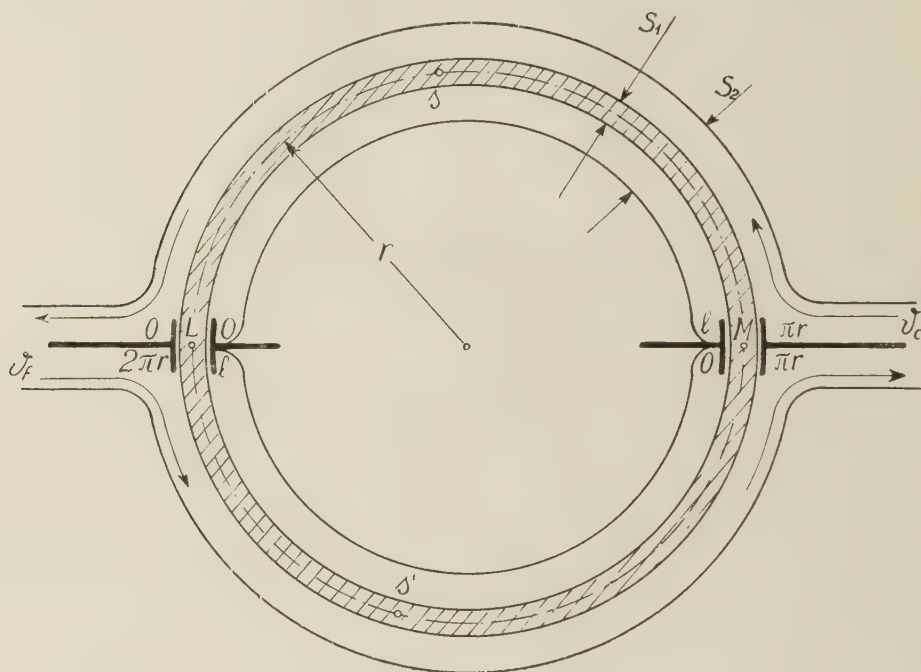


Fig. 1.

Nell'intervallo $0-l$ si hanno due relazioni: una relativa all'anello che assorbe calore e una relativa al fluido che cede calore; le due relazioni differenziali che caratterizzano il fenomeno in regime permanente sono:

$$(1) \quad \frac{d}{ds} \left(\lambda_1 \cdot S_1 \cdot \frac{d\vartheta}{ds} \right) ds - K \cdot dS' (\vartheta - \vartheta^*) = 0$$

$$(2) \quad \frac{d}{ds} \left(\lambda_2 \cdot S_2 \cdot \frac{d\vartheta^*}{ds} \right) ds + K \cdot dS' (\vartheta - \vartheta^*) = 0$$

avendo indicato, come si vede dalla fig. 1, con S_1 l'area della sezione trasversale dell'anello S attraverso la quale passa il flusso di calore dovuto alla conduzione, con S_2 l'area dell'analogha sezione trasversale relativa però alla corrente gasosa, con dS' la superficie cilindrica compresa fra due sezioni che distano fra loro di ds (comune questa sia all'anello che alla corrente gasosa), con ϑ la temperatura in una generica sezione dell'anello e con ϑ^* la temperatura corrispondente della corrente gasosa nella stessa sezione.

(1) C. CASCI, *Sulla distribuzione delle temperature in regime permanente di un anello in ambienti a temperatura diversa*. «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», Classe Scienze fisiche, matematiche e naturali, ser. VIII, vol. VII, fasc. 5.

Nell'intervallo $0 - l'$ si hanno due relazioni analoghe alle precedenti e sono:

$$(3) \quad \frac{d}{ds'} \left(\lambda_1 S_1 \frac{d\vartheta'}{ds'} \right) ds' - K \cdot dS' (\vartheta' - \vartheta'^*) = 0$$

$$(4) \quad \frac{d}{ds'} \left(\lambda_2 S_2 \frac{d\vartheta'^*}{ds'} \right) ds' + K \cdot dS' (\vartheta' - \vartheta'^*) = 0.$$

Le relazioni (1) e (2) sono formalmente eguali alle (3) e (4) ma in realtà nelle (1) e (2) il termine $(\vartheta - \vartheta^*)$ è negativo (perchè $|\vartheta^*| > |\vartheta|$) mentre nelle (3) e (4) il termine $(\vartheta' - \vartheta'^*)$ è positivo (perchè $|\vartheta'^*| < |\vartheta'|$). Basta quindi risolvere il problema nell'intervallo $0 - l$ perchè automaticamente esso sia risolto anche nell'intervallo $0 - l'$.

Ricordando che $dS' = p \cdot ds$ (essendo p il perimetro della sezione trasversale), e dividendo la (1) per $\lambda_1 S_1$ e la (2) per $\lambda_2 S_2$ si ha:

$$(5) \quad \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} - \frac{Kp}{\lambda_1 S_1} (\vartheta - \vartheta^*) = 0 \quad (\text{relativa all'anello})$$

$$(6) \quad \frac{d^2 \vartheta^*}{ds^2} + \frac{Kp}{\lambda_2 S_2} (\vartheta - \vartheta^*) = 0 \quad (\text{relativa al fluido}).$$

Dalla (5) si ricava:

$$(7) \quad \vartheta^* = \vartheta - \frac{\lambda_1 S}{Kp} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2}$$

e sostituendo l'espressione di ϑ^* data dalla (7) nella (6) abbiamo:

$$(8) \quad \frac{d^2}{ds^2} \left(\vartheta - \frac{\lambda_1 S_1}{Kp} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \right) + \frac{Kp}{\lambda_2 S_2} \left(\vartheta - \vartheta + \frac{\lambda_1 S_1}{Kp} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \right) = 0$$

ed anche svolgendo, semplificando e raccogliendo:

$$(9) \quad \frac{d^4 \vartheta}{ds^4} - Kp \left(\frac{1}{\lambda_1 S_1} + \frac{1}{\lambda_2 S_2} \right) \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} = 0.$$

Essendo un valore essenzialmente positivo pongo: $m^2 = Kp(1/\lambda_1 S_1 + 1/\lambda_2 S_2)$. Pongo inoltre: $\chi = d^2 \vartheta / ds^2$ e quindi la (9) assume la seguente forma:

$$\chi'' - m^2 \chi = 0.$$

Questa equazione differenziale del secondo ordine è integrata dall'espressione

$$(10) \quad \chi = Ae^{ms} + Be^{-ms}.$$

Dalla posizione fatta si deduce che la temperatura dell'anello è data dall'espressione:

$$(11) \quad \vartheta = Ae^{ms} + Be^{-ms} + Cs + D$$

essendo A, B, C e D delle costanti arbitrarie di integrazione.

La temperatura della corrente gasosa, ricordando la relazione (7) e tenendo presente la (11), vale:

$$(12) \quad \vartheta^* = -HAe^{ms} - HBe^{-ms} + Cs + D$$

avendo posto $H = \frac{\lambda_1 S_1}{\lambda_2 S_2}$.

Le espressioni di ϑ e di ϑ^* date dalla (11) e dalla (12) valgono nell'intervallo $0 - l$, mentre nell'intervallo $0 - l'$ valgono relazioni analoghe:

$$(13) \quad \vartheta' = A' e^{ms'} + B' e^{-ms'} + C' s' + D'$$

$$(14) \quad \vartheta'^* = -HA' e^{ms'} - HB' e^{-ms'} + C' s' + D'.$$

Si devono adesso determinare le otto costanti di integrazione che compaiono nelle (11), (12), (13) e (14).

Prendendo in considerazione le relazioni (11) e (13) - relative all'anello metallico - possiamo scrivere che le temperature nei punti di congiunzione L e M sono eguali fra di loro; sono pure eguali fra di loro, negli stessi punti L e M, i flussi di calore ossia $\vartheta = \vartheta'$ e $d\vartheta/ds = d\vartheta'/ds'$.

Nei punti L e M, per l'eguaglianza delle temperature valgono contemporaneamente le relazioni (11) e (13): la prima per $s = 0$ e la seconda per $s' = l$ in L, e la prima per $s = l$ e la seconda per $s' = 0$ in M, e quindi si ha:

$$(15) \quad A + B + D = A' e^{ml} + B' e^{-ml} + C' l + D'$$

$$(16) \quad Ae^{ml} + Be^{-ml} + Cl + D = A' + B' + D'.$$

Nei punti L e M, per l'eguaglianza dei flussi di calore, essendo la tangente comune al diagramma delle temperature e non presentando queste soluzioni di continuità, valgono contemporaneamente le funzioni derivate dalle (11) e (13): la prima per $s = 0$ e la seconda per $s' = l$ in L, e la prima per $s = l$ e la seconda per $s' = 0$ in M, e quindi:

$$(17) \quad mA - mB + C = mA' e^{ml} - mB' e^{-ml} + C'$$

$$(18) \quad mA e^{ml} + mB e^{-ml} + C = mA' - mB' + C'.$$

Sono note poi le temperature delle correnti gaseose all'entrata. Supponendo che esista una antisimmetria nel fenomeno - antisimmetria che poi dimostreremo - posso porre che la temperatura della corrente gasosa all'entrata dei due condotti sia rispettivamente ϑ_0 per la corrente gasosa calda e $-\vartheta_0$ per la corrente gasosa fredda. Quindi se chiamiamo con ϑ_c e ϑ_f le temperature, all'entrata, delle correnti gaseose calda e fredda, rispettivamente, abbiamo che:

$$\vartheta_0 = \vartheta_c - \frac{\vartheta_c + \vartheta_f}{2} \quad ; \quad -\vartheta_0 = \vartheta_f - \frac{\vartheta_c + \vartheta_f}{2} \quad (2).$$

Scrivendo quindi la (12) per $s = l$ e la (14) per $s' = l$ (vedi fig. 1) si ha:

$$(19) \quad -HA e^{ml} - HB e^{-ml} + Cl + D = \vartheta_0$$

$$(20) \quad -HA' e^{ml} - HB' e^{-ml} + Cl + D = -\vartheta_0.$$

(2) È naturalmente intuitivo che per ottenerne la temperatura effettiva - e ciò vale anche per il seguito quando daremo le espressioni esplicite della temperatura sia dell'anello metallico che della corrente gasosa - occorre assegnare la temperatura media $(\vartheta_c + \vartheta_f)/2$ intorno alla quale si ha la variazione.

Chiamando $\Delta\vartheta_0$ la variazione della temperatura della corrente gasosa fra entrata e uscita risulta nota anche la temperatura della corrente gasosa all'uscita e scrivendo la (12) per $s = 0$ e la (14) per $s' = 0$ si ha:

$$(21) \quad -HA - HB + D = \vartheta_0 - \Delta\vartheta_0$$

$$(22) \quad -HA' - HB' + D' = -(\vartheta_0 - \Delta\vartheta_0).$$

Dalle otto relazioni sopra scritte si ricavano le seguenti relazioni:

$$(23) \quad (A + A')(1 - e^{ml}) + (B + B')(1 - e^{-ml}) - (C + C')l = 0$$

$$(24) \quad m(A + A')(1 - e^{ml}) + m(B + B')(1 - e^{-ml}) = 0$$

$$(25) \quad -H(A + A')e^{ml} - H(B + B')e^{-ml} + (C + C')l + (D + D') = 0$$

$$(26) \quad -H(A + A') - H(B + B') + (D + D') = 0$$

che, essendo un sistema omogeneo nelle quattro incognite $(A + A')$, $(B + B')$, $(C + C')$ e $(D + D')$ nel quale il determinante dei coefficienti è diverso da zero, è soddisfatto solo se le incognite sono eguali a zero, ossia:

$$A = -A' \quad ; \quad B = -B' \quad ; \quad C = -C' \quad ; \quad D = -D'.$$

È dimostrata così la antisimmetria del fenomeno, e basta determinare le costanti di integrazione solo in uno dei due intervalli.

Per determinare le costanti di integrazione A , B , C e D teniamo presenti le condizioni ai limiti.

La temperatura della corrente gasosa in $s = l$ (all'ingresso) è nota, e vale

$$(27) \quad -HA e^{ml} - HB e^{-ml} + Cl + D = \vartheta_0.$$

La temperatura della corrente gasosa in $s = 0$ (all'uscita) è nota e vale

$$(28) \quad -HA - HB + D = \vartheta_0 - \Delta\vartheta_0.$$

La temperatura dell'anello assume valori eguali e contrari in $s = 0$ e in $s = l$ (per le condizioni limiti dell'antisimmetria):

$$(29) \quad A + B + D = -A e^{ml} - B e^{-ml} - Cl - D.$$

Il flusso di temperatura dell'anello assume valori uguali e contrari in $s = 0$ e in $s = l$

$$(30) \quad mA - mB + C = -mA e^{ml} + mB e^{-ml} - C.$$

La variazione di temperatura $\Delta\vartheta_0$ della corrente gasosa, fra entrata e uscita della corrente, si deduce eguagliando la variazione di calore, fra entrata e uscita, alla quantità di calore trasmessa dalla corrente gasosa all'anello metallico e quindi:

$$(31) \quad S_2 \cdot v \cdot c \gamma \cdot \Delta\vartheta_0 = \int_0^l K \frac{dS'}{ds} (\vartheta^* - \vartheta) ds$$

ed anche

$$(32) \quad S v c \gamma \Delta\vartheta_0 = \frac{H + 1}{m} K p [A(1 - e^{ml}) + B(1 - e^{-ml})]$$

essendo v la velocità, c il calore specifico e γ il peso specifico del gas.

Dalle relazioni (27), (28), (29) e (30) si deducono le espressioni analitiche dei coefficienti A, B, C e D e sostituendo i valori trovati di A e B nella (32) si ottiene che, essendo il fenomeno a regime, la variazione di temperatura $\Delta\vartheta_0$ è nulla e quindi i coefficienti assumono, ponendo

$$2H - ml = N \quad ; \quad 2H + ml = P,$$

le seguenti espressioni:

$$(33) \quad A = \frac{\vartheta_0}{H+1} \cdot \frac{P - Ne^{-ml}}{N(e^{-ml} + 1) - P(e^{ml} + 1)}$$

$$(34) \quad B = -\frac{\vartheta_0}{H+1} \cdot \frac{N - P_1 ml}{N(e^{-ml} + 1) - P(e^{ml} + 1)}$$

$$(35) \quad C = 0$$

$$(36) \quad D = \frac{\vartheta_0}{H+1}.$$

Per conseguenza dell'antisimmetria sono noti anche i coefficienti delle relazioni (13) e (14). Se d'altra parte facciamo un cambiamento di coordinate, ponendo $s' = s - l$, abbiamo che le costanti sono legate fra loro dalle relazioni:

$$A' = -Ae^{-ml} \quad ; \quad B' = -Be^{ml} \quad ; \quad D' = -D.$$

La temperatura dell'anello metallico vale quindi:

$$(37) \quad \vartheta = \frac{\vartheta_c + \vartheta_f}{2} + \frac{\vartheta_c - \vartheta_f}{2(H+1)} \left(1 + \frac{(P - Ne^{-ml})e^{ms} - (N - Pe^{ml})e^{-ms}}{N(e^{-ml} + 1) - P(e^{ml} + 1)} \right) \quad \text{per } 0 \leq s \leq$$

$$(38) \quad \vartheta = \frac{\vartheta_c + \vartheta_f}{2} - \frac{\vartheta_c - \vartheta_f}{2(H+1)} \left(1 + \frac{e^{-ml}(P - Ne^{-ml})e^{ms} - e^{ml}(N - Pe^{ml})e^{-ms}}{N(e^{-ml} + 1) - P(e^{ml} + 1)} \right) \quad \text{per } l \leq s \leq 2l$$

La temperatura della corrente gasosa vale:

$$(39) \quad \vartheta^* = \frac{\vartheta_c + \vartheta_f}{2} + \frac{\vartheta_c - \vartheta_f}{2(H+1)} \left(1 - H \frac{(P - Ne^{-ml})e^{ms} - (N - Pe^{ml})e^{-ms}}{N(e^{-ml} + 1) - P(e^{ml} + 1)} \right) \quad \text{per } 0 \leq s \leq$$

$$(40) \quad \vartheta^* = \frac{\vartheta_c + \vartheta_f}{2} - \frac{\vartheta_c - \vartheta_f}{2(H+1)} \left(1 - H \frac{e^{-ml}(P - Ne^{-ml})e^{ms} - e^{ml}(N - Pe^{ml})e^{-ms}}{N(e^{-ml} + 1) - P(e^{ml} + 1)} \right) \quad \text{per } l \leq s \leq 2l$$

La temperatura ϑ , relativa all'anello metallico, può essere posta sotto la forma di sviluppo in serie ⁽³⁾ e possiamo anche porre: $l = \pi r$ e $s/r = \varphi$.

La temperatura è quindi anche data da uno sviluppo in serie del tipo:

$$(41) \quad \vartheta = \frac{1}{2} p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\varphi + q_n \sin n\varphi).$$

Si tratta quindi, basandosi sulle (37) e (38), di determinare i coefficienti $1/2 p_0$, p_n , q_n .

(3) Detto sviluppo è necessario per l'estensione del presente studio al caso in cui il fenomeno non sia permanente, che sarà trattato in una successiva Nota.

Per brevità omettiamo i calcoli relativi e diamo solo le espressioni dei tre coefficienti.

$$\frac{1}{2} p_0 = \frac{\vartheta_c + \vartheta_f}{2}$$

per n pari:

$$p_n = 0 \quad ; \quad q_n = 0$$

per n dispari:

$$p_n = 0 \quad ; \quad q_n = \frac{2}{\pi} (\vartheta_c - \vartheta_f) \frac{1}{H+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{n}{m^2 r^2 + n^2} \right).$$

Lo sviluppo in serie della ϑ dato dalla (41), sostituendo per i coefficienti le espressioni ora determinate, è:

$$(42) \quad \vartheta = \frac{1}{2} (\vartheta_c + \vartheta_f) + \frac{2}{\pi} \frac{\vartheta_c - \vartheta_f}{H+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{2n+1}{m^2 r^2 + (2n+1)^2} \right).$$

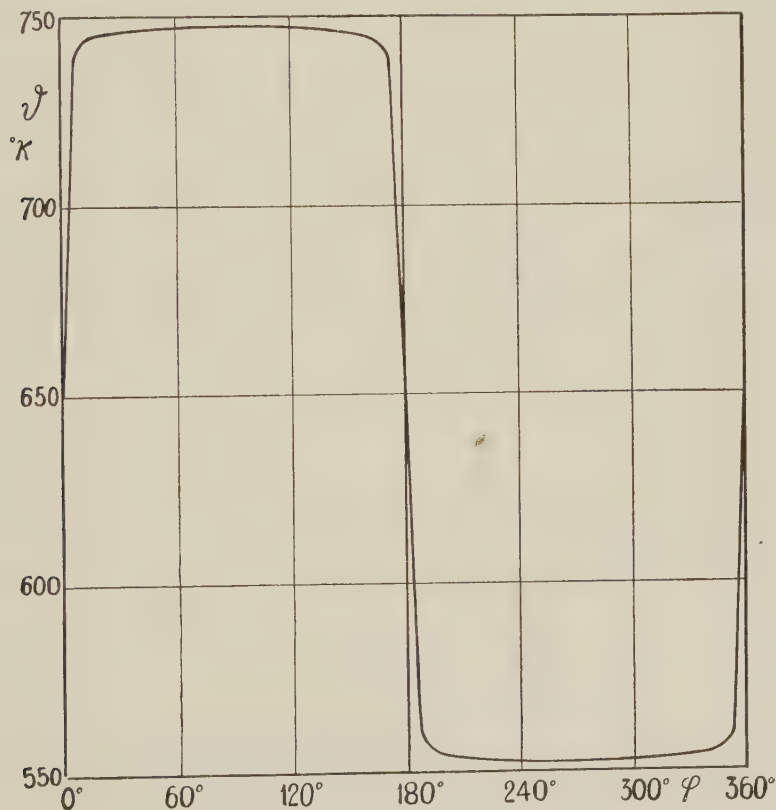


Fig. 2.

Nella fig. 2 è riportato l'andamento della temperatura ϑ dell'anello metallico ottenuta mediante l'applicazione dello sviluppo in serie (42) nel quale si sono fatte le seguenti assunzioni:

$$\begin{aligned} K &= 50 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^{\circ}\text{C} & ; & \quad \lambda_1 = 30 \text{ kcal/mh } ^{\circ}\text{C} & ; & \quad \lambda_2 = 0,056 \text{ kcal/mh } ^{\circ}\text{C}; \\ S_1 &= 0,000314 \text{ m}^2 & ; & \quad S_2 = 0,08007 \text{ m}^2 & ; & \quad r = 1 \text{ m} \\ \vartheta_c &= 950^{\circ} \text{ K} & ; & \quad \vartheta_f = 350^{\circ} \text{ K}. \end{aligned}$$

Astronomia. — *Determinazione del passo e degli errori del micrometro in declinazione del cerchio meridiano Repsold.* Nota I (*) di RICCARDO BARBATELLI, presentata dal Socio L. CARNERA.

In due Note precedenti si determinò il passo e gli errori progressivi e periodici del micrometro in A. R. del cerchio meridiano « Repsold »; ora in questa Nota, si deduce il passo della vite in δ dello stesso micrometro.

Per potere svolgere tale delicata indagine si sono scelte dal catalogo di Boss delle coppie di stelle; e si è tenuto cura, per ogni coppia, che la declinazione fosse di poco differente. Ed ancora tali stelle, prese due a due, presentano una differenza in A. R. di qualche minuto primo, sufficiente all'osservatore per preparare la puntata successiva.

Si è preferito scegliere stelle quasi tutte della 7^a grandezza.

Il metodo adoperato per le osservazioni è stato il seguente, si è fatta la puntata, e si è posto il filo mobile in δ del micrometro nella prossimità del posto dove doveva comparire la prima stella della coppia, leggendo sul tamburo graduato la rotazione e frazione di essa, alla quale presumibilmente si doveva presentare la prima stella, appena questa è entrata in campo ed ha preso la posizione stabilita, oppure, come di sovente è avvenuto, una posizione molto prossima a quella del filo mobile, la si è raggiunta col filo e si è effettuata la prima lettura al micrometro, poi si è scostato il filo, ed in un'altra posizione stabilita si è raggiunto di nuovo la stella, leggendo il micrometro per una seconda volta, e così ancora per una terza lettura.

Poi, preparato il micrometro per la seconda stella, si è ripetuta l'operazione già effettuata per la prima stella.

Qui ha termine la parte puramente osservativa, ed ha inizio una serie di calcoli, più o meno laboriosi, mediante i quali si è potuto ottenere il valore medio del passo della vite in δ .

Dei tre valori ottenuti per la prima stella se ne è fatta la media e così anche per i tre valori forniti dalla seconda, di queste due medie si è effettuata la differenza sottraendo sempre dal secondo il primo valore.

Tale differenza rappresenta il valore espresso in rotazioni del micrometro per la differenza di declinazione di ogni coppia di stelle.

Per conoscere il valore della differenza di declinazione all'istante dell'osservazione, si è dovuto effettuare il trasporto dall'epoca del catalogo, all'inizio dell'anno di osservazione e poi passare dalle posizioni medie a quelle apparenti delle stelle.

Per maggiore chiarezza si espone lo schema che si è adoperato per il calcolo della vite in δ .

Dal catalogo si sono prese le coordinate α_0 e δ_0 , le variazioni annue, V_α e V_δ , le variazioni secolari v_α e v_δ ed i moti propri μ_α e μ_δ , riferiti alla posizione

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1950.

dell'equinozio medio al tempo t_0 ; si sono indicate con α e δ le coordinate riferite alla posizione dell'equinozio al tempo t inizio dell'anno in cui si effettua l'osservazione.

Se allora α' ed α'' sono le A. R. della 1^a e 2^a stella di una coppia qualsiasi, e δ' e δ'' le declinazioni, le differenze si indicano:

$$\alpha'' - \alpha' = \Delta\alpha, \delta'' - \delta' = \Delta\delta, \text{ le medie } \alpha_m = \frac{1}{2}(\alpha'' + \alpha'), \text{ e } \delta_m = \frac{1}{2}(\delta'' + \delta');$$

ed analogamente:

$$V''_\alpha - V'_\alpha = \Delta V_\alpha, \quad V''_\delta - V'_\delta = \Delta V_\delta, \quad v''_\alpha - v'_\alpha = \Delta v_\alpha, \quad v''_\delta - v'_\delta = \Delta v_\delta;$$

e le medie

$$\frac{1}{2}(V''_\alpha + V'_\alpha) = V''_\alpha, \quad \frac{1}{2}(V''_\delta + V'_\delta) = V''_\delta, \quad \frac{1}{2}(v''_\alpha + v'_\alpha) = v''_\alpha, \quad \frac{1}{2}(v''_\delta + v'_\delta) = v''_\delta.$$

Se t non differisce molto da t_0 e le stelle sono vicine, come è sempre il caso delle nostre coppie, ove $t - t_0 = I$, $\Delta\alpha \leq 5^m$ ed il $\Delta\delta \leq 4'$, nel calcolo per il passaggio delle posizioni medie dall'epoca del catalogo a quelle al principio dell'anno di osservazione diventano assolutamente trascurabili i termini di secondo ordine.

Analogamente si semplifica il calcolo della riduzione a luoghi apparenti, interessando in questo caso conoscere unicamente il $\Delta\delta$.

Indicando con α_0, δ_0 le ascensioni rette e le declinazioni medie al principio dell'anno e con α, δ le ascensioni rette e le declinazioni apparenti all'istante $\tau = t - t_0$ e con G, g, h, i le costanti prese dalle effemeridi all'istante τ , si ha, essendo

$$\delta = \delta_0 + g \cos(G + \alpha_0) + h \cos(H + \alpha_0) \sin \delta_0 + i \cos \delta_0 + \tau \Delta\tau,$$

e per due stelle $\alpha'_0 \delta'_0$ ed $\alpha'' \delta''$:

$$\Delta\delta = (\delta'' - \delta') = \Delta\delta_0 + g [\cos(G + \alpha''_0) - \cos(G + \alpha'_0)] +$$

$$+ h [\cos(H + \alpha''_0) \sin \delta''_0 - \cos(H + \alpha'_0) \sin \delta'_0] + i [\cos \delta''_0 - \cos \delta'_0] + \tau \Delta\mu_\delta$$

e ricordando le posizioni fatte si ha:

$$\Delta\delta = \Delta\delta_0 - g \sin(G + \alpha_m) \sin \Delta\alpha + h [\cos(H + \alpha_m) \cos \delta_m \sin \Delta\delta - \\ - \sin(H + \alpha_m) \sin \delta_m \sin \Delta\alpha] - i \sin \delta'_m \sin \Delta\delta + \tau \Delta\mu$$

espressione che si è adottata nei calcoli seguenti.

Le coppie di stelle adoperate sono state 23, ed il numero delle coppie osservate è stato di 106, ma nello sviluppo degli ultimi calcoli, si è ritenuto opportuno riferirsi solo a 21 coppie ed a 95 osservazioni, per diverse ragioni plausibili (forti scarti che fanno dubitare sulla rigorosa identificazione delle stelle osservate).

Nella tabella I si hanno gli elementi che identificano le stelle, prescelte ed osservate, nonché la differenza di declinazione apparente delle due stelle nelle giornate delle osservazioni e la correzione che ad esse si deve apportare, per tener conto della rifrazione.

TABELLA I.
Stelle costituenti le coppie osservate.

| Coppie | Numero di Boss | $\Delta\delta_{app.}$ | Rifr. | Coppie | Numero di Boss | $\Delta\delta_{app.}$ | Rifr. |
|--------|----------------|-----------------------|-------|--------|----------------|-----------------------|-------|
| 5 | 29702 29791 | — 362.32 | 0.102 | 17 | 32478 32570 | + 239.80 | 0.074 |
| 5 | 29702 29791 | — 362.30 | 0.102 | 17 | 32478 32570 | + 239.65 | 0.074 |
| 6 | 29926 30005 | — 240.68 | 0.069 | 19 | 32963 33001 | + 194.16 | 0.058 |
| 6 | 29926 30005 | — 240.76 | 0.069 | 19 | 32963 33001 | + 194.12 | 0.058 |
| 7 | 30125 30168 | + 183.24 | 0.052 | 20 | 33187 33252 | + 196.94 | 0.056 |
| 7 | 30125 30168 | + 183.26 | 0.052 | 20 | 33187 33252 | + 197.36 | 0.056 |
| 8 | 30288 30342 | — 269.39 | 0.080 | 22 | 33219 33375 | + 277.11 | 0.078 |
| 8 | 30288 30342 | — 269.49 | 0.080 | 22 | 33219 33375 | + 277.31 | 0.078 |
| 9 | 30451 30732 | + 139.47 | 0.039 | 22 | 33219 33375 | + 277.65 | 0.078 |
| 9 | 30451 30732 | + 139.50 | 0.039 | 23 | 33488 33539 | + 328.44 | 0.092 |
| 10 | 30649 30732 | — 354.94 | 0.113 | 23 | 33488 33539 | + 328.56 | 0.092 |
| 10 | 30649 30732 | — 355.09 | 0.113 | 23 | 33488 33539 | + 328.42 | 0.092 |
| 11 | 30951 31064 | + 246.38 | 0.075 | 24 | 33642 33697 | + 301.73 | 0.089 |
| 11 | 30951 31064 | + 246.36 | 0.075 | 24 | 33642 33697 | + 301.56 | 0.089 |
| 12 | 31244 31312 | + 178.66 | 0.051 | 25 | 33761 33856 | + 249.23 | 0.071 |
| 12 | 31244 31312 | + 178.35 | 0.051 | 25 | 33761 33856 | + 249.19 | 0.071 |
| 12 | 31244 31312 | + 178.60 | 0.051 | 25 | 33761 33856 | + 249.29 | 0.071 |
| 14 | 31650 31690 | + 227.33 | 0.065 | 26 | 1049 1122 | + 176.16 | 0.049 |
| 14 | 31650 31690 | + 223.50 | 0.065 | 26 | 1049 1122 | + 176.19 | 0.049 |
| 14 | 31650 31690 | + 222.81 | 0.065 | 27 | 1228 1271 | + 226.98 | 0.064 |
| 15 | 31875 31998 | + 184.80 | 0.053 | 27 | 1228 1271 | + 227.11 | 0.064 |
| 15 | 31875 31998 | + 185.69 | 0.053 | 28 | 1361 1396 | + 187.35 | 0.058 |
| 15 | 31875 31998 | + 186.13 | 0.053 | 28 | 1361 1396 | + 187.38 | 0.058 |
| 16 | 32219 32348 | + 279.76 | 0.081 | | | | |

Nella tabella II invece, in ordine cronologico di osservazione, si hanno i valori delle misure micrometriche e del risultante valore angolare di una rotazione della vite.

La media generale di tutti questi valori porta a:

$$R = 33''.1878 \pm 0''.0385;$$

ma evidentemente nell'errore che così si è ricavato sono inclusi gli effetti di due errori essenzialmente distinti, quello vero e proprio dovuto all'osservazione (e quindi che altera il valore della differenza micrometrica ricavata dalla lettura), e quello dell'errore nelle declinazioni ammesso per le due stelle (incertezze ed errori residui delle posizioni ricavate dal catalogo, e dei moti propri tolte dallo stesso).

TABELLA II.

| Data | Coppia | Rot. micr. | R. | Data | Coppia | Rot. micr. | R. |
|-----------------|--------|------------|--------|------------------|--------|------------|--------|
| 0 ottobre 1949 | 5 | + 10.8740 | 33' 32 | 11 novembre 1949 | 19 | + 5.9060 | 32' 89 |
| 5 " " | 5 | + 10.9146 | 33 19 | 19 ottobre 1949 | 20 | — 5.9200 | 33 27 |
| 4 " " | 6 | + 7.2963 | 32 98 | 21 " " | 20 | — 5.9517 | 33 09 |
| 5 " " | 6 | + 7.2510 | 33 18 | 25 " " | 20 | — 5.9493 | 33 12 |
| 0 " " | 6 | + 7.3120 | 32 90 | 1 novembre 1949 | 20 | — 5.9927 | 32 93 |
| 5 " " | 7 | — 5.5897 | 32 78 | 9 " " | 20 | — 5.9477 | 33 18 |
| 0 " " | 7 | — 5.5697 | 32 90 | 11 " " | 20 | — 5.9320 | 33 27 |
| 2 " " | 8 | + 8.1726 | 32 97 | 21 ottobre 1949 | 22 | + 8.2967 | 33 40 |
| 4 " " | 8 | + 8.1500 | 33 05 | 25 " " | 22 | + 8.3343 | 33 23 |
| 5 " " | 8 | + 8.1484 | 33 06 | 30 " " | 22 | + 8.3490 | 33 19 |
| 2 " " | 9 | — 4.2080 | 33 29 | 1 novembre " " | 22 | + 8.3627 | 33 16 |
| 4 " " | 9 | — 4.2217 | 33 19 | 9 " " | 22 | + 8.3333 | 33 28 |
| 5 " " | 9 | — 4.2393 | 33 05 | 1 dicembre 1949 | 22 | — 8.3920 | 33 08 |
| 2 " " | 10 | + 10.6460 | 33 28 | 2 gennaio 1950 | 22 | — 8.3700 | 33 17 |
| 5 " " | 10 | + 10.7267 | 33 08 | 20 ottobre 1949 | 23 | + 9.8974 | 33 18 |
| 1 novembre 1949 | 10 | + 10.6384 | 33 09 | 21 " " | 23 | + 9.8637 | 33 30 |
| 7 ottobre " " | 11 | + 5.8870 | 33 27 | 22 " " | 23 | + 9.8990 | 33 18 |
| 0 " " | 11 | + 5.8556 | 33 55 | 23 " " | 23 | + 9.8780 | 33 26 |
| 9 " " | 12 | + 5.4000 | 33 08 | 30 " " | 23 | + 9.8424 | 33 38 |
| 2 " " | 12 | + 5.4473 | 33 14 | 1 novembre 1949 | 23 | + 9.8463 | 33 28 |
| 4 " " | 12 | + 5.4713 | 32 66 | 11 " " | 23 | + 9.8696 | 33 28 |
| 0 " " | 12 | + 5.3547 | 33 36 | 21 ottobre 1949 | 24 | — 9.1600 | 32 94 |
| 1 novembre 1949 | 12 | + 5.3900 | 33 15 | 1 dicembre 1949 | 24 | + 9.2713 | 32 53 |
| 0 " " | 14 | — 6.7357 | 33 75 | 2 gennaio 1950 | 24 | + 8.8447 | 33 32 |
| 2 " " | 14 | — 6.7010 | 33 92 | 15 ottobre 1949 | 25 | — 7.4870 | 33 29 |
| 5 " " | 14 | — 6.7443 | 33 71 | 22 " " | 25 | — 7.4387 | 33 51 |
| 0 " " | 14 | — 6.6977 | 33 37 | 25 " " | 25 | — 7.4233 | 33 56 |
| 1 novembre 1949 | 14 | — 6.8297 | 32 68 | 30 " " | 25 | — 7.5440 | 33 04 |
| 1 " " | 14 | — 6.7206 | 33 16 | 1 novembre 1949 | 25 | — 7.5423 | 33 05 |
| 5 ottobre 1949 | 15 | + 5.5780 | 33 13 | 9 " " | 25 | — 7.5257 | 33 12 |
| 0 " " | 15 | + 5.5183 | 33 49 | 19 ottobre 1949 | 26 | + 5.2873 | 33 31 |
| 1 " " | 15 | + 5.6440 | 32 75 | 20 " " | 26 | + 5.2950 | 33 27 |
| 0 " " | 15 | + 5.5340 | 33 55 | 21 " " | 26 | + 5.3126 | 33 16 |
| 1 novembre 1949 | 15 | + 5.5494 | 33 46 | 25 " " | 26 | + 5.2820 | 33 35 |
| 1 dicembre 1949 | 15 | + 5.5497 | 33 54 | 30 " " | 26 | + 5.3496 | 32 95 |
| 0 ottobre 1949 | 16 | — 8.5317 | 32 78 | 1 novembre 1949 | 26 | + 5.2924 | 33 29 |
| 4 " " | 16 | — 8.5957 | 32 53 | 9 novembre 1949 | 26 | + 5.2416 | 33 62 |
| 5 " " | 16 | — 8.5014 | 32 90 | 1 dicembre 1949 | 26 | + 5.2790 | 33 38 |
| 0 " " | 16 | — 8.5784 | 32 61 | 21 ottobre 1949 | 27 | + 6.8493 | 33 20 |
| 1 novembre 1949 | 16 | — 8.5124 | 32 86 | 22 novembre 1949 | 27 | + 6.8228 | 33 29 |
| 9 novembre 1949 | 16 | — 8.4573 | 33 04 | 30 " " | 27 | + 6.7320 | 33 49 |
| 1 ottobre 1949 | 17 | + 7.2007 | 33 28 | 1 novembre 1949 | 27 | + 6.7943 | 33 41 |
| 4 " " | 17 | + 7.1766 | 33 42 | 11 " " | 27 | + 6.8593 | 33 08 |
| 5 " " | 17 | + 7.1923 | 33 35 | 21 ottobre 1949 | 28 | + 5.6816 | 32 97 |
| 1 dicembre 1949 | 17 | — 7.2693 | 32 99 | 22 " " | 28 | + 5.5356 | 33 84 |
| 0 ottobre 1949 | 19 | + 5.8850 | 32 99 | 9 novembre 1949 | 28 | + 5.4066 | 33 87 |
| 9 novembre 1949 | 19 | + 5.8973 | 32 92 | 11 " " | 28 | + 5.5866 | 33 56 |

È ovvio che se confrontiamo fra di loro i valori di R ricavati in serie diverse, ma sempre dalla stessa coppia, essi non potranno risentire che del primo

errore, e di conseguenza se si fanno gli scarti che presentano i valori serali ottenuti da una certa coppia in confronto alla media di tutti quelli ottenuti dalla stessa coppia in tutte le sere, potremo ricavare quale possa essere l'ordine di grandezza dell'errore di una osservazione, dovuto esclusivamente all'osservazione.

Se si indica con v_i^k lo scarto che presenta il valore della coppia i , alla k^{ma} osservazione, ed il numero delle coppie prese in considerazione è n , mentre il numero totale degli scarti è m , si avrà che l'errore medio cercato per una singola osservazione sarà dato da:

$$\varepsilon \pm \sqrt{\frac{\sum v_i^k{}^2}{m - (n - 1)}}$$

ed in questo caso essendo $m = 95$, $n = 21$, e $\sum v^k = 46042$ si ha $\varepsilon = \pm 0''.0251$.

TABELLA III.

| Coppia | p | R | Coppia | p | R |
|--------|-----|--------|--------|-----|--------|
| 5 | 2 | 33.255 | 17 | 4 | 33.250 |
| 6 | 3 | 33.020 | 19 | 3 | 32.933 |
| 7 | 2 | 32.870 | 20 | 6 | 33.143 |
| 8 | 3 | 33.027 | 22 | 7 | 33.216 |
| 9 | 3 | 33.176 | 23 | 7 | 33.266 |
| 10 | 3 | 33.150 | 24 | 3 | 32.930 |
| 11 | 2 | 33.410 | 25 | 6 | 33.262 |
| 12 | 5 | 33.078 | 26 | 8 | 33.291 |
| 14 | 6 | 33.432 | 27 | 5 | 33.294 |
| 15 | 6 | 33.320 | 28 | 5 | 33.372 |
| 16 | 6 | 32.787 | | | |

Da questo risulta, che ai valori medi ottenuti dalle diverse coppie, osservate e raccolte nella tabella III (nella quale è sempre aggiunto accanto al risultato medio anche il numero p delle osservazioni), potrà esser attribuito il peso p , e che a quei valori corrisponderà l'errore medio:

$$\varepsilon_p = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}.$$

Se ora servendosi dei valori della tabella III e dei rispettivi pesi si calcola la media pesata, ovviamente si ritrova ancora il valore di R , scritto più sopra, ma l'errore medio del risultato a seconda che si calcoli direttamente dagli scarti,

o si consideri come dovuto ai due errori distinti dovuti alle declinazioni ed alle osservazioni sarà dato da:

$$\sqrt{(0.0251)^2 + \epsilon_0^2} = \sqrt{\frac{\sum p_i v^2}{(n-1) \sum p_i}} = \pm 0''.0385$$

da cui:

$$\epsilon_0 = \pm \sqrt{0.0385^2 - 0.0251^2} = \pm 0''.0292,$$

onde l'errore che viene al valore trovato per il passo delle due fonti può essere fondatamente ritenuto dello stesso ordine di grandezza e peso.

Se si tiene conto allora che il numero delle rotazioni di una coppia è di circa 6, ne verrà che l'errore di una differenza di declinazione deve essere di circa $\pm 0''.18$, e quindi della declinazione di una stella è di $\pm 0''.13$, che non si scosta da quello che è l'ordine di grandezza degli errori del catalogo.

Astronomia — *Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere.* Nota III (*) di LUCIO GIALANELLA, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Continuo in questa Nota l'esposizione dei risultati delle osservazioni meridiane dell'ascensione retta dei pianeti interni Mercurio e Venere, da me eseguite all'Osservatorio Astronomico di Roma (Monte Mario) nei giorni prossimi alle massime elongazioni di giugno e agosto del 1950.

TABELLA I.
Stelle di riferimento.

| * | Mag. | $\alpha_{1950,0}$ | $\delta_{1950,0}$ |
|------------------------------------|------|--|-------------------|
| α Persei | 1.90 | 3 ^h 20 ^m 44 ^s .45 | + 49° 41' 06".0 |
| α Tauri | 1.06 | 4 33 02 .90 | + 16 24 37 .5 |
| α Aurigae | 0.21 | 5 12 59 .48 | + 45 56 58 .1 |
| α Orionis | Var. | 5 52 27 .82 | + 7 23 58 .0 |
| ϵ Ursae Maioris | 1.68 | 12 51 50 .10 | + 56 13 51 .3 |
| α Virginis | 1.21 | 13 22 33 .31 | — 10 54 03 .4 |
| η Ursae Maioris | 1.91 | 13 45 34 .31 | + 49 33 44 .1 |
| α Bootis | 0.24 | 14 13 22 .76 | + 19 26 31 .0 |
| ϵ Bootis | 2.70 | 14 42 48 .14 | + 27 17 02 .6 |

(*) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1950.

TABELLA II.
Ascensioni rette di Mercurio e Venere.

| Data T. U. | | | $\alpha_{\text{oss.}}$ | semid. | α_{centro} | $\alpha_{\text{calc.}}$ | O—C |
|------------|--------|----------|--|--------------------|--------------------------|-------------------------|----------------------|
| Mercurio | | | | | | | |
| 1950 | Giugno | 3.40320 | 3 ^h 15 ^m 35 ^s .30 | 0 ^s .31 | 34 ^s .99 | 34 ^s .82 | + 0 ^s .17 |
| | | 4.40180 | 3 17 43 .70 | 0 .30 | 43 .40 | 43 .26 | + 0 .14 |
| | | 6.40000 | 3 22 47 .27 | 0 .29 | 46 .98 | 46 .89 | + 0 .09 |
| | | 7.39929 | 3 25 42 .01 | 0 .28 | 41 .73 | 41 .63 | + 0 .10 |
| | | 9.39841 | 3 31 16 .55 | 0 .27 | 16 .28 | 16 .09 | + 0 .19 |
| | | 10.39820 | 3 35 55 .79 | 0 .26 | 55 .53 | 55 .47 | + 0 .06 |
| | | 11.39819 | 3 39 50 .03 | 0 .26 | 49 .77 | 49 .61 | + 0 .16 |
| | Agosto | 19.53708 | 11 30 29 .74 | 0 .24 | 29 .98 | 29 .91 | + 0 .07 |
| | | 21.53626 | 11 39 09 .29 | 0 .24 | 09 .53 | 09 .39 | + 0 .14 |
| | | 22.53569 | 11 42 16 .19 | 0 .24 | 16 .43 | 16 .33 | + 0 .10 |
| | | 23.53503 | 11 45 12 .42 | 0 .25 | 12 .67 | 12 .51 | + 0 .16 |
| | | 24.53420 | 11 47 57 .22 | 0 .25 | 57 .47 | 57 .38 | + 0 .09 |
| | | 25.53319 | 11 50 30 .21 | 0 .25 | 30 .46 | 30 .34 | + 0 .12 |
| Venere | | | | | | | |
| 1950 | Giugno | 3 | 2 02 21 .51 | 0 .52 | 20 .99 | 20 .95 | + 0 .04 |
| | | 4 | 2 06 45 .01 | 0 .52 | 44 .49 | 44 .41 | + 0 .08 |
| | | 6 | 2 15 34 .83 | 0 .51 | 34 .32 | 34 .16 | + 0 .16 |
| | | 7 | 2 20 01 .09 | 0 .51 | 00 .58 | 00 .48 | + 0 .10 |
| | | 9 | 2 28 56 .71 | 0 .51 | 56 .20 | 56 .07 | + 0 .13 |
| | | 10 | 2 33 26 .05 | 0 .50 | 25 .55 | 25 .38 | + 0 .17 |
| | | 11 | 2 37 56 .29 | 0 .50 | 55 .79 | 55 .72 | + 0 .07 |
| | Agosto | 19 | 8 23 19 .57 | 0 .39 | 19 .18 | 19 .03 | + 0 .15 |
| | | 21 | 8 33 28 .32 | 0 .38 | 27 .94 | 27 .70 | + 0 .24 |
| | | 22 | 8 38 31 .31 | 0 .38 | 30 .93 | 30 .81 | + 0 .12 |
| | | 23 | 8 43 33 .55 | 0 .38 | 33 .17 | 33 .07 | + 0 .10 |
| | | 24 | 8 48 34 .98 | 0 .38 | 34 .60 | 34 .38 | + 0 .22 |
| | | 25 | 8 53 35 .56 | 0 .38 | 35 .18 | 35 .01 | + 0 .17 |

Nelle Note precedenti ⁽¹⁾ ho esposto i dettagli dello strumento adoperato (invertibile Bamberg di mm 89 di apertura e cm 95 di focale) e del metodo seguito per le osservazioni, sia dei pianeti che delle stelle di riferimento. Mi limito qui, pertanto, a riferire i risultati, rimandando ad una prossima più ampia Memoria in altra sede la discussione completa di tutta questa prima serie di osservazioni.

La tabella I contiene l'elenco delle stelle di riferimento, con le rispettive posizioni medie, desunte dal Nautical Almanac. La tabella II contiene i risultati delle osservazioni dei pianeti e i confronti O—C con i valori dell'effemeride del N. A. A causa delle fasi, le osservazioni erano fatte al bordo lucido del pianeta; l'ascensione retta osservata è stata ridotta a quella del centro con i valori del semidiametro ricavato dall'effemeride del N. A. Per Mercurio è stato osservato il 2° bordo nell'elongazione di giugno e il 1° bordo in quella di agosto; per Venere è stato osservato sempre il 2° bordo. Per Mercurio ho dato anche i tempi di osservazione (in frazione di giorno), poichè l'effemeride del N. A. non fornisce i valori corrispondenti al passaggio a Greenwich.

Astronomia. — *Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole.* Nota I ^(*) di MASSIMO CIMINÒ, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

1. È ben noto come da un accurato profilo sperimentale delle righe spettrali stellari e dalla espressione teorica del coefficiente di assorbimento delle righe stesse, introdotta nella equazione del trasporto della energia radiante attraverso l'atmosfera stellare, sia possibile ricavare alcuni parametri di importante significato fisico, e precisamente: 1° sfruttando la parte centrale della riga (*Doppler-core*) si può valutare la temperatura cinetica dovuta all'agitazione degli atomi cui la riga si riferisce; 2° sfruttando le ali si trova la semi-larghezza della riga, dalla quale è possibile risalire alla sezione d'urto degli atomi; 3° infine da un punto qualsiasi del profilo si può ottenere il rapporto tra il numero degli atomi che si trovano al livello energetico inferiore che origina la riga e il coefficiente di assorbimento del continuo. Purtroppo il tracciamento dei profili delle righe spettrali stellari urta contro molteplici difficoltà qualora si vada in cerca di risultati di altissima precisione; la maggiore di esse va però ricercata nell'insufficiente potere risolutivo degli spettrografi. Un potere risolutivo dell'ordine di 10^6 sarebbe il minimo desiderabile, dal quale, oggi, siamo però ancora lontani, non riuscendoci praticamente a superare, anche nei maggiori spettrografi solari, il limite di $2 \cdot 10^5$. Comunque, anche con tali limitazioni, lo studio dei profili delle righe spettrali stellari e solari riesce sempre di grande utilità, e costituisce il mezzo di indagine più efficace per lo studio della costituzione delle atmosfere stellari, nonchè il banco di prova dei modelli proposti. Per questa ragione, avendo avuto la possibilità di usufruire per oltre 30 giorni effettivi di osservazione della grande Torre Solare

(1) « Rend. Fisici R. Acc. d'Italia », vol. IV, fasc. 8 (1942) = « Contributi Scientifici Osservatorio di Roma », n. 110; « Rend. Fisici Acc. Lincei », vol. I, fasc. I (1946) = « Contr. Osserv. Roma », n. 136.

(*) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1950.

di 50 metri del Monte Wilson, provvista del grande spettrografo di 23 metri, decisi di occuparmi di alcune righe spettrali solari di particolare interesse, studiando il comportamento del loro profilo dal centro al lembo del disco del Sole.

Nella scelta del programma, ero confortato dalle seguenti altre ragioni: 1° con lo stesso strumento e stesso reticolo [il n. 66 di Rowland], erano stati presi gli spettri del centro del disco solare serviti per il tracciamento dei profili del ben noto *Photometric Atlas of the Solar Spectrum* del Minnaert⁽¹⁾. I profili contenuti in quest'opera avrebbero costituito il miglior termine di confronto che io avessi potuto desiderare per le mie determinazioni al centro del disco, e quindi un indice prezioso sulla attendibilità di quanto avrei trovato al bordo; 2° era già conosciuto un profilo strumentale delle righe (sia pure approssimato), ed era stata valutata l'importanza dei fantasmi del reticolo; 3° l'immagine solare alla grande Torre è la maggiore di cui oggi si possa disporre (43 cm.), e avrebbe permesso di puntare il lembo solare con la massima precisione possibile.

Un certo numero di lavori del genere erano già stati effettuati da altri osservatori con altri strumenti⁽²⁾. Decisi così di includere nella lista alcune righe meno studiate, - quali il *tripletto infrarosso del calcio ionizzato* (λ 8498 ; λ 8542 ; λ 8662) -, assieme a righe assai meglio conosciute, - quali le D del sodio, il *tripletto verde del magnesio* e la λ 4227 del *calcio neutro*. Avrei avuto così molte possibilità di confronto coi risultati ottenuti con altri strumenti ed altre tecniche di rilievo dei dati. Complessivamente, tra prove, calibrazioni e lastre pei profili raccolti circa 120 lastre, formato 9×24 , molte delle quali impressionate fin con 8 spettri ciascuna. Si tratta dunque di un materiale molto ricco, che io ho successivamente studiato al mio ritorno in Italia. Dei risultati ottenuti e delle relative discussioni teoretiche saranno oggetto alcune Note successive alla presente, nella quale, invece, comincerò col dare un cenno sulle caratteristiche dello strumento adoperato e sui criteri coi quali il materiale è stato raccolto.

2. STRUMENTO E RACCOLTA DEL MATERIALE. - I dati essenziali sulla grande Torre Solare del Monte Wilson sono i seguenti⁽³⁾: 1° obiettivo di 38 cm. di diametro, 43 m. di distanza focale, immagine solare di 43 cm. circa; 2° spettrografo ad autocollimazione in pozzo verticale, di 23 m. di lunghezza, apertura della camera: $R = 1/342$. È provvisto di due reticoli intercambiabili, uno dei quali - il n. 66 Rowland da me usato - di 6×12.5 cm., con 600 tratti al mm. e 75.000 righe in totale. Dispersione, nel 1° ordine, di 0.7 Å al mm. Limite risolvete⁽⁴⁾ di 0.17 cm^{-1} per λ 8000 nel 1° ordine (usato per il tripletto infrarosso del Ca II) e 0.13 cm^{-1} per λ 5000 nel 2° ordine (usato per tutte le altre righe); in lunghezza d'onda 0.1 Å e 0.03 Å rispettivamente, corrispondenti sulla lastra a 0.14 mm. e 0.07 mm.; 3° apertura della fenditura: $s = 0.05$ mm., scelta in

(1) MINNAERT, HOUTGAST, MULDER, Amsterdam, 1940.

(2) Per la bibliografia cfr.: MINNAERT, « M. N. », **107**, 274 (1947); UNSÖLD, « Ann. der Physik », **3**, Folg. 6 (1948).

(3) Per ogni altro dato cfr.: HALE and NICHOLSON, « Carnegie Institution of Washington », Pubb. n. 498 (1938).

(4) Ricordo che per *limite risolvete* si intende il rapporto: $\Delta\nu = \nu/R$, con ν = numero d'onde ed R = potere risolutivo.

base al seguente criterio. È ben noto⁽⁵⁾ come il profilo strumentale delle righe spettrali si possa far dipendere da s attraverso il parametro:

$$\sigma = \pi R \frac{s}{\lambda} 10^{-7} \quad (s \text{ in mm.}).$$

Quanto più piccolo è s (e quindi σ) tanto più il profilo strumentale tende al profilo ideale ottenuto con una fenditura infinitamente sottile. Purtroppo però, al diminuire di s si diminuisce anche la luce introdotta nello spettrografo, cosicché occorre arrivare ad un compromesso, dando ad s un valore che, mentre garantisca una sufficiente illuminazione, non diminuisca il potere risolutivo dello spettrografo. Si dimostra allora che, ponendo $\sigma = \pi$, il corrispondente valore di s soddisfa ai requisiti suddetti. La scelta di un valore più piccolo per σ non fa guadagnare in potere risolutivo (possibilità di distinguere due righe vicine); *si guadagna però sempre nella purezza del profilo della riga*, e questo ha molta importanza specialmente per la zona centrale della riga stessa. Il Minnaert, nel citato *Photometric Atlas...*, ha scelto $\sigma = \pi/6$ nel 1° ordine, e $\sigma = \pi/3$ nel 2° ordine, il che porta $s = 0.045$ mm. per $\lambda 8000$ nel 1° ordine, ovvero per $\lambda 4000$ nel 2° ordine. In pratica, io ho adottato il valore $s = 0.05$ in tutte le zone ($\lambda 8500$ nel 1° ordine, $\lambda 4000-6000$ nel 2° ordine), salvo piccole differenze.

Come materiale fotografico ho usato: 1° per l'*infrarosso*, lastre Eastmann IV-N, antialo, di recentissima fabbricazione; poche, più vecchie, sono state antialonizzate da me; 2° per la *zona delle D del sodio e del tripletto del magnesio*, lastre Eastmann 4-F antialonizzate da me; 3° per la *zona della $\lambda 4227$* , lastre Eastmann K 33, antialo. I primi due tipi di lastre sono state sviluppate con sviluppo Elon (al metolo), morbido, 5 minuti a 65° F; il terzo tipo con sviluppo Eastmann D-19 più contrastato, stesso tempo e temperatura. Fissaggio poco acido. I primi due tipi di lastre danno alto contrasto, ma, utilizzandole con sviluppo morbido, si è riusciti a far rientrare la quasi totalità delle densità (dal fondo continuo al centro *assai chiaro* delle righe più intense) nel tratto corretto della curva di calibrazione. Durante lo sviluppo i bagni furono rigorosamente agitati, onde premunirsi contro l'effetto Eberhard.

Gli spettrogrammi pei profili, ciascuno di 3 mm. di altezza, sono stati impressionati in numero di 7 sulla stessa lastra, procedendo dal lembo al centro del Sole lungo un raggio polare, a distanze dal centro (in unità del raggio del disco) di 0.985; 0.966; 0.940; 0.866; 0.766; 0.643 e *centro*, le quali zone di puntamento corrispondono ad angoli formati dalla congiungente centro-sole con osservatore e centro-sole con zona puntata rispettivamente di 80°; 75°; 70°; 60°; 50°; 40°; 0°. Sulla stessa lastra si è inoltre impresso un ottavo spettro preso con *fenditura radiale*, allo scopo di tentare di tracciare i profili in zone ancora più prossime al bordo. Essendo l'immagine solare di 430 mm. circa, la puntata più vicina al bordo risultava a 3 mm. verso l'interno, cioè di facile e sicuro puntamento. Per le pose al lembo ho avuto cura di scegliere il momento di maggior calma del bordo, che, a Monte Wilson, si ha al mattino presto, a partire da 1/2 ora dopo il levare del Sole e dura circa un'ora. Non si sono presi spettrogrammi al bordo se non con lembo molto calmo e cielo purissimo, assolutamente privo di veli, in modo da non introdurre luce spuria nelle pose al lembo. Ho pure curato,

(5) Cfr. per esempio, P. H. MITTAERT, «Z. für Physik», **65**, 551.

osservando gli spettroeliogrammi del giorno precedente, di evitare zone perturbate. Il tripletto infrarosso del Ca II è stato impressionato su due lastre affiancate, nel 1° ordine del reticolo, ponendo avanti alla fenditura, onde assorbire il violetto sovrapposto del 2° ordine, un filtro Kodak W 87, tenuto un po' discosto e inclinato allo scopo di evitare la formazione di frange di interferenza. Quattro tempi di posa, variabili dal centro al lembo, tra 1^m 40^s e 3^m 40^s circa. Gli spettrogrammi relativi alle altre righe sono stati presi invece nel 2° ordine, senza filtri, con pose tra 40^s e 1^m 30^s nel giallo, 2^m a 4^m nel verde, 25^s a 1^m nel violetto. Tutti questi tempi hanno però subito, di volta in volta, qualche modifica allo scopo di ottenere spettrogrammi con densità leggermente differenti, che potessero, alcuni, servire meglio per le ali, altri per il centro delle righe. Ovviamente, lo spettrografo fu messo a fuoco per ogni zona spettrale, dopo convenienti controlli fotografici.

Per la calibrazione delle lastre ho adoperata una fenditura a gradini (*step-slit*) di dotazione della Torre, con 9 aperture in scala logaritmica, servendomi dello stesso tipo di lastre adoperate per gli spettrogrammi, e sviluppandole assieme a queste ultime in bacinella verticale. È stata utilizzata la luce della zona centrale del disco solare, muovendo sempre un po' l'immagine durante le pose in modo da compensare le eventuali lievi differenze di illuminazione. Le calibrazioni sono state prese con *tempi di posa uguali a quelli degli spettrogrammi* (si tratta quindi di 4 diverse calibrazioni per ogni lastra di spettri dal centro al lembo). Naturalmente, data la lunghezza delle esposizioni, e per poter utilizzare le fenditure più larghe dello *step-slit*, si è dovuto interporre un filtro fotografico, onde attenuare l'illuminazione. Questo filtro è stato controllato, in relazione alla sua uniformità, passandolo in lungo e largo sotto il microfotometro. Le aperture dello *step-slit* erano state accuratamente determinate. Ma rimaneva un dubbio, generato dal seguente fatto. Uno spettrografo della lunghezza di quello da me adoperato è sempre, inevitabilmente, affetto da un residuo di aberrazione, la quale si manifesta con la impossibilità di mettere a fuoco *contemporaneamente* le righe spettrali e il bordo orizzontale dello spettro, quando questo è ottenuto con schermi posti a contatto con la fenditura. Gli spettrogrammi ottenuti con lo *step-slit* - anche essi, come quelli dei profili, di 3 mm. di altezza - presentano una sfumatura ai bordi, dovuta alla causa suddetta. Questo fatto, assieme al sospetto che una certa luce diffusa potesse andare ad impressionare le zone intermedie tra due fenditure, faceva sorgere il dubbio che, in definitiva, la distribuzione della luce potesse risultarne alterata e quindi che i rapporti tra le intensità trasmesse alla lastra da due gradini non corrispondesse esattamente ai rapporti geometrici delle loro aperture. Un controllo è stato effettuato col seguente metodo. Sopra una stessa lastra si sono impresse due calibrazioni, con stesso *step-slit*, stessi filtri, stessa illuminazione, stesso tempo, ma l'una con un *filtro aggiunto* di gelatina avente una trasmissione dal 40 % al 60 % (a seconda della zona spettrale), *accuratamente tarato*. Riducendo in tal modo, tra le due calibrazioni, l'intensità di luce secondo un rapporto ben conosciuto è possibile, utilizzando la parte lineare della curva di calibrazione, controllare la corrispondenza del rapporto geometrico di due fenditure con quello delle intensità effettivamente trasmesse alla lastra. Questo controllo dello *step-slit* è stato fatto su tutti i tipi di lastre utilizzate e in tutti i campi

spettrali esplorati (potendo l'eventuale inconveniente dipendere da λ), e con differenti tempi di posa. Inoltre l'ho ripetuto senza l'impiego del filtro di gelatina, riducendo invece l'intensità della illuminazione tra le due pose col diaframmare (nel senso della dispersione) il reticolo secondo rapporti ben conosciuti.

Durante la raccolta del materiale ho pure effettuate molte prove di saggio, onde migliorare la tecnica ed essere tranquilli sulla bontà del materiale che si andava raccogliendo. Il profilo di alcune righe spettrali veniva tracciato, da spettrogrammi del centro del disco solare, con un microfotometro di dotazione dell'Osservatorio di Monte Wilson, e le densità ridotte in intensità con la curva di calibrazione. I risultati erano subito confrontati coi profili delle stesse righe contenuti nel citato *Photometric Atlas*... del Minnaert, che, come ho detto, erano stati tracciati da spettrogrammi presi con lo stesso strumento, pure al centro del disco solare. In tal modo mi è stato possibile migliorare la tecnica fino ad ottenere, nel confronto, scarti nelle intensità che raramente raggiungono il 5 % per le zone centrali delle righe, ma sono, quasi sempre, assai inferiori. L'ottimo accordo per le righe tratte da spettrogrammi del centro mi rende pertanto fiducioso della bontà dei risultati per il lembo, essendo i relativi spettrogrammi impressi, come si è già detto, sulle stesse lastre.

In tutto ho raccolto, come ho già accennato, circa 120 lastre di cui: *a*) 16 per profili (con 8 spettri ciascuna, dal centro al lembo del Sole), di cui 8 per il Ca II nell'infrarosso, 3 per le D_1 e D_2 del sodio, 3 per il tripletto verde del magnesio, 2 per la $\lambda 4227$ del Ca I; *b*) 18 per le calibrazioni (con 2 calibrazioni su ogni lastra); *c*) 17 per il controllo dello *step-slit*. Tutto questo gruppo di 51 lastre è senza difetti. Inoltre 50 lastre circa, pure di profili e calibrazioni, sono state utilizzate solo in parte presentando qualche pecca (sovraesposizione, sottoesposizione, diverso tipo di lastre, frange del filtro, ecc.). Infine 20 lastre di prove diverse mi sono servite anche esse per controlli vari.

Fisica matematica. — *Sulla scomposizione delle funzioni fisiche in elementi di andamento prefissato.* Nota (*) di ORESTINA GARAVARDI, presentata dal Socio G. GIORGI.

Nella trattazione operativa dei sistemi fisici, retti da leggi lineari, si richiede spesso di scomporre una funzione fisica $W(t)$, esprimente per esempio la legge di variazione temporale di una causa agente (funzione operando) in elementi di andamento prestabilito, applicando il principio di sovrapposizione. In questo modo, si riconduce il caso di una $W(t)$ generica, a quello di una causa semplice, impulsiva, o a gradino, o avente la forma di un'onda esponenziale a fronte ripido, oppure ancora avente l'andamento di una qualunque delle funzioni $j_n(t)$ del Giorgi definite dalla relazione (1)

$$j_n(t) = \Delta^n F u(t).$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1950.

(1) Per le notazioni vedasi ad esempio: G. GIORGI, *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate da problemi di elettrodinamica*. «Atti dell'Ass. Elettrotecnica Italiana», vol. IX, pp. 651-699 (1905); ristampato nel «Boll. Tecnico dell'Ist. Militare Sup. delle trasmissioni», anno 1940, n. 3 e 4, pp. 91-139.

Generalizzando, si può proporre il problema di effettuare la scomposizione in elementi aventi l'andamento di una funzione prefissata $\varphi(t)$ qualsiasi, ottenuti cioè moltiplicando tale $\varphi(t)$ per un adatto fattore numerico k , e dando all'elemento generico una opportuna « localizzazione » temporale con che l'elemento stesso viene espresso dalla formula:

$$k \cdot \varphi(t - a).$$

Supposta realizzata in via d'approssimazione (per esempio per l'applicazione di qualche procedimento grafico di valutazione) una simile scomposizione, relativamente ad un certo tratto del diagramma della $W(t)$, si avrà manifestamente la sommatoria:

$$(1) \quad W(t) \cong W_0 + \sum_{s=1}^n k_s \varphi(t - A_s)$$

e la rappresentazione della $W(t)$ sarà tanto più esatta, quanto più fitta sarà la successione degli elementi di scomposizione, di modo che al limite si otterrà l'integrale ⁽²⁾:

$$(2) \quad W(t) = W_0 + \int_0^t \psi(\xi) \varphi(t - \xi) d\xi,$$

nel quale la $\psi(\xi)$ viene a sostituirsi al coefficiente k_s della sommatoria precedente.

Casi particolari della (2), ben noti, sono i seguenti:

$$F(t) = \int_0^t F(\xi) Fu(t - \xi) d\xi$$

relativa alla scomposizione in elementi impulsivi di una funzione avente valori tutti nulli per $t < 0$; inoltre

$$(3) \quad W(t) = \int_0^t G(\xi) V(t - \xi) d\xi$$

esprimente il risultato $W(t)$ dell'applicazione dell'operatore $f(\Delta)$, avente la funzione generatrice $G(t)$, all'operando $V(t)$; ed altri ancora ⁽³⁾.

Con riferimento alla formula (3) scritta sopra, si vede dunque che il problema di scomporre una funzione $W(t)$ in elementi aventi l'andamento di una funzione prefissata $G(t)$, comprende come caso particolare quello di determinare l'operando incognito $V(t)$ quando sia dato l'operatore $f(\Delta)$ e il risultato dell'applicazione di questo a $V(t)$; ossia, detto problema è in sostanza l'inverso del consueto problema di valutazione delle espressioni simboliche.

(2) Questo integrale può essere un integrale generalizzato, perchè la funzione sotto il segno può contenere elementi impulsivi.

(3) Vedasi ad esempio: G. APRILE, *Funzioni generatrici generalizzate e loro applicazione ai metodi grafico-numerici di valutazione nel calcolo operatorio funzionale*. « Acta Pont. Acad. Scient. », anno VI, vol. VI, n. 17.

Si deduce da quanto sopra che la desiderata scomposizione è certamente conseguibile quando la $G(t)$ sia tale da potersi considerare come funzione generatrice di un operatore funzionale $f(\Delta)$: ed allora essa dovrà avere la forma

$$G(t) = G_1(t) \mathbf{1}(t)$$

ossia dovrà avere valori nulli per $t < 0$.

Nel caso che esista un operatore $f(\Delta)$ tale da ammettere la $G(t)$ come sua funzione generatrice, potrà scriversi, in base alla (3):

$$W(t) = f(\Delta) V(t)$$

ossia

$$V(t) = \frac{1}{f(\Delta)} W(t)$$

e ponendo

$$G^*(t) = \frac{1}{f(\Delta)} Fu(t)$$

si otterrà senz'altro la $V(t)$ cercata, espressa dalla formula:

$$V(t) = \int_0^t G^*(\xi) W(t-\xi) d\xi.$$

Fisica-matematica. — *Sul primo problema della cinematica delle superficie.* Nota^(*) di GIUSEPPE TEDONE, presentata dal Socio A. SIGNORINI.

1. PREMESSE. — Il problema cui si allude nel titolo di questa Nota consiste, come si sa, nella deduzione del moto di una superficie dalla conoscenza di una adatta espressione della sua velocità di avanzamento. La risoluzione, come rapidamente ricorderemo, si riconduce in sostanza all'integrazione di un certo sistema canonico⁽¹⁾. Siano x_1, x_2, x_3 le coordinate del generico punto dello spazio rispetto ad una prefissata terna cartesiana trirettangola T di riferimento; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le componenti rispetto alla medesima terna del versore α di avanzamento della superficie mobile σ . Assegnata un'espressione di tipo locale e permanente,

$$(1) \quad a = A(x/\alpha),$$

per la velocità di avanzamento della σ e introdotte tre nuove variabili p_1, p_2, p_3 legate alle α dalle relazioni

$$(2) \quad \alpha_h = \frac{p_h}{\mathcal{S}} \quad (\mathcal{S} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}),$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1950.

(1) Qui e per ogni altro ulteriore richiamo sull'argomento cfr. SIGNORINI, *Lezioni di fisica matematica*, 1950, Ed. Veschi, Roma, Cap. II.

consideriamo la funzione

$$(3) \quad H(x/p) = \mathfrak{S} A \left(x / \frac{p}{\mathfrak{S}} \right)$$

e il sistema canonico ad essa associato

$$(H) \quad \begin{cases} \frac{dx_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \frac{dp_h}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_h} \end{cases} \quad (h = 1, 2, 3).$$

Le soluzioni di tale sistema corrispondenti a condizioni iniziali che consentano il verificarsi lungo ognuna di esse dell'uguaglianza

$$(4) \quad H(x/p) = 1$$

danno luogo in definitiva alla risoluzione del nostro problema. Il sistema (H) non è però di tipo normale per il motivo che la sua funzione caratteristica H risulta omogenea di primo grado nelle p , ma il verificarsi della (4) consente di sostituire alla considerazione del sistema (H) quella del sistema normale

$$(H') \quad \begin{cases} \frac{dx_h}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial p_h} \\ \frac{dp_h}{dt} = - \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x_h} \end{cases}$$

di funzione caratteristica $H^2/2$, omogenea di secondo grado nelle p .

Parlando, come avremo fra breve occasione di fare, di mezzi anisotropi od isotropi intenderemo alludere semplicemente alla dipendenza o meno della velocità di avanzamento dalle α .

La considerazione di certe particolari trasformazioni canoniche porta a riconoscere l'esistenza di uno stretto legame, nei riguardi del primo problema della cinematica delle superficie, fra mezzi di natura diversa, derivante in sostanza da una proprietà invariantiva del problema medesimo che ora stabiliremo.

2. CARATTERE INVARIANTIVO DEL PRIMO PROBLEMA DELLA CINEMATICA DELLE SUPERFICIE RISPETTO ALLE ORDinarie TRASFORMAZIONI OMOGENEE. - Come è noto ⁽²⁾ una trasformazione omogenea, che diremo ordinaria, del tipo

$$(5) \quad \begin{cases} x_h = x_h(\bar{x}) \\ p_h = p_h(\bar{x}/\bar{p}) \end{cases} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

tra le due coppie di ennuple di variabili x, p e \bar{x}, \bar{p} si stabilisce, quando sia assegnato comunque il legame tra le x e le \bar{x} , associando alle \bar{x} le \bar{p} date dalle relazioni

$$(6) \quad \bar{p}_h = \sum_i^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

(2) Cfr. ad esempio T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale* (Zanichelli 1927), vol. II, Parte II, Cap. X.

Queste ultime formule mettono in luce la circostanza, per quel che dovremo dire essenziale, che le \bar{p} risultano espresse in una tale trasformazione mediante combinazioni lineari omogenee delle p a coefficienti dipendenti dalle sole \bar{x} .

Prendiamo in considerazione un primo problema di cinematica delle superficie corrispondente ad una certa velocità di avanzamento $A(x/\alpha)$ e traducesi quindi in un sistema canonico normale di funzione caratteristica

$$\frac{H^2}{2}(x/p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) A^2\left(x/\frac{p}{s}\right).$$

Il sistema canonico e normale che si ottiene da questo attraverso una trasformazione del tipo (5) corrisponde ad una funzione caratteristica $\bar{H}^2(\bar{x}/\bar{p})/2$ che è, al pari della H da cui proviene, indipendente dal tempo esplicito e, in virtù delle (6), omogenea di 2° grado nelle \bar{p} : tale quindi da potersi considerare come la funzione hamiltoniana associata ad un nuovo problema di cinematica delle superficie. Si tratterà precisamente del problema che corrisponde alla velocità di avanzamento

$$(7) \quad \bar{A} = \bar{H}(\bar{x}/\bar{\alpha}),$$

ove $\bar{H}(\bar{x}/\bar{\alpha})$ è ciò che diviene la funzione hamiltoniana trasformata quando in essa materialmente si sostituiscano le $\bar{\alpha}$ alle \bar{p} .

Risolto che sia il problema di partenza lo è anche automaticamente il trasformato: le equazioni dei raggi e quella della superficie d'onda relative al secondo caso si ottengono da quelle relative al primo attraverso la semplice materiale applicazione della trasformazione. Anzi, stante la forma dell'integrale generale di un sistema canonico, sia per i raggi sia per la superficie d'onda, le uniche relazioni che intervengono effettivamente sono quelle che legano le x alle \bar{x} ,

$$x_h = x_h(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad (h = 1, 2, 3).$$

3. PASSAGGIO DALL'ISOTROPIA ALL'ANISOTROPIA. — Di particolare interesse si presenta il caso che il problema di partenza sia quello relativo ad un mezzo isotropo

$$a = A(x) \quad , \quad \frac{H^2}{2}(x/p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) A^2(x).$$

Nel problema trasformato la funzione hamiltoniana $\bar{H}^2/2$ viene a presentarsi come il prodotto di una funzione delle sole \bar{x} , la trasformata della $A^2(x)$, per una forma quadratica nelle \bar{p} a coefficienti dipendenti dalle \bar{x} e generalmente non tutti uguali fra loro, sicchè si viene ad avere per la velocità di avanzamento un'espressione dipendente oltre che dalle \bar{x} anche dalle $\bar{\alpha}$ e attinente quindi ad un mezzo anisotropo.

Tale osservazione, riducendo per così dire — almeno sotto l'aspetto indicato — un mezzo anisotropo ad uno isotropo, può forse essere utilizzata in varie direzioni.

Qui mi limiterò a dare due semplici esempi di trasformazione di un problema anisotropo in uno isotropo mediante una altrettanto semplice ma efficace trasformazione omogenea, cioè mediante una affinità. Di essi il primo specialmente sembra non privo di un certo interesse corrispondendo ad una espressiva generalizzazione di ciò che si ha nell'ottica dei mezzi cristallini uniassici.

4. UN PRIMO SEMPLICE ESEMPIO DI TRASFORMAZIONE DI UN PROBLEMA ANISOTROPO IN UNO ISOTROPO. — Consideriamo un mezzo anisotropo in cui il quadrato della velocità di avanzamento sia dato da un'espressione del tipo ⁽³⁾

$$(8) \quad A^2 = x_3^2 \sum_h^3 A_h^2 \alpha_h^2$$

con le A_h tutte e tre costanti, e quindi la funzione hamiltoniana associata al problema risulti espressa da

$$(9) \quad \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2} x_3^2 \sum_h^3 A_h^2 p_h^2.$$

L'affinità

$$(10) \quad x_h = A_h \bar{x}_h \quad (h = 1, 2, 3)$$

specifica le (6) nelle

$$(11) \quad \bar{p}_h = A_h p_h \quad (h = 1, 2, 3):$$

le (10) e (11) riducono la funzione hamiltoniana data dalla (9) alla forma

$$\frac{\bar{H}^2}{2} = \frac{1}{2} A_3^2 \bar{x}_3^2 \sum_h^3 \bar{p}_h^2,$$

e il problema trasformato viene di conseguenza a presentarsi come quello relativo al mezzo isotropo caratterizzato da una velocità di avanzamento

$$(12) \quad \bar{a} = A_3 \bar{x}_3.$$

In un tal mezzo come è noto ⁽⁴⁾ tutti i raggi sono circolari e ogni fronte d'onda epicentrale è sferico. Precisamente la superficie d'onda sferica relativa all'istante generico t ha equazione

$$(13) \quad \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + (\bar{x}_3 - \bar{x}_{3,0} c h A_3 t)^2 = \bar{x}_{3,0}^2 s h^2 A_3 t,$$

ove con $\bar{x}_{3,0}$ si è indicato il valore iniziale di \bar{x}_3 . Basta trasformare la (13) mediante le (10) per ottenere l'equazione del fronte d'onda relativo al medesimo istante nel corrispondente mezzo anisotropo:

$$\frac{x_1^2}{A_1^2} + \frac{x_2^2}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} (x_3 - x_{3,0} c h A_3 t)^2 = \frac{x_{3,0}^2}{A_3^2} s h^2 A_3 t.$$

(3) In questo e nel successivo esempio le lettere senza soprassetto indicano elementi relativi al mezzo anisotropo; quelle col soprassetto elementi relativi al mezzo isotropo corrispondente.

(4) Cfr. A. SIGNORINI, loc. cit., Cap. III, nn. 6 e 14.

La circostanza che l'insieme delle successive configurazioni dei fronti d'onda nel mezzo anisotropo caratterizzato dalla (8) risulti costituito da una famiglia di ellissoidi (a tre assi se A_1, A_2, A_3 sono diversi fra loro) induce in particolare ad osservare che, come non è necessario che un mezzo isotropo sia anche omogeneo perchè ogni fronte d'onda epicentrale risulti sferico, così non è necessario che un mezzo anisotropo sia omogeneo perchè ogni fronte d'onda epicentrale risulti ellissoidico⁽⁵⁾.

In modo del tutto analogo, e sempre solo mediante le (10), si trasformano pure le equazioni dei raggi, ciò che per brevità omettiamo. Aggiungeremo solo che, com'è naturale, nel problema anisotropo la congruenza dei raggi (ellittici) non riesce più ortogonale alla superficie d'onda.

5. UN SECONDO ESEMPIO DI TRASFORMAZIONE DI UN PROBLEMA ANISOTROPO IN UNO ISOTROPO. — Accenneremo rapidamente al cosiddetto caso (isotropo) di Maxwell, al caso cioè di un mezzo caratterizzato da una velocità di avanzamento

$$\bar{A} = h\bar{r}^2 + k,$$

ove h e k sono due costanti o ambedue positive oppure di segni tra loro opposti ed \bar{r} è la distanza del generico punto del mezzo da un punto fisso O . Anche qui ogni raggio è circolare e il generico fronte d'onda epicentrale è sferico⁽⁶⁾.

Un'affinità del tipo (10) porta alla considerazione di un mezzo anisotropo caratterizzato da una velocità di avanzamento

$$A = \left(h \sum_1^3 \frac{x_r^2}{A_r^2} + k \right) \sqrt{\sum_1^3 A_r^2 \alpha_r^2},$$

nel quale, come già nel primo esempio, la sfera che dà la configurazione del fronte d'onda all'istante generico si muta in un ellissoide, la congruenza dei raggi circolari in una ellittica, ecc.

(5) Nel mezzo anisotropo omogeneo caratterizzato da $A^2 = \sum_h A_h^2 \alpha_h^2$ il generico fronte d'onda epicentrale è un ellissoide di equazione $\sum_h \frac{x_h^2}{A_h^2 t^2} = 1$.

(6) Un approfondito esame dei vari casi possibili in corrispondenza ai diversi segni delle costanti h e k , nonchè gli elementi relativi ai fronti d'onda (centro, raggio ecc.) che qui non sto a trascrivere, si trovano nelle *Lezioni di fisica matematica*, già ripetutamente citate, al Cap. III.

Enzimologia. — *Fattori di regolazione dell'attività fosforilasica nella foglia* (*). Nota (**) di ERASMO MARRÈ e LUCIANA FELICI, presentata dal Socio U. LOMBROSO.

I. LUCE E ATTIVITÀ FOSFORILASICA. — Da nostre precedenti ricerche (Marrè⁽¹⁾, Marrè e Felici⁽²⁾) sui tuberi e sui giovani germogli di patata si veniva a delineare una relazione tra attività della fosforilasi e fase, rispettivamente, di accumulo o di demolizione delle riserve in amido: relazione che prospettava un'intensa partecipazione del fermento ai processi di sintesi. L'interesse di questo reperto ci ha suggerito di estendere le ricerche ad altri tessuti che fossero egualmente sede di un'attivo movimento delle riserve glucidiche. Materiale particolarmente adatto ci è apparsa la foglia, per il suo caratteristico ritmo di sintesi diurna e di lisi notturna dell'amido.

Come è noto alla luce, per l'attività del plastidio, gli esosi in eccesso si accumulano sotto forma di amido: domina quindi una fisionomia sintetica, alla quale nella notte, o comunque nell'oscurità, se ne sostituisce una di lisi, con la dissoluzione del polisaccaride temporaneamente depositato nei plastidi. Ci troviamo quindi in una condizione, sotto quest'aspetto, paragonabile, in una vicenda più breve e più rapida, alle due fasi antitetiche del tubero di patata, con questa differenza, che il ritmo delle trasformazioni glucidiche si svolge qui su un piano strettamente fisiologico, senza che vi si associno le profonde modificazioni tissulari caratteristiche degli organi di riserva nelle due opposte fasi di carica (crescita) e di mobilitazione (senescenza).

Le nostre esperienze si sono svolte su piante di patata in buone condizioni di vegetazione all'aperto. Per i dosaggi venivano scelte quelle foglie, tra le più giovani, che avessero raggiunto il pieno sviluppo, poichè in questa minima era apparsa la variabilità individuale del tenore in fosforilasi; per ogni determinazione il materiale veniva raccolto su diverse piante, fino a raggiungere un peso complessivo di 10 gr. Il sistema di oscuramento adottato era tale da permettere una buona aerazione, e da evitare lo stabilirsi di sensibili differenze di temperatura rispetto alle piante non oscurate.

Per la tecnica di determinazione dell'attività fosforilasica rimandiamo a una Nota precedente. Data la più complessa fisionomia enzimatica della foglia rispetto al tubero, ci siamo voluti preliminarmente accertare che i nostri dati non fossero soggetti a interferenze da parte di altri fermenti. Determinazioni della curva di demolizione del Glucosio I fosfato, usato come substrato, da parte degli estratti fogliari, altamente diluiti e in presenza di cisteina, ci hanno dimostrato l'assenza di interferenza fosfoglicomutaseica almeno durante il primo periodo della reazione, utilizzato nel dosaggio; d'altro lato esperienze in presenza di NaFl, di cui è nota

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico « Hanbury » dell'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1950.

(1) E. MARRÈ, « Atti Acc. Ligure Scienze e Lettere », 1949 (in corso di stampa).

(2) E. MARRÈ e L. FELICI, questi « Rendiconti ».

l'azione di blocco sulle fosfatasi, in particolare su quelle aspecifiche di cui è ricca la patata (Pfankuch⁽³⁾), ci consentivano di escludere un apprezzabile intervento anche di questi enzimi; ci è parso quindi giustificato estendere a questo nuovo materiale la tecnica precedentemente usata.

La ricerca è stata condotta studiando comparativamente l'attività fosforilasica su foglie rispettivamente in luce o mantenute, per vario tempo, all'oscurità.

I primi dati ottenuti ci hanno subito dimostrato una profonda differenza nel comportamento del nostro enzima nelle due diverse condizioni, le foglie illuminate presentando sempre valori fosforilasici molto più alti, fino a oltre il doppio, di quelli delle foglie oscurate. Quindi, tenendo conto della opposta facies glucidica, dominante, come sopra accennato, nei due casi, l'andamento nella foglia appare, già da questo dato, perfettamente in accordo con quello del tubero: alto tenore fosforilasico nella fase sintetica, relativamente basso in quella litica.

Questi primi risultati ci hanno indotto a seguire più sistematicamente l'andamento dei valori dell'enzima nel passaggio dall'oscurità della notte alle fasi successive della giornata. A tal fine abbiamo ripreso le esperienze determinando sistematicamente il tenore in fosforilasi nelle varie ore della giornata, partendo dalla mattina, all'alba, e proseguendo a intervalli successivi su foglie normalmente illuminate, fino al tramonto, tenendo come confronto altre foglie, di eguale età, mantenute però al buio per tempi corrispondenti.

Riportiamo in tabella e nel grafico i risultati ottenuti.

TABELLA I.

Patate della varietà «Torrighia». Foglie in condizioni di normale illuminazione e foglie oscurate all'alba. Giornata luminosa. (Aprile 1949).

Composizione dell'incubato: tessuto 1%, Gl. I.P. 0,6%, Amido sol. 0,4%, tampone al citrato pH 6,2 20%, cisteina, conc. finale 0,03 M.

| ORA DEL GIORNO | Attività fosforilasica espressa dai mg. di P liberati da 10 gr. di tessuto fresco in 20' a 30 gradi C. | |
|--------------------------|--|-----------------|
| | Foglie illuminate normalmente | Foglie oscurate |
| Ore 6 (semioscurità) . . | 7,1 | 7,3 |
| Ore 9 | 9,1 | 6,4 |
| Ore 12 | 8,4 | 5,6 |
| Ore 18 | 8,1 | 5 |

In conformità con il dato precedente i valori di partenza, in tutte le foglie provenienti dal buio della notte, sono notevolmente bassi - dello stesso ordine di grandezza di quelli già ottenuti per le foglie oscurate -. Da questa base iniziale

(3) E. PFANKUCH, «H. Seylers Zeit. Phys. Ch.», 241, p. 34 (1936).

comune, le due curve nettamente divergono per i due gruppi di foglie: in quelle esposte normalmente alla luce del giorno l'attività fosforilasica rapidamente sale, raggiungendo il massimo già dopo tre ore dal levar del sole, e mantenendosi a un livello pressochè costante fino a sera; mentre nelle foglie oscurate il fermento subisce una lenta, ma continua e progressiva diminuzione di attività per tutta la durata del giorno. In questa antitesi del comportamento enzimatico sembra rispecchiarsi l'antitetica facies del movimento dell'amido nei due gruppi di foglie: esso infatti, quasi assente all'alba, compare abbondante già dopo poche ore di esposizione alla luce solare, indice dell'intensa attività fotosintetica, mentre alla sera è totalmente assente nelle foglie oscurate.

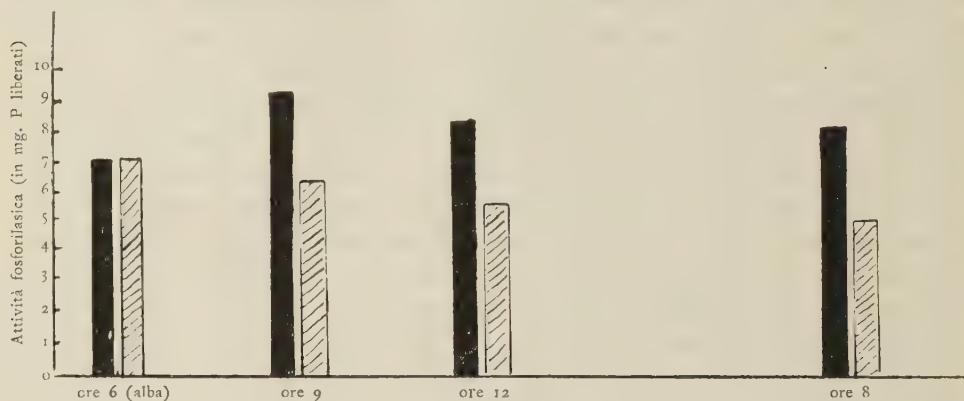


Fig. 1. - Andamento dell'attività fosforilasica in foglie rispettivamente normalmente illuminate (colonne piene) e in foglie oscurate all'alba (colonne tratteggiate), durante la giornata.

Complessivamente quindi questi primi dati sulle foglie ripetono, in piena concordanza con quelli precedenti sul tubero e sui germogli, pur in stati funzionali e in tipi di tessuti completamente diversi, il parallelismo tra massimo dell'attività fosforilasica e fase di sintesi da un lato, decadere della fosforilasi e fase di lisi dell'amido, dall'altro; parallelismo da cui sembra sempre meglio delinearsi un ruolo preferenzialmente sintetico della fosforilasi nella pianta.

D'altro lato questa corrispondenza tra l'accumulo diurno dell'amido nei plastidi e l'attivazione di un'enzima, che appare destinato a condizionarne la sintesi, ci dimostra come un tale accumulo non possa esaurientemente giustificarsi attraverso un meccanismo puramente chimico di spostamento dell'equilibrio glucidico, determinato dall'aumento diurno degli zuccheri prodotti dalla fotosintesi; ma debba considerarsi fondato su di un ben più delicato e sensibile sistema di regolazione enzimatica, che a sua volta si adatta alle opposte esigenze funzionali del tessuto, attivamente sequestrando, durante il giorno, gli zuccheri, in una forma, come l'amido, osmoticamente e chimicamente inerte, e rimettendoli in circolo, per un rapido sgombero e per le esigenze generali della pianta, la notte.

2. AZIONE DEL TENORE IN ZUCCHERI SULL'ATTIVITÀ FOSFORILASICA NELLA FOGLIA. - Come sopra si è visto, la luce agisce sull'attività fosforilasica dei tessuti fogliari esaltandone rapidamente e fortemente i valori. Nasce ora il problema del

meccanismo di azione: intervento diretto della luce sul sistema enzimatico, o indiretto, tramite altri fattori, subordinati alla luce e capaci a loro volta di agire sul fermento? In questa seconda ipotesi il pensiero ricorre, come prima possibilità, all'idea di un effetto attivante da parte di prodotti solubili della fotosintesi, in particolare dei glucidi, accumulanti in quello stesso plastidio dove sembra (Yin e Tung⁽⁴⁾) doversi localizzare il fermento in questione.

Abbiamo quindi avviato una nuova serie di ricerche partendo dal presupposto che se agli zuccheri spetta l'azione attivante sulla fosforilasi, dovrebbe essere possibile sostituire con essi l'effetto rilevato per la luce.

A questo scopo foglie recise di patata, rigorosamente selezionate, venivano poste a pescare con il picciuolo in soluzioni di saccarosio, accanto ad altre di controllo in acqua pura, e le une e le altre mantenute al buio. Dopo un periodo di tempo variabile da 12 a 24 ore si procedeva, con la solita tecnica, alla determinazione dell'attività fosforilasica. La scelta del saccarosio, anziché di altri glucidi solubili, è stata suggerita dal fatto che, secondo gli esiti di nostre determinazioni, nella foglia di patata su di esso assai più che sugli zuccheri riduttori incidono le variazioni quantitative dovute al passaggio dalla luce all'oscurità⁽⁵⁾.

Nell'eventualità di una componente osmotica nell'azione del saccarosio, ai controlli in acqua pura abbiamo affiancato una serie di controlli in liquido di Shive⁽⁶⁾ isotonico con la soluzione glucidica impiegata.

TABELLA II.

Piante di patata, varietà «Torriglia». Foglie recise alle 7, portate a pescare in acqua col picciuolo, o, rispettivamente, in soluzione zuccherina o di Shive. Dosaggio dopo 12 ore. (Aprile 1949).

Composizione dell'incubato: tessuto 1% Gl. I P 0,6%, amido sol. 0,4%. Tampone al citrato pH 6,2 20%, cisteina 0,03 M. Temperatura 30 gradi C.

| SOLUZIONE | Attività fosforilasica espressa dai mg. di P liberati in 20' da 10 gr. di tessuto fresco |
|--|--|
| I) Saccarosio 2% | 11,5 |
| II) Acqua di fonte | 7 |
| III) Sol. di Shive isotonica a I | 7,3 |
| IV) Saccarosio 2% in Shive isotonica | 10,6 |

Come emerge dai dati riassunti nella tabella II ritroviamo al buio, con saccarosio, uno spiccato effetto attivante sulla fosforilasi, dello stesso ordine di

(4) H. C. YIN and Y. T. TUNG, «Science», 108, p. 87 (1948).

(5) Di fatto l'analisi quantitativa di foglie di patata normalmente illuminate e di altre tenute all'oscurità per 20 ore dà: nelle oscurate, una riduzione del 70% per il saccarosio, di fronte a una del 7%, per i riduttori.

(6) E. C. MILLER, *Plant Physiology*, Mc Graw-Hill, New York.

grandezza di quello osservato per la luce. Effetto il cui carattere di specificità emerge dalla inerzia del fermento nelle foglie in soluzione di Shive, il che ci permette sia di escludere il dubbio sopra prospettato di una eventuale componente osmotica, sia di considerare indifferenti, almeno ai fini della fosforilasi, gli ioni salini che intervengono nella nutrizione minerale della foglia.

In una ulteriore serie di esperienze siamo passati a esaminare gli effetti del saccarosio in funzione della concentrazione.

Riportiamo i risultati di una serie di esperienze nella tabella III.

TABELLA III.

Materiale e condizioni di esperienza come alla tabella II. Permanenza delle foglie in acqua o sol. zuccherina: 24 ore.

| SOLUZIONE USATA | Attività fosforilastica in mg. P/10 gr./20' |
|----------------------------|--|
| Acqua di fonte | 3,05 |
| Saccarosio 0,5 ‰ | 3,5 |
| Saccarosio 1 ‰ | 4,3 |
| Saccarosio 2 ‰ | 7 |
| Saccarosio 3 ‰ | 7,3 |
| Saccarosio 4 ‰ | 8,7 |
| Saccarosio 5 ‰ | 9,8 |

Dai dati risulta, nell'ambito da noi sperimentato, cioè fino al 5 ‰, una singolare proporzionalità tra concentrazione in zucchero e attività del fermento.

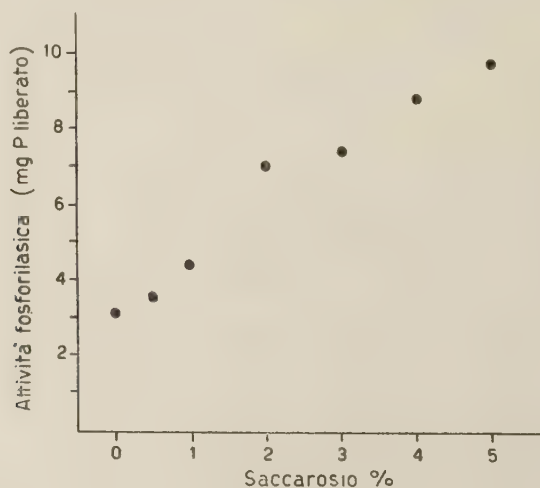


Fig. 2. - Attività fosforilastica in foglie recise in funzione della concentrazione in saccarosio della soluzione in cui pescano.

Dal complesso di questi dati emerge, ai fini della fisiologia della foglia, un punto di particolare interesse: a conclusione della prima parte di questa Nota abbiamo detto come l'attivazione della fosforilasi da parte della luce spostasse il problema dell'accumulo diurno e delle lisi notturna dal piano di un semplice equilibrio chimico a quello di un ben più complesso e suggestivo meccanismo di regolazione enzimatica; ora questi ultimi dati, che sembrano risolvere, almeno in parte, l'azione della luce in quella dei glucidi per essa accumulanti nella foglia, dimostrano come questa regolazione sia, a sua volta, messa in moto da quelle stesse materie (glucidi solubili) di fronte alle quali essa interviene come meccanismo di difesa cellulare.

Lateralmente alle considerazioni sopra espresse, dalla presente ricerca scaturisce anche una possibilità di interpretazione per quegli effetti di ritardo o di blocco esplicati dalle soluzioni zuccherine sulla lisi dell'amido in cultura di organi (Bausor⁽⁷⁾), in quanto dette soluzioni è probabile agiscano, oltre che per l'apporto di materiale respiratorio, anche, e talora essenzialmente, attivando quel sistema fosforilasico di cui abbiamo già in altre ricerche sottolineato la probabile preferenziale partecipazione ai processi di sintesi, in contrasto alla funzione essenzialmente litica dei fermenti del complesso amilasico⁽⁸⁾.

Fisiologia. — *L'influenza della temperatura sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di «Rana esculenta»* (*). Nota (**) di VITTORIO CAPRARO, presentata dal Corrisp. R. MARGARIA.

Dalla letteratura appare che la velocità del passaggio dell'acqua in forza di un gradiente osmotico, in molti substrati viventi, si modifica con la temperatura secondo coefficienti termici elevati, aventi valori compresi tra 2 e 3 e quindi tipici di processi chimici. (Van Risselberghe⁽¹⁾; Lucké e Mac Cutcheon⁽²⁾; Kitching⁽³⁾; Adolph⁽⁴⁾).

Fanno eccezione, a questo riguardo, le membrane dei globuli rossi di Mammiferi ed Uccelli; qui presumibilmente il passaggio dell'acqua obbedisce a coefficienti termici vicini all'unità e quindi propri di processi di diffusione (Jakobs⁽⁵⁾).

Gli elevati coefficienti termici non possono essere spiegati tenendo conto della variazione della velocità di passaggio dell'acqua attraverso spazi capillari per

(7) S. C. BAUSOR, «Bot. Gaz.», 104, p. 115 (1942).

(8) Concetto esposto, in base a questi ed altri dati, in una comunicazione dell'Autore al III Congresso della Soc. Italiana di Fisiologia (Siena 1° ottobre 1949).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1950.

(1) VAN RISSELBERGHE, cit. da R. HOEGER, «Phys. Chemie der Zelle u. der Gewebe», Lipsia 1926.

(2) B. LUCKÉ e M. MAC CUTCHEON, «Physiol. Rev.», 12, 68 (1932).

(3) J. A. KITCHING, «Nature», 162, 149 (1948).

(4) E. F. ADOLPH, «Proc. of the Soc. f. exp. Biol. a Med.», 22, 556 (1930); idem, «Am. J. Physiol.», 96, 569 e 587 (1931).

(5) M. H. JAKOBS, «Erg. d. Biol.», 7, 1 (1931).

effetto della variazione della viscosità dell'acqua in rapporto alla temperatura (Lucké e Mac Cutcheon, loc. cit.).

Si deve pensare quindi a dei fenomeni chimici che modificano la velocità del passaggio dell'acqua attraverso i substrati biologici. L'influenza dei processi chimici sulla velocità del passaggio dell'acqua è presumibilmente di natura indiretta.

In questo lavoro vengono esposti i dati raccolti sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di *Rana esculenta*, nell'animale integro, nell'animale con circo-

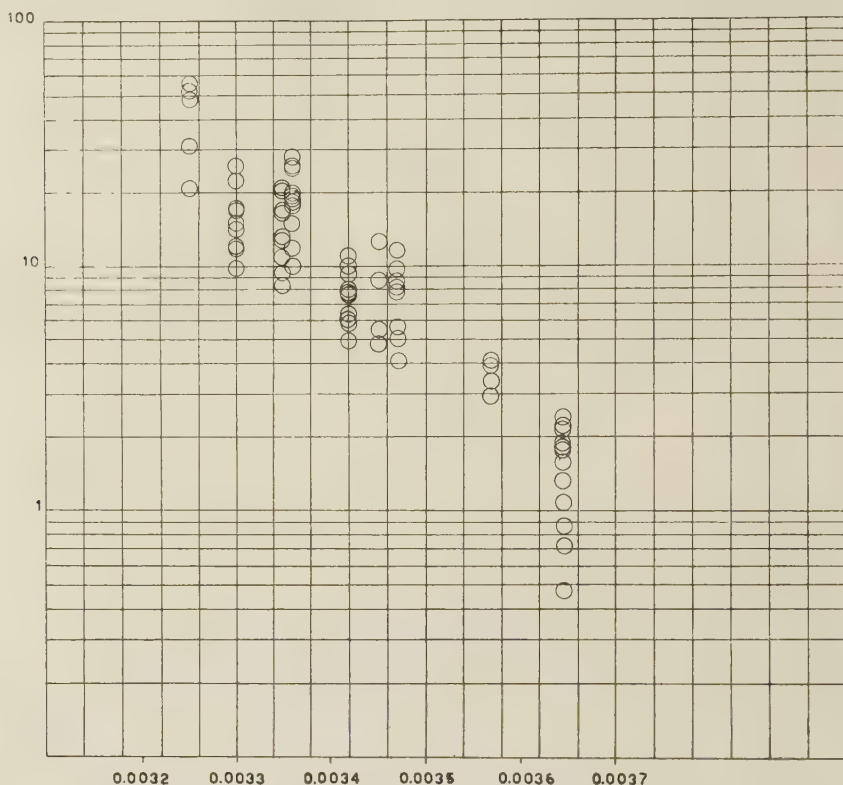


Fig. 1. - Passaggio di acqua nella Rana integra: sulle ascisse il reciproco della temperatura assoluta; sulle ordinate in scala logaritmica peso in g dell'acqua passata per ora diviso per il peso dell'animale innalzato a $2/3$, e moltiplicato per 100.

lazione bloccata, nella cute isolata dell'animale, tra 0° e 45° C di temperatura. Nello stesso intervallo di temperatura è stato misurato anche il metabolismo (consumo di ossigeno) della cute isolata. Gli animali da esperimento erano tenuti in cattività e a digiuno a temperatura ambiente ($15-25^{\circ}$ C). Il passaggio dell'acqua è stato determinato misurando l'aumento di peso subito dall'animale a cloaca legata immerso per 2 ore in acqua di fonte a temperatura costante.

Con questa stessa tecnica è stato determinato il passaggio di acqua in animali con il tronco arterioso legato, in modo da impedire la circolazione.

Il passaggio dell'acqua attraverso la cute di Rana è stato determinato mettendo, al posto della membrana, la cute del dorso, appena tolta dall'animale, su un osmometro di dimensioni adatte, in cui venivano introdotti 2 ml di liquido di

Ringer + 0,1 % di NaHCO_3 , e misurando l'aumento di peso subito dall'osmometro dopo 2 ore d'immersione in acqua di fonte a temperatura costante; per impedire l'evaporazione dell'acqua, soprattutto alle elevate temperature l'osmometro era sormontato in alto da un capillare di 0,4 mm di diametro.

Il metabolismo della cute dorsale di Rana è stato misurato con un microrespirometro tipo Stefanelli (Capraro ⁽⁶⁾), entro le prime due ore dall'uccisione dell'animale.

Nella Rana integra il passaggio di acqua attraverso la cute per unità di tempo e di superficie, da 0° a 35° C, segue la legge di Arrhenius, cioè il log

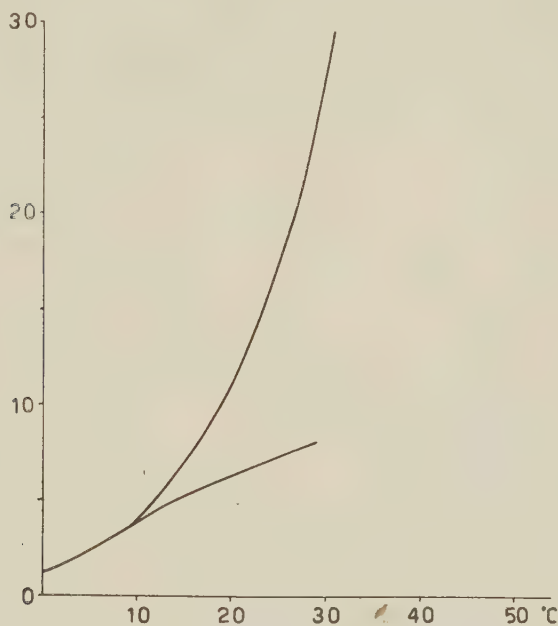


Fig. 2. - Confronto fra il passaggio di acqua nella Rana integra (grafico superiore) e nella Rana con circolo bloccato (grafico inferiore); sulle ascisse temperatura in gradi C; sulle ordinate peso, in g dell'acqua passata per ora diviso per il peso dell'animale innalzato a $2/3$, e moltiplicato per 100.

della quantità di acqua che passa nell'unità di tempo e di superficie diminuisce con l'aumentare del reciproco della temperatura assoluta, secondo una funzione lineare (Fig. 1). Il Q_{10} di questo fenomeno risulta essere in media intorno a 2,7, cioè un valore tipico di processi chimici.

Non è stato possibile seguire il passaggio dell'acqua per valori di temperatura superiori a 35° C perchè a tali valori di temperatura gli animali morivano in poco tempo.

Nella Rana senza circolazione il passaggio di acqua per unità di tempo e di superficie ha valori simili a quelli delle Rane integre a temperature comprese tra 0° e 10-15° C e quindi dei Q_{10} dello stesso ordine di grandezza (Fig. 2); invece

(6) V. CAPRARO, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 25, 693 (1949).

i coefficienti termici per temperature superiori tendono a diminuire. Questo comportamento forse si può interpretare ammettendo che la sola diffusione non sia sufficiente a mantenere costante il gradiente osmotico; questo si abbassa quando l'acqua entra con velocità superiore ad un certo limite, se un aumento adeguato della portata circolatoria non interviene a drenare continuamente la superficie interna della cute.

Il passaggio dell'acqua attraverso la cute isolata di Rana, per unità di tempo e di superficie, aumenta con l'aumentare della temperatura secondo coefficienti che vanno rapidamente decrescendo fino a circa 35°C analogamente a quanto succede nelle Rane a circolo bloccato; superata quest'ultima temperatura si assiste ad una caduta nell'entità del passaggio dell'acqua fino a valori nulli (Fig. 3). Si può forse invocare, anche in questo caso, come spiegazione al diminuire dei coefficienti

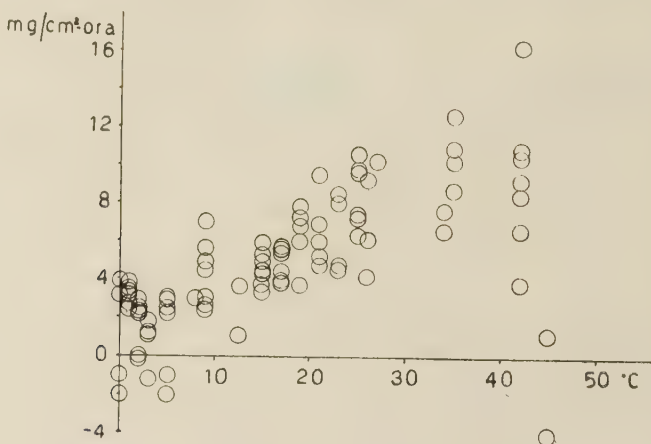


Fig. 3. - Passaggio di acqua nella cute isolata di Rana.

termici con l'elevarsi della temperatura, l'insufficienza del drenaggio dell'acqua, mancando la circolazione del corion e del sottocutaneo. Invece i coefficienti termici inferiori ad 1 che si hanno a temperature superiori a 35°C sono dovuti verosimilmente al fatto che intervengono dei processi di denaturazione da calore che modificano completamente la resistenza alla diffusione dell'acqua; questo modo di vedere è confermato anche da analogo comportamento del metabolismo della cute di Rana (vedi poi).

L'entità assoluta del passaggio idrico attraverso la cute isolata del dorso è sempre notevolmente inferiore a quella della Rana integra. Per una Rana di 15 g, secondo i dati di Terroine e Delpech⁽⁷⁾ si può calcolare una superficie di circa 60 cm^2 ; animali di questo peso, secondo i nostri dati, alla temperatura di 15°C , assorbono circa 0,442 g per ora e quindi 7,3 mg per cm^2 e per ora; questo valore è notevolmente superiore a quello che si osserva in media nelle stesse condizioni con la cute isolata. Ciò può essere dovuto alle modificazioni a cui va incontro la pelle di Rana quando viene a mancare il collegamento anatomico e funzionale

(7) F. TERROINE e G. DELPECH, « Ann. de Physiol. et Physico-chim. biol. », 7, 341 (1931).

con il rimanente dell'organismo e al fatto che l'entità del passaggio di acqua può essere superiore in altri distretti a quella della cute del dorso da noi presa in considerazione. A conferma di quest'ultima supposizione, è stato constatato che la pelle del ventre ha una permeabilità nettamente superiore a quella del dorso; in un gruppo di 5 esperimenti eseguiti a 27°C la cute del dorso ha dato un valore di passaggio di acqua di $7,65 \text{ mg} \pm 1,38/\text{ora-cm}^2$; mentre in un altro gruppo di 5 esperimenti eseguiti contemporaneamente nelle stesse condizioni con la pelle del ventre si è ottenuto un valore di $16,65 \text{ mg} \pm 6,14/\text{ora-cm}^2$; la differenza è di $9,00 \text{ mg} \pm 2,81$.

Lo studio del consumo di ossigeno della cute isolata del dorso mette in evidenza dei coefficienti termici elevati tra 0°C e 30°C ($Q_{10} = 2,7$) come per il

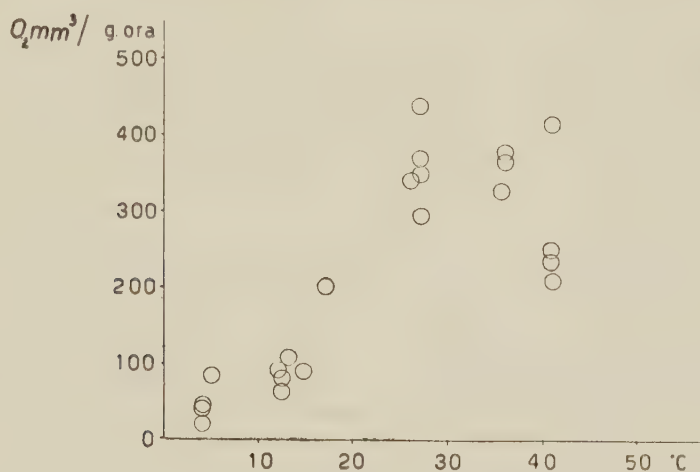


Fig. 4. - Consumo di ossigeno della cute isolata. L'ossigeno è espresso in mm^3 per ora e per g di tessuto fresco.

passaggio di acqua attraverso la cute di Rana integra; per temperature superiori i coefficienti termici diminuiscono e diventano inferiori all'unità dopo i 35°C di temperatura (Fig. 4). Tali risultati confermano sul materiale da me usato le osservazioni già fatte da altri Autori (O' Connor⁽⁸⁾).

Il comportamento del metabolismo alle temperature elevate si deve presumibilmente ascrivere all'intervento di processi distruttivi ad opera del calore sui sistemi chimici delle cellule; è interessante notare come si abbia un comportamento parallelo del passaggio di acqua; ciò sottolinea ancora una volta la stretta dipendenza tra metabolismo e passaggio dell'acqua attraverso la cute di Rana.

In conclusione si può affermare:

1° Il passaggio attraverso la cute di Rana integra dell'acqua, per unità di tempo e di superficie, tra 0°C e 35°C segue la legge di Arrhenius, con coefficienti termici, in media, del valore di 2,7 (Q_{10}).

2° Tali coefficienti elevati sono una proprietà intrinseca della cute perchè si riscontrano anche nelle Rane con circolo bloccato e con la cute isolata, a

(8) J. M. O' CONNOR, «Proc. of the Royal Irish Ac.», 51, Sec. B, 211 (1947).

temperature comprese tra 0° e 10°C ; i coefficienti inferiori che si ottengono in tali condizioni a temperature superiori, sono forse da ascriversi alla diminuzione del gradiente osmotico per l'insufficiente drenaggio della superficie interna dell'epitelio, mancando la circolazione.

3° Il metabolismo della cute isolata aumenta pure con la temperatura secondo coefficienti termici dello stesso ordine di grandezza; ciò fa pensare ad una interdipendenza (indiretta) tra processi chimici e passaggio dell'acqua.

4° Conferma questo modo di vedere il fatto che per temperature superiori a 35°C il metabolismo diminuisce e con esso anche il passaggio di acqua attraverso la cute isolata.

Fisiologia umana. — *Prime osservazioni sugli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica del cane*^(*). Nota^(**) di G. LIVREA, L. CAMPANELLI, U. GAGLIARDUCCI, G. VIRGILLO^(***), presentata dal Corrisp. G. AMANTEA.

Le prime segnalazioni che questo nuovo chemioterapico della tubercolosi determina talvolta disturbi gastrici e gastro-intestinali sono state fatte dallo stesso Lehmann⁽¹⁾, il quale, come è noto, per primo ha posto in rilievo *in vitro* e *in vivo*, sugli animali di laboratorio e sull'uomo, le proprietà tubercolostatiche di questa sostanza, già descritta nel 1901 da Seidel e Bittner.

Dopo di allora le segnalazioni di intolleranza gastrica e di altri disturbi digerenti si sono susseguite nelle riviste di Clinica e di Terapia ed ormai è comunemente ammesso che l'acido p-aminosalicilico (ac. p. a. s.) ed il suo sale sodico possono talvolta risultare mal tollerati, perchè, al pari del salicilato di sodio, possono determinare nell'organismo uno stato di acidosi, nel quale, per la regolazione del pH dei liquidi organici, viene stimolata la secrezione gastrica di HCl. Come tutti gli stati di acidosi, l'acidosi da ac. p. a. s. può essere eliminata o attenuata con la somministrazione contemporanea di alcali, sotto forma di bicarbonato di sodio.

Le sofferenze subiettive degli infermi, i rilievi clinici sugli stessi di disordini gastrici e di altri disordini dell'apparato digerente, il criterio *ex adjuvantibus* della terapia alcalinizzante, costituiscono indubbiamente degli argomenti di notevole interesse in appoggio dell'acidosi da ac. p. a. s. e bisogna riconoscere pure che, sulla base dell'acidosi, è possibile una sistemazione convincente dei problemi di fisiopatologia digestiva sollevati dalla somministrazione dell'ac. p. a. s.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1950.

(***) Il piano delle ricerche, l'elaborazione dei risultati e la stesura della nota appartiene al prof. G. Livrea, la preparazione del piccolo stomaco è dovuta al dr. L. Campanelli e al prof. G. Livrea, le osservazioni sulla secrezione gastrica e sul succo gastrico sono state eseguite in collaborazione [G. Amantea].

(1) J. LEHMANN, «Svenska Läkartidningen», 43, 2029 (1946).

Malgrado ciò, noi siamo del parere che non sarebbe inopportuno approfondire le nostre conoscenze circa le anormali condizioni, che possono conseguire all'introduzione nell'organismo dell'ac. p. a. s., sia studiando il comportamento dei fattori fisiologici, che ingranano nel controllo dell'equilibrio acido-base, sia studiando gli effetti sui diversi organi ed apparati indotti dall'ac. p. a. s.

Bisogna riconoscere che in proposito esiste nella letteratura una vasta lacuna. Mentre non mancano i lavori sull'attività tubercolostatica, sull'assorbimento, distribuzione, eliminazione e metabolismo dell'ac. p. a. s., e mentre sono innumerevoli ormai le osservazioni cliniche sulla sua azione terapeutica nella tubercolosi, i lavori nelle direzioni da noi indicate mancano completamente. Difatti, dopo uno studio molto attento della letteratura, noi possiamo citare soltanto un lavoro di V. Capraro e di V. Barilli⁽²⁾, uno di A. Varveri⁽³⁾ ed uno di A. Ruotolo e A. Varveri⁽⁴⁾. Anche Capraro e Barilli segnalano la mancanza di « indicazioni più precise sull'eventuale compromissione funzionale degli organi ed apparati di maggiore interesse », il loro « scopo principale, però, è stato quello di scoprire eventuali deficienze epatiche e gastro-intestinali sotto l'azione continuativa dell'acido p. a. s. », e con le loro ricerche hanno dimostrato che il trattamento cronico provoca, nei ratti, con forti dosi (gr. 0,4-0,5/Kg.) un ritardo dello sviluppo corporeo ed una minore ingestione di alimenti e con dosi ancora più forti (+ di 1 g./Kg.) un modico grado di steatosi epatica. Varveri, Ruotolo e Varveri hanno dimostrato, invece, che la somministrazione dell'ac. p. a. s. determina considerevoli alterazioni nell'epitelio seminfero dei conigli puberi ed impuberi.

Per conto nostro, abbiamo cercato, per ora, di apportare qualche contributo alla conoscenza dell'azione sulla secrezione gastrica del sale sodico dell'ac. p. a. s. somministrato per bocca.

A tale scopo abbiamo studiato preventivamente per 40 giorni il comportamento della secrezione di un piccolo stomaco, isolato, di un cane di sesso maschile, giovane, ma al termine dello sviluppo, di media taglia (Kg. 8), da noi appositamente preparato con la tecnica di Pavlov modificata da Bickel, e poi abbiamo studiato per 37 giorni il comportamento della stessa secrezione sotto l'azione del sale sodico dell'ac. p. a. s. somministrato nelle modalità che saranno precisate più innanzi.

Nel corso di così numerose e lunghe osservazioni, per essere autorizzati a paragonare il lavoro secretorio dello stomaco nelle diverse condizioni sperimentali, abbiamo provveduto a circondarci sempre delle stesse condizioni di rigorosa precisione sperimentale: animale a digiuno dal giorno precedente e con senso di fame sempre notevole; somministrazione del cibo sempre intorno alla stessa ora; quantità e proporzioni relative degli alimenti sempre le stesse, come diremo tra poco, e tali da assicurare il normale mantenimento del peso dell'animale, sorveglianza del cane e raccolta del succo gastrico fatta sempre dagli allievi Gagliar-

(2) V. CAPRARO e V. BARILLI, « Il Farmaco », V, 160 (1950) (estratto).

(3) A. VARVERI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », marzo 1950. (Comunicazione dell'A. alla Sez. di Roma della Soc. It. Biol. Sper.).

(4) A. RUOTOLO e A. VARVERI, « Quad. di Anat. prat. », serie V, n. 3-4 (1950) (estratto).

ducci e Virgillo, sempre con le stesse modalità, sullo stesso apparecchio di raccolta e nello stesso ambiente.

In queste condizioni, durante lo studio preventivo del comportamento della secrezione gastrica, abbiamo potuto stabilire con precisione l'attività secretoria del piccolo stomaco sotto l'influenza di diversi e prolungati regimi alimentari. Per ultimo, ci siamo soffermati sui seguenti tre tipi di regime: *tipo A*, composto di carne di cavallo g. 100.0, latte ml. 500.0 e pane essiccato a T° ambiente g. 100.0, valore calorico calcolato = circa 800 C.; *tipo B*, composto di pastina glutinata Buitoni g. 200.0, olio Sasso ml. 10.0, sale da cucina g. 15.0, valore calorico = circa 800 C.; *tipo C*, composto di pastina glutinata Buitoni g. 100.0, olio Sasso ml. 10.0, sale da cucina g. 10.0, valore calorico = circa 400 C. Quest'ultimo tipo di dieta, poichè non era capace di assicurare il mantenimento del peso dell'animale, è stato somministrato soltanto per lo stretto periodo di tempo richiesto dagli esperimenti. Inoltre, con le diete B e C, per porci al riparo di un'eventuale carenza del complesso B, è stato somministrato del lievito di birra a giorni alterni. La somministrazione del sale sodico, in polvere, dell'ac. p. a. s. è stata fatta per bocca, mescolando la polvere con il pasto quotidiano. La dose somministrata è stata di g. 1.5 circa *pro die*, una dose, cioè, corrispondente a circa g. 0.2/Kg., la quale si sa essere terapeuticamente attiva e non tossica per i comuni mammiferi da laboratorio e per l'uomo.

Contrariamente all'uomo, al quale la dose quotidiana media (g. 14) di ac. p. a. s. viene somministrata in 4-5 volte, noi siamo stati costretti a somministrare al cane in una sola volta la dose suddetta di g. 1.5 *pro die*, proporzionalmente corrispondente alla dose quotidiana media dell'uomo.

In conseguenza di questa modalità di somministrazione, avevamo il vantaggio di una maggiore concentrazione, nel grande stomaco, del chemioterapico e di un tasso ematico dello stesso più elevato, e lo svantaggio di non poter mantenere la sostanza costantemente in circolo.

È difatti noto che (5,6), nel ratto, nel cane e nell'uomo, il sale sodico dell'ac. p. a. s. viene rapidamente e totalmente assorbito (massimo di concentrazione ematica tra il 30° e il 60° minuto) e rapidamente escreto con le urine, nelle quali, in dieci ore, si può rinvenire circa l'85 % della dose somministrata. Nell'uomo, dopo una dose singola di 4 g., il tasso è ridotto a zero in 6 ore.

In altri termini, rispetto alle condizioni della patologia umana, mentre da una parte noi potevamo meglio apprezzare la risposta dello stomaco all'azione locale e generale di un'unica forte dose del sale sodico dell'ac. p. a. s., dall'altra non potevamo apprezzare la risposta dello stomaco all'azione di ripetute somministrazioni di piccole dosi, che assicurano la costante presenza in circolo del chemioterapico.

Allo scopo di meglio analizzare l'azione del sale sodico dell'ac. p. a. s., abbiamo attuato per ogni tipo di pasto due modalità di somministrazione del chemioterapico: somministrazione discontinua a giorni alterni, per 8 giorni per i tipi di

(5) J. PARAF e coll., « C. R. Soc. Biol. », 142, 162 (1948).

(6) E. WAY e coll., « Journ. of Pharm. a. Exp. Ther. », 93, 368 (1948).

regime A e B e per 6 giorni per il tipo C, e somministrazione continua per 5 giorni per tutti e tre i tipi di regime. Complessivamente sono stati somministrati, in 37 giorni, g. 40.5 di sale sodico di ac. p. a. s., senza che l'animale presentasse nessun segno esteriore di sofferenza.

In ciascuna esperienza abbiamo seguito il tempo di latenza della secrezione, le variazioni quantitative emiorarie della stessa e le variazioni qualitative orarie del succo, mediante la determinazione del potere peptico col procedimento di Mett e il dosaggio dell'HCl libero e dell'acidità totale col metodo di Linossier.

I dati relativi a ciascuna esperienza sono stati racchiusi in tavole e curve, le quali, per ovvie ragioni di spazio, non possono essere qui riportate.

Come in tutte le osservazioni sulla secrezione gastrica, non tutte le nostre esperienze, sia senza, che con la somministrazione del sale sodico dell'ac. p. a. s., hanno avuto lo stesso preciso decorso, ma esse si rassomigliano tra loro in maniera così stretta da rappresentare una prova chiara della regolarità del lavoro ghiandolare nelle diverse condizioni sperimentali da noi prima precisate.

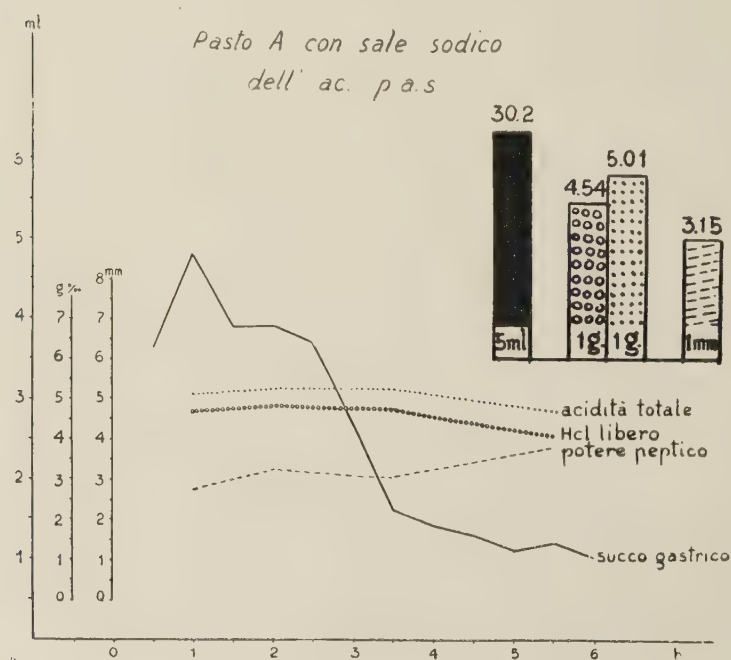
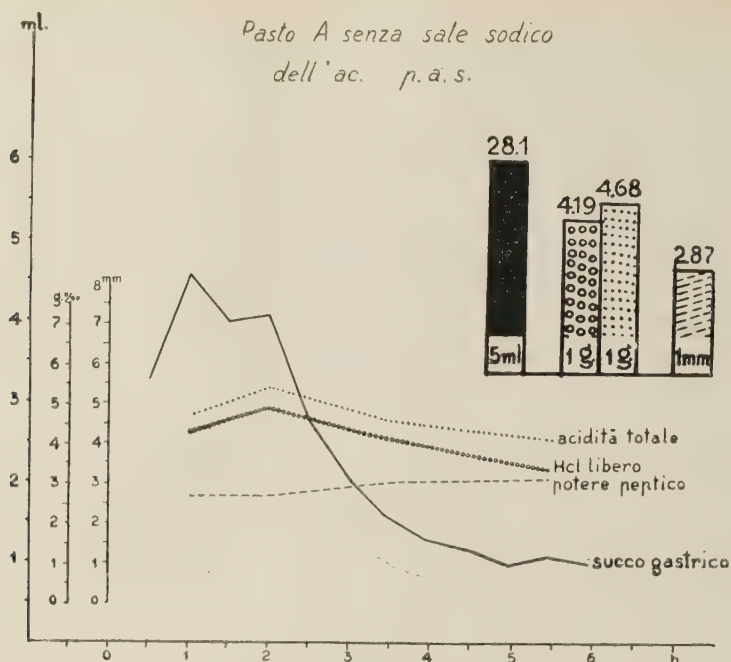
Tale regolarità balza pure dalle curve e grafici pieni, qui accanto riprodotti, riferentisi alla totalizzazione di 5 esperienze con il tipo A di regime alimentare, senza e con la somministrazione del sale sodico dell'ac. p. a. s. Nelle curve, le ascisse rappresentano il tempo per periodi di mezz'ora, e le 3 ordinate rappresentano, invece, rispettivamente la quantità di succo gastrico in ml., l'HCl libero e l'acidità totale in g. % e il potere peptico in mm.

Dal confronto di queste curve e grafici pieni, come pure dal confronto di tutte le altre, che non abbiamo potuto riportare, relative agli altri tipi di regime alimentare, senza e con somministrazione, sia discontinua che continua, del sale sodico dell'ac. p. a. s., appare che questi *non ha influenzato*: a) il tempo di latenza della secrezione, b) la proporzionalità quasi perfetta esistente tra la quantità e la qualità di alimenti ingeriti e la quantità e la qualità di succo secreto, c) l'andamento complessivo della secrezione, di una fissità quasi assoluta nelle condizioni sempre uguali di esperimento da noi su precisate; invece *ha influenzato*, ma non in modo significativo, nel senso dell'aumento: d) la quantità globale della secrezione, e) l'HCl libero e l'acidità totale, f) il potere peptico.

Questi risultati autorizzano a trarre la conclusione che, nel nostro cane, la somministrazione del sale sodico dell'ac. p. a. s., alla dose di g. 0.2/Kg., non ha avuto una ripercussione significativa sul lavoro delle ghiandole gastriche.

È questo ora un comportamento particolare del nostro cane o è un comportamento di specie? Soltanto l'estensione della ricerca ad altri cani, eventualmente anche con più elevati dosaggi di ac. p. a. s., può permettere una risposta all'interrogativo. Difatti non si può escludere che, come esistono dei soggetti umani, i quali non risentono disturbi digestivi dall'ingestione del chemioterapico, così possono esistere dei cani, che si comportano ugualmente.

Se l'estesa ricerca sui cani dovesse dimostrare che il comportamento della secrezione gastrica del nostro cane è il comportamento tipico della specie, difficilmente da tali laboriose e lunghe ricerche potremmo ricavare deduzioni valide per l'acidosi e per la fisiopatologia digestiva umana. Acquisteremmo, il che invece è qualcosa, un dato che potrebbe essere posto accanto a quelli antichi di



Curve di totalizzazione dimostranti l'andamento della secrezione gastrica (—), espresso in ml., dell'HCl libero (ooooo), e dell'acidità totale (.....), espresso in g.‰ di HCl, e del potere peptico (-----), espresso in mm., dopo somministrazione del pasto A senza sale sodico dell'ac. p. a. s. e del pasto A con sale sodico dell'ac. p. a. s.

Bickel⁽⁷⁾, Kestner e Warburg⁽⁸⁾, Goldbloom⁽⁹⁾, Petrowa e Ryss⁽¹⁰⁾ e di Wichels e coll.⁽¹¹⁾, e a quelli più recenti di Judd⁽¹²⁾ e di Roth e Ivy⁽¹³⁾, dati i quali dimostrano che, per quanto riguarda la secrezione gastrica, esistono differenze di specie, le quali non devono essere dimenticate, allorquando si riportano all'uomo i risultati ricavati da osservazioni condotte sui cani.

Infatti la caffeina, somministrata per via endovenosa o per via orale, non stimola la secrezione gastrica del cane, mentre stimola quella del gatto e dell'uomo, quasi come se il gatto e l'uomo possedessero un meccanismo di secrezione gastrica diverso da quello del cane, o come se nel cane, al contrario del gatto e dell'uomo, vi fosse un meccanismo antagonista all'effetto eccitosecretorio della caffeina (Roth e Ivy).

I nostri primi risultati circa gli effetti del sale sodico dell'ac. p. a. s. sulla secrezione gastrica del cane, vagliati alla luce delle anzidette considerazioni, indicano, dunque, l'opportunità di approfondire le ricerche sui cani e la necessità di allargare le stesse all'uomo.

A questo compito ci siamo già accinti.

(7) A. BICKEL, « Intern. Bietr. », 1, 365 (1910).

(8) O. KESTNER e B. WARBURG, « Klin. Wochenschr. », 2, 1791 (1923).

(9) A. GOLDBLOOM, « Arch. f. Verdgskrkh. », 42, 13 (1928).

(10) M. K. PETROWA e S. RYSS, « Arch. f. Verdgskrkh. », 47, 328 (1930).

(11) P. WICHELS e coll., « Ztschr. Klin. Med. », 123, 325 (1933).

(12) E. S. JUDD, « Bull. Am. Col. of. Surg. », 28, 46 (1943).

(13) J. A. ROTH e A. C. IVY, « Am. Journ. of Phys. », 141, 454 (1944).

D. DE BLASI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 novembre 1950

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Congressi internazionali. — *Relazioni* (*) *sulla conferenza per l'Unione Matematica Internazionale e sul Congresso Internazionale dei Matematici* del Socio ENRICO BOMPIANI.

I. CONFERENZA PER L'UNIONE MATEMATICA INTERNAZIONALE.

La Conferenza per l'Unione Matematica Internazionale è stata preparata da un Comitato Direttivo (Steering Committee) in cui erano rappresentate le seguenti Nazioni: Danimarca (Jessen), Francia (Brelot), Gran Bretagna (Hodge), Italia (Bompiani), Polonia (Kuratowski), Stati Uniti d'America (Stone); Segretario Kline (U. S. A.).

Alla Conferenza tenutasi in New York dal 26 al 29 agosto 1950 erano presenti, oltre ai membri dello Steering Committee (ad eccezione del Kuratowski non intervenuto) delegati delle seguenti Nazioni col numero dei voti per ciascuna di esse indicato: Argentina (1), Austria (2), Belgio (2), Brasile (1), Cuba (1), Danimarca (2), Egitto (1), Finlandia (1), Francia (3), Germania (3), Giappone (3), Gran Bretagna (3), Grecia (1), India (2), Italia (3), Jugoslavia (1), Norvegia (1), Olanda (2), Stati Uniti d'America (3), Svizzera (2), Uruguay (1). Erano pure presenti osservatori per Israel e per la Turchia.

Nelle riunioni di New York furono preparati il Regolamento e lo Statuto dell'Unione Matematica Internazionale (approvati poi dall'Assemblea generale del Congresso).

(*) Svolte nella seduta dell'11 novembre 1950.

Il Comitato direttivo, trasformatosi in Comitato esecutivo ad interim con l'aggiunta di un rappresentante dell'India (Kosambi), raccoglierà le adesioni all'Unione Matematica Internazionale e la proclamerà costituita appena avrà raccolto dieci adesioni: e passerà i suoi poteri all'Assemblea generale che sarà convocata subito dopo la costituzione dell'Unione Matematica Internazionale.

2. CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI.

Dal 30 agosto al 6 settembre 1950 si è svolto a Cambridge, Mass. (U. S. A.) un Congresso Internazionale di Matematici; animatore della preparazione di esso è stato il prof. J. R. Kline segretario dell'American Mathematical Society e segretario generale del Congresso. Presidente effettivo del Congresso è stato O. Veblen. Erano Presidenti di onore G. Castelnuovo, J. Hadamard, Ch. J. de la Vallée-Poussin, dei quali soltanto Hadamard presente.

Hanno partecipato al Congresso e ai Convegni circa 2.200 studiosi di cui circa il 10% non appartenenti agli Stati Uniti e al Canada. La partecipazione di un così cospicuo numero di matematici appartenenti ad altri continenti è stata possibile grazie alla generosità della UNESCO e ai fondi messi a disposizione da organizzazioni statunitensi, tramite l'American Mathematical Society. Occorre aggiungere che varie Università americane si sono prodigate in inviti a tenere nelle loro sedi conferenze e lezioni onde agevolare e prolungare la permanenza di matematici stranieri negli Stati Uniti.

Erano presenti matematici delle seguenti Nazioni:

Argentina, Australia, Austria, Belgio, Birmania, Brasile, Canada, Cina, Columbia, Danimarca, Egitto, Filippine, Finlandia, Francia, Germania, Giappone, Grecia, Hawai, India, Indonesia, Inghilterra, Irlanda, Irlanda del Nord, Israele, Italia, Libano, Malacca, Messico, Norvegia, Nuova Zelanda, Olanda, Panama, Perù, Portogallo, Scozia, Spagna, Stati Uniti d'America, Sudan Anglo-Egiziano, Sud Africa, Svezia, Svizzera, Turchia, Venezuela, Jugoslavia.

L'affiatamento tra i Congressisti dei vari Paesi è stato agevolato sia dall'ospitalità ad essi offerta nei dormitori della Harvard University, nei cui storici edifici si sono tenute le riunioni, sia dai piacevoli ed elevati trattenimenti di carattere sociale offerti a Cambridge, Mass. e a Boston.

Il 30 agosto il Presidente del Congresso O. Veblen ha aperto il Congresso stesso con un discorso inaugurale nel quale si è compiaciuto di constatare l'alta efficienza della matematica americana ed europea. Durante il discorso egli ha ceduto la parola ad H. Bohr per leggere, anche a nome di J. Hadamard, la relazione relativa al conferimento della Medaglia Fields ad A. Selberg per le sue ricerche di teoria dei numeri e ad L. Schwartz per le sue ricerche sulle distribuzioni.

I lavori del Congresso sono consistiti in 27 rapporti generali, 34 conferenze di algebra e teoria dei numeri, 33 di analisi, 33 di topologia e geometria e 26 di matematica applicata e di meccanica statica. A queste vanno aggiunte le comunicazioni di sezione:

Algebra e Teoria dei numeri (125); Analisi (294); Geometria e Topologia (124); Probabilità, Statistica, Scienze attuariali ed economiche (66); Fisica matematica e matematica applicata (164); Logica e filosofia (44); Storia ed Educazione (38).

Allo scopo di approfondire alcuni indirizzi di particolare importanza furono organizzati Convegni in cui riferirono, per invito, i più noti specialisti in detti indirizzi.

Le riunioni furono così distribuite: il 28 e 29 agosto alla Harvard University per la Meccanica dei fluidi, il 29 e 30 agosto alla Boston University per la Geometria differenziale, il 7 settembre alla Harvard University per le Funzioni di più variabili complesse, il 7 e l'8 settembre alla Harvard University per la Geometria algebrica, il 7-9 settembre al Bureau of Standard, Washington, D. C., per le macchine calcolatrici, l'8 e il 9 settembre alla University of Maryland per le equazioni differenziali, l'8 e il 9 settembre alla Brown University per la Plasticità.

I matematici italiani presenti al Congresso sono stati i seguenti:

L. Amerio, A. Andreotti, E. Bajada, J. Barsotti, E. Bompiani, M. Castellani, L. Cesari, F. Conforto, V. Dalla Volta, B. De Finetti, M. Dolcher, G. Fano, G. Fichera, D. Graffi, P. Lanzaò, P. Nesbeda, F. Pellegrino, M. Picone, G. Ricci, G. Sansone, B. Segre, F. Severi, A. Signorini, A. Terracini, F. Tricomi.

Erano rappresentate le seguenti Accademie e Istituti culturali:

Accademia Nazionale dei Lincei, Accademia Nazionale dei XL, Accademia delle Scienze di Bologna, Accademia delle Scienze di Napoli, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Accademia delle Scienze di Torino, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica, le Università di Bologna, Firenze, Milano, Modena, Roma, Torino e Trieste.

Ai lavori delle Sezioni hanno partecipato Bajada, Cesari, Fichera, Sansone, Tricomi (Analisi); Andreotti, Barsotti, Segre, Severi, Terracini (Geometria); Castellani, De Finetti (Probabilità e Statistica); Graffi, Signorini (Fisica Matematica); Dolcher (Logica).

Hanno tenuto conferenze per invito nei Convegni E. Bompiani (Geometria differenziale); Conforto, Segre, Severi (Geometria algebrica); Severi (Funzioni di più variabili complesse); Picone (equazioni differenziali).

Chiuso il Congresso hanno tenuto conferenze, per invito i Soci Picone (Stanford University, John Hopkins University), Sansone (Notre Dame University; Institute for Advanced Study in Princeton); Severi (Princeton University e Institute for Advanced Study); Signorini (Naval Research Laboratory in Washington e John Hopkins University).

La piena riuscita del Congresso e dei Convegni è stata evidente.

La posizione della matematica italiana al Congresso è stata degna della sua alta tradizione e la delegazione italiana ha continuato l'opera di restaurazione dell'unità scientifica nel campo internazionale già iniziata con il Congresso di Pisa del 1948 ed il Convegno di Roma del 1950.

Congressi internazionali. — *Relazione* (*) *sulle Cerimonie per il cinquantenario della scoperta del Radio* del Socio ELIGIO PERUCCA.

« Mi onoro riferire sulla mia partecipazione, quale rappresentante dell'Accademia Nazionale dei Lincei, alle Cerimonie per il cinquantenario della scoperta del radio a Parigi, in accordo con lettera n. 7364 del 25 marzo 1950 della S. V.

Sono stato a Parigi i giorni 16, 17, 18 e 19 luglio ma non mi sono trattenuto il giorno 20 perchè dedicato alla semplice chiusura dei lavori.

Le cerimonie sono consistite nella solenne seduta di inaugurazione del 5° Congresso Internazionale del Cancro, congresso presieduto dal prof. A. Lacassagne.

L'inaugurazione fu tenuta la domenica 16 luglio mattina alla Sorbonne, presenti il Presidente Auriol ed il Ministro della Sanità Pubblica.

La stessa domenica al pomeriggio, all'Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de la Ville de Paris, scuola ove professò Pierre Curie, fu tenuta la seduta d'apertura delle cerimonie sotto la presidenza del prof. Louis De Broglie, premio Nobel per la Fisica, ed in presenza delle Autorità cittadine.

In questa seduta d'apertura furono presentati i messaggi di saluto e ricordate le Accademie partecipanti alle cerimonie, indicando in particolare quelle, come i Lincei, direttamente rappresentate.

Indi si ebbe la cerimonia dello scoprimento di due lapidi commemorative: una all'entrata dell'Ecole Supérieure de Physique et Chimie a ricordo che ivi insegnò Pierre Curie e l'altra poco lontano, al n. 24 di Rue de la Glacière, ove dimoravano Pierre e Marie Curie al momento della scoperta del radio.

Il lunedì 17 luglio, in parallelo col 5° Congresso sul cancro, si sono iniziati i colloqui scientifici, preparati dallo stesso Comitato organizzatore delle Cerimonie Curie e tenutisi all'Ecole Supérieure de Physique et de Chimie già ricordata.

I colloqui organizzati presso l'Ecole Supérieure de Physique et Chimie hanno impegnato i tre giorni 17, 18 e 19 luglio e le comunicazioni presentate e discusse sono state raccolte in tre gruppi, rispettivamente di radiofisica (17 luglio), di radiochimica (18 luglio), di radiobiologia (19 luglio).

In accordo col contemporaneo 5° Congresso Internazionale del Cancro e col Congresso Radiologico Internazionale, tenutosi nei giorni successivi a Londra, i colloqui dell'Ecole Supérieure de Physique et de Chimie hanno avuto per oggetto un ristretto numero di temi puramente scientifici: quelli di radiofisica, sulla formazione e ripartizione degli ioni e gruppi eccitati che l'irraggiamento genera nei liquidi; quelli di radiochimica hanno riguardato le azioni chimiche generate dalle radiazioni delle sostanze radioattive; i colloqui di radiobiologia hanno avuto per oggetto la prevenzione e la restaurazione naturale o provocata delle radiolesioni».

(*) Svolta nella seduta dell'11 novembre 1950.

Congressi internazionali. — *Relazione*^(*) *sul Congresso Internazionale di Scienze Preistoriche e Protostoriche* del Socio SERGIO SERGI.

Dal 15 al 19 agosto ha avuto luogo a Zurigo il Congresso internazionale di Scienze preistoriche e protostoriche, il primo dopo 14 anni di interruzione da quello di Oslo del 1936.

L'Accademia dei Lincei era rappresentata da me, per la Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali e dal Collega Funaioli per la Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Il Congresso presieduto dal prof. E. Vogt, direttore del museo nazionale di Zurigo, fu tenuto alla Scuola Politecnica federale con la partecipazione di circa 300 studiosi di ogni continente fra cui 14 italiani. Furono trattati in poco più di 100 comunicazioni i più diversi argomenti divisi nelle sezioni riguardanti il paleolitico, il mesolitico, il neolitico, l'età del bronzo e della più tarda età delle invasioni, oltre la sezione di ordine generale per il complesso delle scienze preistoriche. Tre adunanze plenarie furono dedicate alla storia delle più antiche civiltà della Svizzera: la prima « Sul posto della Svizzera nelle civiltà paleolitiche » (Sauter di Ginevra), la seconda « Sui problemi del neolitico e dell'età del bronzo nella Svizzera » (Vogt di Zurigo), la terza « Sui Romani e Germani nella Svizzera al tempo delle invasioni » (Laur-Belart di Basilea).

Gli italiani presentarono 11 comunicazioni per le quali intervennero a tutte le sezioni con contributi originali relativi alle nuove scoperte dell'ultimo decennio in Italia quali: il rinvenimento del cranio di Quinzano presso Verona (Battaglia), la geocronologia dei giacimenti di Saccopastore e del Monte Circeo (A. C. Blanc), l'uomo del Paleolitico superiore della grotta delle Arene Candide presso Finale Ligure (Sergi), le incisioni naturalistiche paleolitiche dell'Isola di Pollenza (Graziosi), l'impiego del corallo nella preistoria (Tescione), l'origine della civiltà villanoviana (Laviosa Zambotti), l'origine dei più antichi italici (Barocelli), la statura delle antiche popolazioni italiane (Manfrin).

Di particolare interesse furono le escursioni nelle stazioni preistoriche le più importanti delle Alpi, del Sentis e del Giura, a dimostrare quanto sia antico il popolamento della Svizzera, che a partire dalla più remota età paleolitica si è seguito ininterrottamente attraverso tutte le civiltà preistoriche e protostoriche che hanno interessato l'Europa.

(*) Svolta nella seduta dell'11 novembre 1950.

Equazioni differenziali. — *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità.* Nota II (*) del Corrisp. GUIDO ASCOLI.

5. Un caso notevole di stabilità per l'equazione

$$(9) \quad x''(t) + A(t)x(t) = 0$$

già noto da molti anni (esso si trova implicitamente contenuto nella mia Nota su citata del 1935) è quello in cui $A(t)$ è la somma di una funzione $B(t)$ a variazione limitata tra t_0 e $+\infty$ e avente per $t \rightarrow +\infty$ limite positivo e di una $C(t)$ assolutamente integrabile tra gli stessi limiti. Poichè non sono a conoscenza di altri criteri generali di stabilità per la (9), non mi sembra inutile indicare una equazione particolare che non rientra in quel caso, e per la quale, tuttavia, si può con altri mezzi provare la stabilità. Si tratta dell'equazione

$$(10) \quad x'' + \left(1 + k \frac{\sin at}{t}\right)x = 0$$

con $a \neq 2$ e -2 .

Per dimostrarlo osserviamo che se $u(t)$ è una funzione positiva per $t > t_0$, due volte derivabile, e si pone

$$v(t) = \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{u^2(\tau)}$$

l'equazione differenziale del 2° ordine che ha per integrali

$$(11) \quad x_1 = u \cos v, \quad x_2 = u \sin v$$

ha la forma (10), ed è in essa

$$A(t) = \frac{1}{u^4} - \frac{u''}{u}.$$

La cosa è sostanzialmente nota, e facilmente verificabile.

Si ponga ora

$$u = 1 + \lambda \frac{\sin at}{t} \quad \text{con } t > 0, \lambda = \frac{k}{a^2 - 4};$$

si verifica subito che è:

$$\frac{1}{u^4} = 1 - 4\lambda \frac{\sin at}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad u'' = -\lambda a^2 \frac{\sin at}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

mentre la stessa forma ha u''/u . È dunque:

$$A(t) = 1 + \lambda(a^2 - 4) \frac{\sin at}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) = 1 + k \frac{\sin at}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Con questa scelta della $A(t)$ la (9) ha gli integrali (11), evidentemente limitati; lo stesso avviene quindi della (10), essendosi soppresso nella $A(t)$ un termine assolutamente integrabile tra t_0 e $+\infty$.

(*) Presentata nella seduta del 3 giugno 1950.

Si può anche assegnare una formula asintotica per gli integrali della (11), poichè, giusta il n. 4, essi differiscono dalle espressioni (11) per termini che sono $\mathcal{O}(1/t)$. Ora si ha:

$$u^{-2} = 1 - 2\lambda \frac{\sin at}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad , \quad v = t + 2\lambda \int_1^{\infty} \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau + C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

e quindi

$$v = t + C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

dove C è una costante; e di qui facilmente:

$$x_1 = \cos(t + C) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) \quad , \quad x_2 = \sin(t + C) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

espressioni che valgono dunque anche per gli integrali della (10).

Nei casi $a = 2$, $a = -2$, il secondo dei quali si riduce al primo mutando k in $-k$, l'analisi precedente cade in difetto e la questione si presenta assai più difficile. Si riesce tuttavia a stabilire, come mostreremo ora sommariamente, che in tali casi *non si ha stabilità*.

Posto $\alpha = k/4$, si cerchi di determinare la funzione $u(t)$ in modo che l'equazione differenziale lineare che ha per integrali

$$x_1 = u^\alpha \cos u \quad , \quad x_2 = u^{-\alpha} \sin u$$

abbia la forma (9). Il teorema di Liouville fornisce facilmente la condizione

$$u' = \frac{u}{u - \alpha \sin 2u}$$

cui si soddisfa invertendo l'equazione

$$t = u + \alpha \int_u^{\infty} \frac{\sin 2w}{w} dw,$$

ciò che, per t abbastanza grande, è certamente lecito. E risulta $u = t + \mathcal{O}(t^{-1})$.

Un calcolo alquanto laborioso dà allora per la corrispondente funzione $A(t)$ la forma

$$A(t) = 1 + 4\alpha \frac{\sin 2u}{u} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right) = 1 + k \frac{\sin 2t}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

e poichè x_1 e x_2 , per $\alpha \neq 0$ non sono ambedue limitati, segue, come sopra, che lo stesso avviene per gli integrali dell'equazione

$$x'' + \left(1 + k \frac{\sin 2t}{t}\right)x = 0.$$

6. Non è difficile riconoscere che se una funzione $A(t)$ soddisfa alla condizione di stabilità richiamata all'inizio del n. 5, il suo valor medio tra t_0 e t

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$$

è a variazione limitata tra t_0 e $+\infty$, ed ha per $t \rightarrow \infty$ limite positivo. La cosa si stabilisce infatti agevolmente per ciascuna delle due componenti di $A(t)$ e trova, del resto, riscontro in altre note teorie⁽⁹⁾. Si può allora domandarsi se, inversamente, la detta proprietà per la $\bar{A}(t)$ sia o no sufficiente per garantire la stabilità della (9).

La risposta è *negativa*, come risulta dal seguente esempio, indicatomi dal dott. G. Prodi. Si definiscano i punti p_i, q_i mediante le condizioni

$$q_0 = 0, \quad p_n - q_{n-1} = \frac{\pi}{2}, \quad q_n - p_n = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{2},$$

e la funzione $A(t)$ mediante le altre

$$A(t) = 1 \quad \text{in} \quad q_{n-1} - p_n, \quad A(t) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \quad \text{in} \quad p_n - q_n \quad (n \geq 1).$$

Assunto $t_0 = 0$, la variazione totale di $\bar{A}(t)$ tra 0 e $+\infty$ risulta:

$$\begin{aligned} V(\bar{A}) &= \int_0^\infty |\bar{A}'(t)| dt = \int_0^\infty |\bar{A}'(t)| dt = \int_{p_1}^\infty \left| \frac{A(t)}{t} - \frac{1}{t^2} \int_{p_1}^t A(\tau) d\tau \right| dt = \\ &= \int_{p_1}^\infty \frac{|A(t) - \bar{A}(t)|}{t} dt. \end{aligned}$$

Ora si ha subito $q_n < n\pi$, e quindi, per $q_{n-1} < t < q_n$,

$$1 \leq A(t) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{\pi}{t}\right)^2 = 1 + \frac{2\pi}{t} + \frac{\pi^2}{t^2}, \quad A(t) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

da cui

$$\bar{A}(t) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\log t}{t}\right), \quad A(t) - \bar{A}(t) = \mathcal{O}\left(\frac{\log t}{t}\right),$$

onde $V(\bar{A})$ risulta finito.

D'altra parte, si consideri l'integrale della (9) definito dalle condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1;$$

poichè negli intervalli $q_{n-1} - p_n$ e $p_n - q_n$ la (9) ha rispettivamente le forme

$$x'' + x = 0, \quad x'' + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 x = 0,$$

si vede subito che l'integrale avrà i suoi zeri nei punti q_n , i suoi estremi nei punti p_n , e per induzione risulta pure facilmente che è anzi

$$x(p_n) = (-1)^{n-1} n, \quad x'(p_n) = 0; \quad x(q_n) = 0, \quad x'(q_n) = (-1)^n (n+1),$$

onde l'integrale considerato non rimane limitato (e neppure la sua derivata). Nello stesso modo si vedrebbe che un integrale che ha un estremo nell'origine tende a zero per $t \rightarrow +\infty$, insieme alla sua derivata.

(9) Cfr. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, p. 285; E. C. TITCHMARCH, *The theory of functions*, p. 408 (13.223) e (13.24); *Fourier Integrals*, p. 25 (1.14), condizione 1-c, 1^a forma.

Un altro esempio dello stesso fatto, con $A(t)$ continua, ci è dato dalla (10). Si ha per essa, posto $t_0 = 0$,

$$\bar{A}'(t) = \frac{k \sin at}{t^2} - \frac{k}{t^2} \int_0^t \frac{\sin a\tau}{\tau} d\tau = \mathcal{O}(t^{-2}),$$

mentre per $t = 0$ $A(t)$ è olomorfa, e così $\bar{A}(t)$ e $\bar{A}'(t)$. Onde $\bar{A}(t)$ ha variazione limitata tra t_0 e $+\infty$. Ciò vale per ogni valore di a ; ma si è visto che per $a = \pm 2$ gli integrali della (10) non sono limitati.

Geometria (Geometria differenziale). — *Superficie sulle quali il triangolo geodetico ha un semplice grado di mobilità.* Nota^(*) del CORRISP. CORRADINO MINEO.

1. Come è noto, questo problema fu posto, ma non risolto, dal Christoffel, in una sua fondamentale Memoria⁽¹⁾. Credette risolverlo il Weingarten⁽²⁾, ma con una dimostrazione non esauriente, come notò il Mangoldt; il quale stabilì rigorosamente il risultato previsto dai precedenti Autori, cioè che *le superficie sulle quali il triangolo geodetico ha un solo grado di libertà, ossia ammette una e una sola relazione (indipendente dalle coordinate dei suoi vertici) tra i suoi elementi, sono unicamente quelle applicabili su superficie di rotazione.*

A questo risultato il Mangoldt giunse per mezzo di numerosi sviluppi in serie, lunghi e laboriosi: egli nota nella sua Memoria che non è facile scorgere a prima vista come semplificare quei calcoli e che d'altra parte essi diventano d'una lunghezza intollerabile se non si è pronti a cogliere ogni occasione per abbreviarli! (3).

A quei calcoli il Darboux ha sostituito in gran parte ingegnose considerazioni geometriche, importanti per se stesse, per quanto non esenti, come lo stesso Autore avverte, da qualche obiezione (4). Queste considerazioni e le formule relative del Darboux, io ho ripreso e stabilito in modo semplice e rigoroso in una Nota apparsa in questi « Rendiconti » (5).

Con le considerazioni del Darboux, la dimostrazione del risultato enunciato, per quanto assai più semplice di quella del Mangoldt, resta sempre una dimostrazione abbastanza circostanziata.

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1950.

(1) CHRISTOFFEL, *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke*. « Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin », pp. 119-176 (1868).

(2) WEINGARTEN, *Ueber die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen*. « Sitzungsberichte der K. P. Ak. der Wissenschaften zu Berlin » p. 453 (1882).

(3) MANGOLDT (H. v.), *Ueber die Classification der Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke*. « Journal de Crelle », t. XCIV, 1882, p. 21.

(4) DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, 3^{me} Partie, Paris, Gauthier-Villars, 1894, pp. 185-192.

(5) CORRADINO MINEO, *Sopra un caso limite notevole di triangoli geodetici*. Questi « Rendiconti », vol. XXVII, serie 5^a, seduta del 7 aprile 1918.

Ora, il risultato si può raggiungere rapidamente e semplicemente senza che, *ad hoc*, sia necessario alcun calcolo.

2. Sia ABC un triangolo geodetico sopra una superficie S della nostra classe (cioè sulla quale il triangolo geodetico sia dotato d'un semplice grado di mobilità). Con le stesse lettere A, B, C dei vertici indichiamo le misure in radianti dei rispettivi angoli e con a, b, c quelle dei lati ordinatamente opposti ai vertici A, B, C . Chiamiamo inoltre α, β, γ le curvature gaussiane dei punti A, B, C sulla S . Si pensi poi al triangolo piano avente gli stessi lati a, b, c del triangolo ABC su S ; e siano A_0, B_0, C_0 i suoi angoli, S_0 la sua area. Si ha

$$(1) \quad \alpha = \lim_{S_0 \rightarrow 0} \frac{1}{S_0} \{ 3(A - A_0) - (B - B_0) - (C - C_0) \},$$

dovendosi intendere che i lati del triangolo tendano a zero, rimanendo fisso il vertice A . Questa formula (dovuta in fondo a Gauss), o qualche altra analoga, è fondamentale in questa ricerca ⁽⁶⁾. Poichè l'espressione sotto il segno del limite è indipendente dalla posizione del triangolo sulla S , se esiste su S un altro triangolo $A'B'C'$ avente ordinatamente gli stessi elementi di ABC , dovrà in A' la curvatura gaussiana di S coincidere con quella di A (e, naturalmente, si deduce che B e B' hanno la stessa curvatura gaussiana, e così C e C'). Come, in somma, nel caso che il triangolo avesse su S tre o due gradi di libertà (si che il vertice A , per esempio, possa passare in qualunque altro punto di S), la (1) prova che la S dovrebbe essere a curvatura gaussiana costante, così la stessa (1), nel caso di un solo grado di libertà di S , può servire facilmente a provare che i vertici d'un suo qualunque triangolo geodetico non si posson muovere se non sulle linee di egual curvatura gaussiana di S ⁽⁷⁾. (Per questa dimostrazione vedi Darboux, loc. cit.).

Si pensi ora a un triangolo geodetico i cui lati b e c , uscenti dal vertice A , siano il primo tangente e l'altro normale alla curva di egual curvatura gaussiana di S passante per A . Questo triangolo, per quanto si è stabilito, è mobile su S in maniera che il lato c resta normale all'anzidetta curva; e poichè l'altro vertice B di c deve muoversi sulla curva di egual curvatura gaussiana di S passante per B , ne viene che questa seconda curva è geodeticamente equidistante dalla prima.

(6) Si può anche adoperare la seguente formula, più semplice, dovuta al SEVERI (*Sulla curvatura delle superficie e varietà*. «Rend. Circolo Matematico di Palermo», tomo XVII, 1917):

$$\alpha = \lim_{S_0 \rightarrow 0} \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos A - a^2}{b^2 c^2 \sin^2 A},$$

intendendo che i lati del triangolo tendano a zero, rimanendo fisso il vertice A e invariato l'angolo A .

(7) In generale, quando il triangolo ammette sulla superficie una sola relazione tra gli elementi di esso, segue dalla teoria dei sistemi di funzioni implicite che le coordinate dei suoi vertici dipendono da un parametro variabile, ma anche dai suoi elementi; e quindi, stando soltanto a quella teoria, si può bene immaginare, come nota il Mangoldt, che il vertice A , comune a due triangoli differenti, descriva sulla superficie traiettorie differenti. Ma questo non può accadere se si è dimostrato che i vertici del triangolo devono descrivere curve di egual curvatura gaussiana della superficie.

Dunque le curve di egual curvatura geodetica di S sono linee geodeticamente parallele.

Se riferiamo la S al doppio sistema di linee costituito dalle curve di egual curvatura gaussiana e dalle geodetiche loro traiettorie ortogonali, il ds^2 è:

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2.$$

Poichè la curvatura gaussiana K di S è data da

$$K = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2},$$

si deduce

$$(2) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = \text{funzione di sola } u.$$

Ma questa relazione, come si sa, caratterizza una classe di superficie più generale di quelle applicabili su superficie di rotazione.

Resta ancora un'altra condizione per caratterizzare compiutamente le S .

Si costruisca un triangolo geodetico nel seguente modo. Si conduca per A la geodetica tangente alla curva di egual curvatura gaussiana di S passante per A e si prenda su essa un arco AC di lunghezza b e un arco AB della stessa lunghezza b sulla curva di egual curvatura gaussiana. Il triangolo geodetico ABC è quello formato dall'arco geodetico AC (di lunghezza b), dalla *corda geodetica* dell'arco AB della curva di egual curvatura gaussiana (la cui lunghezza chiamiamo c) e dall'arco geodetico congiungente i punti B e C (la cui lunghezza chiamiamo a). Per la curvatura geodetica della linea di egual curvatura gaussiana nel punto A , abbiamo⁽⁸⁾

$$\frac{1}{\rho_g} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2a}{b^2}.$$

Ma poichè l'arco b differisce dalla sua corda geodetica c per infinitesimi del 2° ordine rispetto a b , potremo anche scrivere

$$\frac{1}{\rho_g} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2a}{bc}.$$

Col solito ragionamento, si deduce che le linee di egual curvatura gaussiana di S , devono essere anche curve di egual curvatura geodetica su S .

Ma su S :

$$\frac{1}{\rho_g} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u};$$

dunque dev'essere

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \text{funzione di sola } u;$$

(8) BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª edizione, vol. I, Parte I, Bologna, Zanichelli, 1927, p. 279. Il Bianchi non introduce la lunghezza dell'arco congiungente i punti B e C , ma più in generale la *distanza* dei due punti B e C ; ma nel caso nostro, essendo S una superficie per due punti della quale passa una e una sola geodetica, la sostituzione è lecita.

quindi

$$\lambda = f_1(u) f_2(v),$$

essendo f_1 una funzione di sola u e f_2 una funzione di sola v .

E questa mostra che la S è applicabile su una superficie di rotazione in modo che le curve di egual curvatura gaussiana si distendono sui paralleli e le geodetiche loro traiettorie ortogonali sui meridiani di essa superficie.

Le superficie S sulle quali esiste una sola relazione tra i sei elementi del triangolo geodetico, possiedono dunque un gruppo ∞^1 continuo di applicabilità in sè.

Fisica. — *Sulla composizione relativistica delle velocità.* Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

In alcune Note e Memorie precedenti⁽¹⁾, mi sono occupato della Teoria della Relatività di Einstein, rilevandone talune incompatibilità di carattere fisico. Nell'ultimo lavoro citato, ho anche asserito, in modo sommario, al non essere, la formula relativistica della composizione delle velocità, del tutto soddisfacente. In questa Nota, a chiarimento e parziale correzione di tale mio giudizio, mi propongo di dimostrare che, se tale formula può correttamente interpretarsi in uno schema di puro carattere matematico, dà luogo, in certi casi, a talune contraddizioni fisiche.

Come è noto la ricordata formula è la seguente:

$$(1) \quad w = \frac{u + v}{1 + (uv)/c^2},$$

dove w è la risultante relativistica delle due velocità codirezionali u e v . Ciò va inteso col riferimento a tre sistemi rigidi, reciprocamente in moto uniforme, rettilineo. Le tre velocità sono quelle segnate in fig. 1, fra ciascuna coppia di

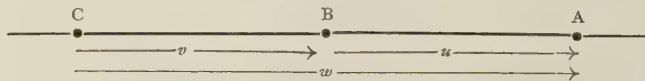


Fig. 1.

sistemi, che corrispondono ai tre punti A, B, C, convenendo di dare il segno positivo alle velocità da sinistra verso destra. Per la meccanica classica, si ha:

$$(2) \quad w = u + v \quad ; \quad u = w - v \quad ; \quad v = w - u.$$

(*) Presentata nella seduta dell'11 novembre 1950.

(1) Ved. questi «Rendiconti», vol. III, p. 435 (1947); vol. V, p. 211 (1948); vol. VII, p. 327 (1949); vol. VII, p. 537 (1950); vol. IX, p. 3 (1950); «Atti della Accademia delle Scienze di Torino», vol. 83 (1949); «Memorie della Accademia delle Scienze di Bologna», vol. II, p. 155 (1945); vol. IV, p. 149 (1947); vol. V, p. 91 (1948); vol. VI, p. 81 (1949).

Alle quali corrispondono le altre relativistiche:

$$(3) \quad w = \frac{u + v}{1 + (uv)/(c^2)} \quad ; \quad u = \frac{w - v}{1 - (wv)/(c^2)} \quad ; \quad v = \frac{w - u}{1 - (wu)/(c^2)}.$$

È facile rilevare che si può passare algebricamente da una di queste relazioni alle altre due. Oltre a ciò, si può ricavare l'altra:

$$(4) \quad u + v - w = \frac{uvw}{c^2},$$

la quale è da ritenersi l'analoga relativistica della classica (2).

Si può fare un calcolo numerico. Classicamente possiamo porre, per esempio, $u = (1/2)c$; $v = (1/5)c$; $w = (5/6)c$. Relativisticamente, lasciando per u e v gli stessi valori, occorre dare a w un valore più piccolo, e cioè $w = (5/7)c$. Si comprende ciò, perchè la relazione relativistica dà per limite superiore delle velocità il valore c , mentre classicamente quella velocità non ha limite.

Si può applicare la (1) al caso di un numero di sistemi superiore a tre, per esempio, quattro. Di essi, si considerino quattro punti, A, B, C, D, in moto uniforme, sulla retta della fig. 2, da sinistra verso destra. Delle velocità relative

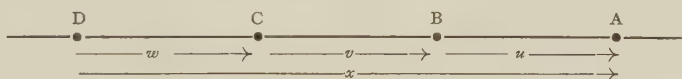


Fig. 2.

a ciascuna coppia di tali punti, consideriamo soltanto u, v, w, x , come è indicato in figura. Applicando la (1), si trova:

$$(5) \quad x = \frac{u + v + w + (uvw)/(c^2)}{1 + (uv + uw + vw)/(c^2)};$$

dalla quale si può intravedere la regola con cui possono scriversi, le formule corrispondenti ad un numero di sistemi superiore a quattro.

Come avevo asserito più sopra, le precedenti considerazioni dimostrano la perfetta coerenza di carattere matematico della formula (1). Occorre però ricordare che Einstein ha presentato tale formula, facendola discendere dalla Trasformazione di Lorentz, ossia dal secondo postulato relativistico, della costanza, cioè, della velocità della luce, per qualunque osservatore. È perciò presumibile che se si mette in dubbio l'attendibilità fisica di tale postulato, si potrebbe riconoscere insoddisfacente anche la (1).

Prima di verificare tale asserzione, è bene ricordare un caso nel quale quella formula, non sembra dare esatto risultato. Voglio così riferirmi al trascinamento della luce, operato da mezzi rifrangenti in moto. La relazione, che esprime tale trascinamento, è quella di Fresnel-Fizeau, che dice:

$$(6) \quad c' = c \left(\frac{1}{n} + \frac{n^2 + 1}{n^2} \frac{v}{c} \right),$$

dove c' è la velocità accresciuta (rispetto a c/n) in un mezzo rifrangente, di indice n , dotato di velocità v , nel senso di trasmissione della luce stessa. Consi-

derando la formula ora riportata, Laue pensò che il fatto fisico dell'apparente trascinamento della luce, potesse venire interpretato relativisticamente. Egli cercò di arrivare a ciò, ammettendo che la luce moventesi in un mezzo rifrangente con la velocità c/n , conservi, rispetto al mezzo, sempre tale velocità, anche se il mezzo è in moto (per esempio, rispetto alla sorgente di luce, od ad un osservatore esterno). In tal caso, se la velocità del mezzo è v , seguendo la detta ipotesi, si ha la possibilità di applicare la formula (1), facendo in essa $u = c/n$; si ha così:

$$(7) \quad c'' = c \frac{c + nv}{cn + v} = c \left(\frac{1}{n} + \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{v}{c} + \frac{n^2 - 1}{n^3} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right).$$

Dalla quale si vede che il valore c'' , così calcolato, differisce da quello prevedibile con la formula (6) di Fresnel-Fizeau, per termini di ordine superiore a v/c .

Ciò non pertanto, si suole riportare questo calcolo, come una ulteriore prova della attendibilità della teoria di Einstein: questa, si dice, risulterebbe d'accordo con la previsione di Fresnel (appoggiantesi, per altro, all'ipotesi eterea) e con l'esperienza di Fizeau. Si vede però, che tale accordo si verifica, se mai, con l'approssimazione del 1° ordine, cioè in v/c . Ma volendo sostenere la relatività, è da rilevare che l'esperienza di Fizeau, comunque perfezionata da Michelson e da Zeeman, non può dare approssimazione superiore a quella ora detta, in conseguenza della piccola velocità imprimitibile artificialmente, ad un mezzo rifrangente. In altri termini, si potrebbe pensare che la relazione rappresentante il fenomeno naturale sia la (7), e l'esperienza si limita a verificare la (6).

Contro tale conclusione, si possono fare le seguenti considerazioni. Nulla prova la giustezza della implicita ipotesi di Laue, circa il permanere della velocità c/n , malgrado il moto uniforme qualunque del mezzo rifrangente, per un osservatore fisso sullo stesso mezzo. Nessuna esperienza dimostra che tale osservatore, oltre a constatare l'effetto Doppler, non possa riconoscere una qualche variazione di detta velocità. Si fa tale considerazione, a parte la difficoltà od impossibilità pratica di eseguire una esperienza del genere. Anzi, ricordo a proposito di tale argomento, che ho fatto vedere, molti anni or sono⁽²⁾, come adottando la teoria balistica della luce, con approssimazione analoga a quella che dà la teoria della relatività, si ritrova la formula (6) di Fresnel-Fizeau. E, naturalmente, secondo la detta teoria balistica, un osservatore fisso sul mezzo rifrangente in moto, potrebbe accorgersi che la luce, nell'interno di questo, ha velocità diversa da c/n , contrariamente a quanto vorrebbe la relatività.

Da tutto ciò si deduce, che non si può dare gran peso, all'applicazione della relatività, fatta da Laue, al trascinamento ottico, di Fresnel-Fizeau.

Passiamo ora ad esaminare le basi su cui si fonda la formula relativistica (1), della composizione di velocità parallele. Supponiamo che due punti A, B, mobili sulla retta R, (fig. 3), si trovino, all'istante zero, sul punto P, di tale retta. Il punto A ha la velocità u , e con questa, si dirige, verso Q. Il punto B ha, rispetto

(2) «R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LXI, p. 149 (1928).



Fig. 3.

ad A, la velocità v , ed anche esso si dirige verso Q, con la velocità w , risultante di u e di v . Secondo la relatività, il valore di w è dato dalla (1). Ma a parte il valore preciso di w , riteniamo dunque che i due punti A, B, si muovono su R, con le velocità uniformi u e w . Voglio ora qui ripetere, adattandola a questo caso, una considerazione che ho già fatto più volte⁽³⁾. Si può supporre che la retta R, con i suoi due punti P, Q, costituisca un sistema rigido (che chiamiamo PQ), sul quale scorre un altro sistema, dato anch'esso da una retta col punto A ed un altro punto A' (chiamiamo questo sistema AA'). Ammettiamo $PQ = AA'$; il che è dapprima valutato con la metrica relativistica, del sistema PQ. Nei punti P, Q, A, A', si trovino osservatori con orologi sincroni e concordi, in ciascun sistema. In conseguenza del moto di AA', avverrà che A verrà a coincidere con Q ed A' con P. Per le ammissioni fatte, il sistema PQ giudica che le coincidenze AQ ed A'P avvengono nello stesso istante. Come è noto, relativisticamente, tale giudizio non è condiviso dal sistema AA', che ritiene non simultanee le dette coincidenze. Ho già rilevato altre volte, la evidente inconsistenza di una simile asserzione. Infatti, il sistema PQ, che ritiene simultanee le coincidenze, ha ricavato da tale fatto, la nozione della perfetta eguaglianza del suo tratto PQ, con quello AA' dell'altro sistema. È pervenuto al suo giudizio perchè ha affidato ai suoi due osservatori P, Q, il controllo delle ore in cui le coincidenze avvengono; e tali ore risultano esattamente identiche. Da ciò scaturisce, per PQ, senza alcun dubbio, la nozione dell'eguaglianza fra PQ e AA'. Si rifletta ora, che nessuna differenza esiste fra la struttura dei due sistemi PQ ed AA'. La differenza di segno delle loro velocità, in valore assoluto eguali a v , è un fatto estrinseco a loro, e dipendente dal nostro giudizio di osservatori esterni ai sistemi stessi. Questi sono dunque, intrinsecamente nelle stesse precise condizioni. Per cui, se le coincidenze PQ ed AA' sono ritenute simultanee da PQ, debbono essere ritenute anche tali da AA'. Non vi ha alcuna possibilità di dubbio su tale fatto, che appare evidentissimo, e per il quale non sembrerebbe necessario spendere tante parole, nell'esporglo. Esso è però contrario alla trasformazione di Lorentz, e la sua accettazione mina alle basi, tutta la teoria della relatività. Purtroppo, è per tale ragione che i relativisti, abituati alle concezioni di Einstein, si rifiutano di riconoscere la assoluta evidenza dell'esposto ragionamento. Ma sono sicuro che essi, un giorno, dovranno riconoscerne la giustezza.

Ora, i due sistemi PQ ed AA', che ammettono entrambi la simultaneità degli incontri dei loro estremi, debbono convenire sull'eguaglianza delle due lunghezze PQ ed AA'. Questa conclusione fa vedere la infondatezza della pretesa contrazione delle lunghezze di un sistema, che avverrebbe perchè esso è in moto.

(3) Ved. per esempio, il terzo comma della mia Nota di questi «Rendiconti», vol. VIII, p. 538 (1950).

rispetto ad un altro; deriva da ciò, come conseguenza, anche l'infondatezza della cosiddetta dilatazione dei tempi. Si dice così, anche perchè, in relatività tali due fatti sarebbero intimamente legati: se si riconosce che uno di essi è insostenibile, tale conclusione deve valere anche per l'altro.

Basterebbe quanto ora si è esposto, per arrivare anche ad ammettere che la formula (1), che dà il valore della risultante di due velocità, sia infondata. Infatti, essa è stata dedotta dalla Trasformazione di Lorentz. Comunque, possiamo ancora fare, al riguardo, le seguenti considerazioni. Si è detto che i sistemi PQ ed AA', giudicano eguali le proprie lunghezze. Ciò val quanto dire, che tali sistemi hanno la stessa metrica spaziale. Ora tutto ciò vale, considerando tanto la velocità u di AA', quanto quella v di BB'; e cioè, le considerazioni fatte valgono qualunque sia la velocità reciproca uniforme, dei due sistemi. Per cui, le tre metriche spaziali dei sistemi PQ, AA', BB', sono eguali, ed un punto qualunque, che si muove rispetto a PQ con qualsiasi velocità uniforme, ha la stessa metrica di PQ. Supponiamo, così, che A modifichi la sua velocità portandola da u a w . Egli si accorgerà, che nella unità di tempo, anzichè essere arrivato, sul sistema PQ, ad una distanza u , è arrivato alla distanza w . Ma poichè le metriche dei due sistemi sono eguali, il tratto $w - u = v$, che A ha percorso in più, rispetto a quando aveva la velocità u , è stato giudicato alla stessa maniera tanto da PQ, quando da A. In altri termini, la velocità w ha, nel secondo caso il valore $w = u + v$. Tale relazione rappresenta la semplice legge classica della composizione delle velocità. Essa va accettata, invece di quella relativistica data dalla (1).

Chimica delle muffe. — *Sulla diffusione dell'echinulina nelle muffe del gruppo dello «Aspergillus glaucus»* (*). Nota (**) di ADOLFO QUILICO e CESARE CARDANI, presentata dal Corrisp. A. QUILICO.

Come è stato altre volte annunciato⁽¹⁾, nel micelio di un particolare ceppo di *Aspergillus echinulatus* Delacr. Thom e Church, accanto ai due caratteristici pigmenti idrochinonici *flavoglaucina* ed *auroglaucina* dei quali abbiamo recentemente chiarito la costituzione⁽²⁾, è contenuta in notevole quantità una sostanza azotata complessa p. f. 242°-243° di formula $C_{28}H_3O_2N_3$, che per la sua provenienza avevamo chiamato *echinulina*, dello studio chimico della quale andiamo da tempo occupandoci⁽³⁾.

Poichè le muffe del gruppo dell'*A. glaucus*, al quale appartiene anche l'organismo da noi studiato, avevano formato oggetto da parte di Raistrick e collabo-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1950.

(1) A. QUILICO e L. PANIZZI, «Ber.», 76, 348 (1943).

(2) A. QUILICO, L. PANIZZI e E. MUGNAINI, «Nature», 164, 26 (1949); «Gazz. Chim. It.», 79, 89 (1949); A. QUILICO, C. CARDANI e L. PANIZZI, «Gazz. Chim. It.», 80, 325 (1950); L. PANIZZI, R. A. NICOLAUS e A. QUILICO, «Gazz. Chim. It.», 80 (1950).

(3) A. QUILICO, L. PANIZZI e V. ROSNATI, «Gazz. Chim. It.», 78, 111 (1948).

ratori⁽⁴⁾ di indagini assai approfondite che avevano portato all'isolamento della flavoglauцина, dell'auroglauцина e di differenti pigmenti ossiantrachinonici, ci è parso strano che questi Autori non avessero fatto alcun cenno dell'echinulina che, almeno nel ceppo di *A. echinulatus* da noi studiato, è presente in quantità notevolmente superiore ai pigmenti stessi.

Il mancato ritrovamento dell'echinulina nelle 25 specie di muffe della serie dell'*A. glaucus* (in esse compreso l'*A. echinulatus*) esaminate da questi Autori, poteva essere attribuito ad una delle seguenti cause:

- 1° ad una *specificità* del ceppo in nostro possesso;
- 2° alle differenti *condizioni di cultura* (composizione del terreno, temperatura);
- 3° ai *metodi di estrazione* usati.

Per quanto non si potessero escludere *a priori* i fattori indicati in 1° e 2°, che era anzi assai verosimile dovessero influire sul contenuto in echinulina dei miceli ottenuti da ceppi differenti e in diverse condizioni, ci è sembrato assai più probabile che il mancato isolamento di questa sostanza fosse piuttosto da ricercare in differenze nella tecnica di estrazione seguita. L'echinulina è infatti assai poco solubile nell'etere di petrolio p. e. 50°–60° usato da questi AA. e rimane per la maggior parte nei miceli dai quali può essere agevolmente estratta, secondo le nostre esperienze, con cloroformio nel quale essa è a caldo discretamente solubile. Era inoltre a prevedere che altre muffe del gruppo così definito e caratteristico dell'*A. glaucus*, oltre all'*A. echinulatus*, contenessero questa sostanza.

Abbiamo quindi voluto esaminare con la tecnica di estrazione più avanti descritta, i miceli di una diecina tra specie e ceppi di muffe del gruppo dell'*A. glaucus* di differenti provenienze, allevati a 30° sul terreno liquido a base di melasso di bietola da noi comunemente usato⁽⁵⁾.

Come mostra l'unita Tabella, da tutti gli organismi studiati abbiamo potuto isolare l'echinulina, in quantità talvolta ragguardevoli. Particolarmente ricchi in questa sostanza si sono dimostrati l'*A. Amstelodami*, l'*A. ruber* e l'*A. Chevalieri*, dai quali essa è stata ricavata in quantità superiori al 4% del peso della sostanza secca del micelio, mentre figura in piccole quantità (intorno all'1%) nei ceppi di *A. repens* e di *A. echinulatus* del I. M. I. da noi esaminati.

Non si può però attribuire un valore assoluto e definitivo a queste cifre perchè una notevole influenza sulla produzione dell'echinulina e dei pigmenti che l'accompagnano sembra esercitare l'*adattamento* a vivere sui terreni melassosi⁽⁶⁾. Così nei due ceppi di *A. echinulatus*, 16.123 del I. M. I. e C. B. S., riportati ai

(4) B. G. GOULD e H. RAISTRICK, « Bioch. Journ. », 28, 1640 (1934); H. RAISTRICK, R. ROBINSON e A. R. TODD, « J. Chem. Soc. », 1937, 80; J. H. CRUICKSHANK, H. RAISTRICK e R. ROBINSON, « J. Chem. Soc. », 1938, 2056; J. N. ASHLEY, H. RAISTRICK e RICHARD, « Bioch. Journ. », 33, 1292 (1939).

(5) Melasso di bietola g 200, KH_2PO_4 g 2,0 portati ad un litro con acqua comune.

(6) Per abituare i ceppi delle varie provenienze al terreno a base di melasso da noi usato, si sono effettuati i seguenti passaggi:

Cultura originaria → provetta agar-melasso → bevuta terreno liquido melasso → bevuta terreno liquido melasso → provetta agar-melasso → fiasca di Roux terreno liquido melasso. Quest'ultima cultura ha fornito il materiale per la semina delle fiasche servite alla preparazione del materiale di studio (miceli) per le prove qui descritte.

nn. 8 e 9 della Tabella, siamo passati nel corso di poche generazioni da contenuti in echinulina rispettivamente dell'1% e del 0,15%, all'1,9 e all'1,4%. L'aumento del tenore in echinulina è stato accompagnato da una diminuzione del contenuto in pigmenti idrochinonici ⁽⁷⁾.

Riguardo alla *influenza della composizione del substrato*, abbiamo esaminato di confronto i miceli ottenuti a 30° dal nostro ceppo di *A. echinulatus* sul terreno sintetico di Czapek-Dox modificato ⁽⁸⁾ impiegato da Raistrick nelle sue esperienze e sul terreno a base di melasso da noi correntemente usato. Come appare dalla Tabella (nn. 10 e 11), è alquanto diminuita la quantità di echinulina estraibile dai miceli ottenuti su terreno sintetico mentre è aumentato il tenore in flavoglaucina, ma la muffa non ha perso la capacità di sintetizzare questa sostanza a partire da una sorgente di azoto puramente minerale come è quella del terreno sintetico ⁽⁹⁾.

Una influenza assai spiccata esercita invece la *temperatura*, quando essa superi un certo valore. Mentre le culture di *A. echinulatus* (nostro ceppo) fatte sviluppare su terreno di melasso a 22° e a 30° (prove nn. 11 e 12) hanno la caratteristica colorazione giallo-zolfo, sono pochissimo sporificate e mostrano abbondanti periteci, quelle ottenute a 37° (n. 13) hanno colorazione bianco-grigiastra, sono fortemente sporificate e non rivelano all'esame microscopico la presenza di periteci. Inoltre, mentre le prime hanno un contenuto normale in flavoglaucina ed echinulina, le ultime sono praticamente esenti da pigmento e contengono solo pochissima echinulina, ciò che farebbe pensare che queste sostanze siano soprattutto contenute nei periteci. Poichè le esperienze di Raistrick erano state condotte a 24°, si può escludere che il mancato isolamento dell'echinulina fosse dovuto alla mancata sua formazione per le differenti condizioni di temperatura.

Il fatto che l'*echinulina* sia stata da noi ritrovata in tutte le specie e ceppi del gruppo dell'*A. glaucus* finora esaminati, ci autorizza a concludere che essa rappresenta un componente normale, altrettanto caratteristico come la *flavoglaucina*, delle muffe di questa serie.

Diremo infine che nel corso di queste ricerche, accanto ai pigmenti già trovati da Raistrick e collaboratori nelle muffe di questo gruppo (flavo e auroglaucina, fiscione, eritroglaucina ecc.), abbiamo potuto isolare - in quantità purtroppo troppo piccole per uno studio più approfondito - alcune nuove sostanze, e precisamente:

(7) A mutazioni o a fenomeni di adattamento in genere è probabilmente da attribuire il fatto che il ceppo di *A. echinulatus* da tempo in nostro possesso, che nel 1943 produceva sensibili quantità di *auroglaucina*, ha perduto attraverso i ripetuti trapianti su terreni a base di melasso, la capacità di sintetizzare questo pigmento, mentre continua a produrre abbondantemente *flavoglaucina* ed *echinulina*.

(8) Per la composizione del liquido di Czapek-Dox modificato, vedi B. G. GOULD e H. RAI-STRICK, « Bioch. Journ. », 28, 1640 (1934).

(9) Ciò conferma del resto quanto avevamo osservato già nel 1943 in esperienze comparative su terreni a base di saccarosio e di melasso. A conclusioni definitive si potrebbe giungere solo attraverso ripetuti trapianti su terreno di Czapek-Dox, ma i risultati delle attuali esperienze sulle altre muffe del gruppo dell'*A. glaucus* rendono assai probabile che anche nel materiale studiato da Raistrick e collaboratori fosse contenuta l'*echinulina*.

una sostanza bianca p. f. 250°–254°, da due ceppi di *A. niveo-glaucus*

una sostanza gialla p. f. 257°–260° ($C_{24}H_{30}O_5$?) da un ceppo di *A. echinulatus*

una sostanza bianca di tipo sterinico p. f. 151°–153° ($C_{29}H_{48}O_2$ o $C_{29}H_{50}O_2$)⁽¹⁰⁾, da un ceppo di *A. repens*

una sostanza bianca di tipo sterinico p. f. 157°–159° di composizione e proprietà assai simili alla precedente⁽¹¹⁾, dal nostro ceppo di *A. echinulatus* coltivato a 37°.

PARTE SPERIMENTALE.

Tecnica generalmente seguita nel trattamento dei miceli e nell'isolamento dei differenti prodotti. – Si è adottata di norma la procedura seguente. Il materiale di studio venne ricavato da culture in fiasche di Roux su terreno liquido a base di melasso di bietola della composizione già indicata, fatte sviluppare a 30°. I miceli raccolti all'11°–12° giorno vengono separati per filtrazione su imbuto di Buchner, lavati a fondo con acqua calda, sgocciolati il più possibile, essiccati in istufa a 85°–90°, e infine ridotti in polvere non troppo fine. I rendimenti in micelio secco (g/dcm₂ di cultura) sono riportati nella Tabella.

L'estrazione delle sostanze in essi contenute venne compiuta in Soxhlet di vetro, generalmente su 80 g di micelio secco, impiegando 250 cm₃ di solvente in ognuna delle successive estrazioni. Si usarono nell'ordine indicato i seguenti solventi:

| | |
|-------------------------------------|-----------|
| 1°) etere di petrolio p. e. 50°–70° | per 6 ore |
| 2°) etere etilico | » » » |
| 3°) cloroformio | » 20 » |

Prove preliminari avevano accertato che questi tempi erano largamente sufficienti ad asportare la quasi totalità delle sostanze estraibili con i solventi indicati.

I singoli estratti vennero trattati come segue:

A) *Estratto in etere di petrolio.* In esso sono contenuti la *flavoglauцина*, l'*auroglauцина* e parte dei pigmenti *antrachinonici* quando sono presenti. Esso viene filtrato a freddo per separare la parte spontaneamente cristallizzata. Dalle acque madri per successive concentrazioni e filtrazioni si separa la rimanente porzione di pigmenti misti a grassi e sterine, che vengono eliminati per lavaggio a freddo con etere di petrolio p. e. 50°–70°. Il peso dei singoli pigmenti così ottenuti, riferito a 100 g di micelio secco, è riportato nella Tabella.

I pigmenti grezzi, quando contengono solo *flavoglauцина*, vengono ricristallizzati da ligroina p. e. 90°–100°; se altre sostanze sono invece presenti, si conduce la separazione nel modo che nel caso particolare si è dimostrato più conveniente, come è più avanti indicato. La loro identificazione è stata fatta in base al p. di f., alle proprietà, e alla preparazione dei derivati funzionali caratteristici già descritti in altra occasione.

(10) Il *sitostendiolo* 3,7 descritto da W. WUNDERLICH, «Z. physiol. Chem.», 241, 116 (1936) ha la formula $C_{29}H_{50}O_2$ e fonde a 151°–153°, ma non possiamo asserire che si tratti della stessa sostanza.

(11) Questa stessa sostanza si ritrova anche nei miceli di *A. echinulatus* ottenuti a 30° solo il suo isolamento è più laborioso per la presenza di quantità molto maggiori di prodotti estraibili.

TABELLA.

| N. | SPECIE E CEPPI | Provenienza | Resa micelio secco in g/dcm ² di cult. | Prodotti ricavati all'estrazione, riferiti a 100g di micelio secco | | | Echinulina pu | |
|----|--|--------------|---|--|---------------------------------|---|---------------|--|
| | | | | da etere di petrolio p. e. 50°-70° | da etere etilico (resine) | da cloroformio | p. f. | |
| 1 | <i>A. Chevalieri</i> (Mang.) Thom e Church, 16.134 . . . | I.M.I. | — | flavoglaucina 0,7 | 8,85 | echinulina 4,1 | 238° | |
| 2 | <i>A. Amstelodami</i> (Mang.) Thom e Church, 17.445 | I.M.I. | 1,44 | flavoglaucina 0,4 | 7,25 | echinulina 4,2 | 241°-242° | |
| 3 | <i>A. Amstelodami</i> (Mang.) Thom e Church . . . | C.B.S. | — | flavoglaucina 0,7 | 8,38 | echinulina 5,8 | 235°-236° | |
| 4 | <i>A. ruber</i> (Spieck. e Bremer) Thom e Church, 16.117 | I.M.I. | — | flavoglaucina 0,6 | 4,2 | echinulina 5,6 | 240°-241° | |
| 5 | <i>A. repens</i> (Cda) Sacchetti 16.113 | I.M.I. | 1,38 | flavoglaucina 0,3 auroglaucina 0,01 sterina p. f. 153° 0,26 | 2,9 | echinulina 0,7 | 238°-240° | |
| 6 | <i>A. niveo-glaucus</i> Thom e Raper, 32.050 | I.M.I. | 0,91 | flavoglaucina 0,85 fiscione 0,03 sostanza bianca p. f. 250°-254° 0,15 | 2,5 | echinulina 2,4 | 242°-243° | |
| 7 | <i>A. niveo-glaucus mut. alba</i> Blochwitz | C.B.S. | 1,10 | flavoglaucina 0,56 fiscione 0,014 sostanza bianca p. f. 250°-254° tracce | 3,7 | echinulina 2,8 | 242°-243° | |
| 8 | <i>A. echinulatus</i> (Delacr.) Thom e Church . . . | C.B.S. | 1,16 | I { flavoglaucina 1,5 1,57 rubroglaucina 0,65 1,00 | 5,2 7,6 | echinulina 0,15 pigmenti antra- chinonici n. d. | 239°-242° | |
| | | | — | II { flavoglaucina 0,5 rubroglaucina n. d. | 2,5 | echinulina 1,4 pigmenti antra- chinonici n. d. | 236°-239° | |
| 9 | <i>A. echinulatus</i> (Delacr.) Tom e Church, 16.123 . | I.M.I. | 1,36 | I { flavoglaucina 5,0 rubroglaucina 0,13 | 8,74 | echinulina 1,0 sostanza gialla p. f. 257°-260° 0,244 | 213° | |
| | | | — | II { flavoglaucina 2,55 rubroglaucina 0,45 | 5,9 | echinulina 1,9 sostanza gialla — | 243° | |
| 10 | <i>A. echinulatus</i> (Delacr.) Thom e Church: terreno di Czapek-Dox mod., 30° | nostro ceppo | 0,42 | flavoglaucina 3,18 | 1,75 | echinulina 4,77 | — | |
| 11 | <i>A. echinulatus</i> (Delacr.) Thom e Church: terreno melasso, 30° | nostro ceppo | 1,92 2,02 | flavoglaucina 2,00 | 6,3 | echinulina 6,4 | 242°-243° | |
| 12 | Idem, a 22° | nostro ceppo | 1,48 | flavoglaucina 2,1 | 3,6 | echinulina 4,9 | — | |
| 13 | Idem, a 37° | nostro ceppo | 1,86 | flavoglaucina tracce sterina p. f. 157°-159° 0,1 | 1,25 | echinulina 1,0 | — | |

B) *Estratto in etere etilico.* Si presenta talvolta torbido per la presenza di una polvere bianca che risulta essere *echinulina* e che viene pertanto separata ed aggiunta al prodotto ricavato dall'estratto cloroformico. Dalla soluzione filtrata si distilla a b. m. l'etere, lasciando poi il residuo sotto vuoto fino a peso costante. Questa frazione appare costituita da *prodotti resinosi* bruni di natura non ancora chiarita, presenti in quantità variabile a seconda dell'organismo studiato, come mostra la Tabella.

C) *Estratto cloroformico.* È colorato in bruno e, nella maggioranza dei casi, lascia già cristallizzare per raffreddamento l'*echinulina* in quantità più o meno rilevante. Separata questa per filtrazione, si distilla il CHCl_3 a b. m. fino a secchezza ottenendo una massa solida più o meno scura e gommosa. Questa viene stemperata a freddo in benzolo che asporta i grassi e le sostanze colorate, mentre lascia indisciolta la quasi totalità dell'*echinulina*. Quando il benzolo passa quasi incolore, si asciuga il residuo su piatto poroso e lo si unisce a quello eventualmente separato dall'etere etilico, considerando il tutto come *echinulina grezza* lavata. Nella Tabella sono dati i pesi di prodotto grezzo ricavati da 100 g di micelio secco delle varie provenienze.

L'*echinulina* venne purificata per ricristallizzazione dall'alcool butilico e dall'alcool etilico; in qualche caso, per i campioni provenienti da miceli ricchi di pigmenti antrachinonici, si rese necessaria la preventiva eliminazione di questi ultimi per via cromatografica, come è avanti descritto. Essa venne identificata, oltre che all'aspetto cristallino caratteristico, al p. di f. in miscela con un campione puro proveniente dal nostro ceppo di *A. echinulatus*, e alla caratteristica reazione cromatica con H_2SO_4 conc.; ad ulteriore conferma, per garantirci dalla eventualità che si trattasse di sostanze simili ma non identiche alla *echinulina*, specie per i campioni che anche dopo ripetute cristallizzazioni presentavano un p. di f. un po' basso, venne dosato l'azoto (micro) sui prodotti delle diverse provenienze, ottenendo in ogni caso valori normali come mostra la Tabella.

Casi particolari. — *Aspergillus repens* 16.113 I. M. I. (n. 5 della Tabella). L'estratto in etere di petrolio proveniente da 80 g di micelio ha lasciato per filtrazione a freddo g 0,2 di una *sostanza bianca* in lunghi aghi sericei che fondono grezzi a 150°. Il filtrato concentrato, lasciato raffreddare e filtrato, ha dato g 1,2 di prodotto cristallino giallo che risulta essere una miscela dei pigmenti *flavoglauцина* e *auroglauцина* con la sostanza bianca sopra indicata. Per la separazione si tratta a caldo con etere di petrolio in quantità insufficiente a portare tutto in soluzione e si filtra a caldo. I pigmenti rimasti indisciolti non contengono più prodotto bianco. La soluzione viene fatta raffreddare e filtrata, e la parte solida separatasi viene stemperata a freddo con metanolo aggiunto goccia a goccia. I pigmenti passano in soluzione, mentre la sostanza bianca resta indisciolta e si unisce a quella prima separata. Il liquido metilico lasciato evaporare in provetta a temperatura ordinaria, depone sul fondo cristalli gialli di *flavoglauцина*, mentre sulle pareti si separano cristalli rossi di *auroglauцина*. La soluzione in etere di petrolio dalla quale si è separata la sostanza bianca, svaporata a secchezza, ridisciolta in metanolo e lasciata spontaneamente evaporare, fornisce altra *auroglauцина*, mentre la parte rimasta indisciolta nel trattamento a caldo con quantità insufficiente di etere di petrolio è praticamente costituita da *flavoglauцина*.

La *sostanza bianca* è abbastanza solubile in alcool, etere di petrolio e ligroina; solubilissima in cloroformio e benzolo. Non è azotata nè contiene alogeni. Ha carattere neutro ed è insolubile negli alcali caustici; in H_2SO_4 conc., passa in soluzione con colorazione rossastra. Ricristallizzata ripetutamente da metanolo ha punto di fusione costante $151^\circ\text{--}153^\circ$. All'analisi ha dato (semimicro):

| | | |
|--|---------|---------|
| trov. % : | C 81,15 | H 11,45 |
| per $\text{C}_{29}\text{H}_{48}\text{O}_2$, calcolato : | 81,26 | 11,25 |
| » $\text{C}_{29}\text{H}_{50}\text{O}_2$, » : | 80,87 | 11,70 |

È assai probabile che si tratti di uno sterolo.

Aspergillus niveo-glaucus 32.050 I.M.I. (n. 6 della Tabella). Nei pigmenti separatisi a freddo dall'estratto in etere di petrolio è contenuta una *sostanza bianca* che può essere isolata asportando i pigmenti con etere di petrolio a freddo. Si ricavano così (da 80 g di micelio) g 0,1 di prodotto che ricristallizzato dall'alcool forma finissimi aghi bianchi feltrati p. f. $250^\circ\text{--}254^\circ$. La sostanza ha carattere neutro, non contiene nè azoto nè alogeni e si scioglie in H_2SO_4 conc. con colorazione giallo-aranciata. Dalla soluzione in etere di petrolio dalla quale essa si è separata, si ottengono per concentrazione g 0,7 di pigmenti colorati in giallo-rossiccio. Trattandoli a caldo con la minore quantità possibile di ligroina, rimangono indisciolti g 0,02 di un pigmento rosso-cupo che ricristallizzato dall'etere acetico forma lunghi aghi rosso-scuri p. f. $193^\circ\text{--}195^\circ$ che sembrano essere costituiti da *fiscione* (p. f. $203^\circ\text{--}204^\circ$).

La *flavoglauцина* ottenuta, anche dopo l'eliminazione del pigmento rosso sopra indicato, è sempre colorata in rossastro e ha un p. di f. basso. Si è potuta ottenere allo stato puro nei caratteristici cristalli giallo brillante per via cromatografica, facendone una soluzione in etere di petrolio, adsorbendo con allumina (Ciba) ed eluendo poi con etere di petrolio; il *fiscione* e gli altri pigmenti ossiantrachinonici che la inquinano rimangono fissati nella parte superiore della colonna. Poiché queste sostanze sono tenacemente trattenute dall'allumina con la quale formano lacche violette, la cromatografia condotta in queste condizioni non consente il loro facile ricupero, specie quando sono presenti in piccole quantità.

Lo stesso prodotto bianco p. f. $250^\circ\text{--}254^\circ$ si ritrova in minore quantità anche nella *mutazione alba* C. B. S. dell'*Aspergillus niveo-glaucus* (n. 7 della Tabella).

Aspergillus echinulatus C.B.S. (n. 8 della Tabella). Per filtrazione a freddo dell'estratto in etere di petrolio rimangono g 0,5 (da 80 g di micelio) di un pigmento rosso che ricristallizzato da etere acetico e poi da alcool fonde a $185^\circ\text{--}188^\circ$. Le sue caratteristiche fisiche e le colorazioni che assume con NaOH e H_2SO_4 conc. indicano che si tratta della cosiddetta *rubroglauцина* (vedi avanti). Il filtrato, per concentrazione, raffreddamento e lavaggio con poco etere di petrolio dei cristalli separatisi, fornisce g 1,2 di *flavoglauцина* inquinata dal precedente pigmento rosso che viene eliminato per cromatografia su allumina come si è detto.

L'estratto cloroformico lascia alla evaporazione g 10,9 di un prodotto bruno rossiccio contenente varie impurezze e notevoli quantità di pigmenti antrachinonici. Dopo numerosi tentativi siamo riusciti ad isolare l'*echinulina* per via cromatografica.

tografica, operando come segue. Il prodotto essiccato sciolto in CHCl_3 , viene passato in una colonna di allumina Ciba del diametro di 2 cm. alta 20 cm., poi eluito con cloroformio puro. Quando questo passa incolore, si eluisce con alcool che forma una banda bruna che si sposta rapidamente e che contiene l'echinulina. Dopo questo trattamento la colonna di allumina rimane colorata in azzurro-violaceo nella metà superiore, in violaceo in quella inferiore; da essa non si riesce ad asportare più nulla né con miscele di alcool-etere, né con acido acetico glaciale. La soluzione alcoolica che contiene tutta l'echinulina viene concentrata, lasciata raffreddare e filtrata. L'echinulina così separata è colorata in bruno, ma diviene quasi bianca per lavaggio con etere. Per ricristallizzazione da alcool etilico si ottiene perfettamente bianca, p. f. $239^\circ\text{--}242^\circ$.

In una estrazione condotta su 79 g di micelio di una successiva cultura, sempre su terreno di melasso, si è notata una forte diminuzione della quantità di pigmenti antrachinonici, mentre è sensibilmente aumentata l'echinulina; si sono infatti isolati g 1,1 di echinulina grezza lavata, che dopo cristallizzazione dagli alcoli butilico ed etilico, fondeva a $236^\circ\text{--}239^\circ$.

Aspergillus echinulatus 16.123, I. M. I. (n. 9 della Tabella). Nella *flavoglaucina* grezza ottenuta per estrazione con etere di petrolio è contenuto un pigmento rosso che è stato isolato asportando a freddo con metanolo la flavoglaucina. Pesava g 0,1 (da 80 g di micelio) e ricristallizzato da acetato di etile forma aghetti rosso cupo p. f. $180^\circ\text{--}187^\circ$; il p. di f. e le caratteristiche colorazioni che assume sciogliendosi negli alcali caustici e nell' H_2SO_4 conc. indicano che si tratta di quella miscela difficilmente risolubile di *fiscione* e di *eritroglaucina* che era stata in un primo tempo descritta da Raistrick come *rubroglaucina*. La flavoglaucina ricavata dal liquido metanolico pesava g 4,03 e conteneva piccole quantità di pigmenti antrachinonici eliminabili per cromatografia su Al_2O_3 nel modo già descritto.

Dal residuo dell'evaporazione dell'*estratto cloroformico*, ricristallizzato da alcool butilico si ottengono g 0,22 di *echinulina* grezza che può essere ottenuta pura per ricristallizzazione dell'alcool etilico. Dalle acque madri butiliche per lenta evaporazione a temperatura ordinaria si separa una sostanza solida che lavata con etere e ricristallizzata da butanolo forma aghi gialli che fondono a $257^\circ\text{--}260^\circ$ colorandosi in rosso cupo. Il prodotto è pochissimo solubile in etere e in benzolo, più facilmente negli alcoli e in CHCl_3 . Si scioglie in H_2SO_4 conc. con colorazione rosso-scura e riscaldata con NaOH assume lieve colorazione rosea.

| | | | |
|--|-----------|---------|--------|
| All'analisi (semimicro) ha dato: | trov. % : | C 72,39 | H 7,55 |
| per $\text{C}_{24}\text{H}_{30}\text{O}_5$, calcolato | : | 72,33 | 7,59 |
| » $\text{C}_{29}\text{H}_{36}\text{O}_6$, » | : | 72,47 | 7,55 |

Nell'estrazione di 80 g di micelio di una successiva cultura sempre su terreno di melasso si è osservato una diminuzione della quantità di pigmenti ed un aumento della quantità di echinulina, analogamente a quanto si è verificato per il ceppo C. B. S.

Aspergillus echinulatus (nostro ceppo).

a) a 30° , su terreno di melasso e su terreno di Czapek-Dox modificato (nn. 11 e 10 della Tabella). Allo scopo di verificare se la presenza dell'echinulina fosse

legata alla particolare natura del terreno usato nelle nostre precedenti esperienze, sono state esaminate di confronto culture della stessa età ottenute a 30° rispettivamente sulla soluzione di melasso da noi solitamente impiegata, e su un terreno sintetico di Czapek-Dox modificato usato da Raistrick nelle sue esperienze. Da 200 g di micelio secco abbiamo ricavato con la tecnica usuale: nel primo caso, g 4,0 di *flavoglaucina*, g 12,7 di *prodotti resinosi* e g 12,8 di *echinulina* grezza lavata, mentre nel secondo, g 56,5 di micelio hanno dato g 1,8 di *flavoglaucina*, g 1,0 di *prodotti resinosi* e g. 2,7 di *echinulina*. Come appare dalla Tabella, in cui questi valori sono stati riferiti a 100 g di micelio secco, anche i miceli ottenuti su terreno sintetico sono ricchi in echinulina. Per quanto il materiale ottenuto sul terreno di Czapek-Dox abbia un maggior contenuto percentuale in flavoglaucina, le rese in micelio secco per dm^2 di cultura risultano notevolmente inferiori a quelle realizzabili su terreno di melasso, per cui quest'ultimo appare essere il substrato più conveniente per la preparazione di questo pigmento oltre che dell'echinulina;

b) a 22° su terreno di melasso (n. 12 della Tabella). Da 147 g di micelio secco si sono ricavati alla estrazione g 3,1 di *flavoglaucina*, g 5,3 di *prodotti resinosi* e g 7,2 di *echinulina* grezza lavata con benzolo;

c) a 37° su terreno di melasso (n. 13 della Tabella). I miceli ottenuti in queste condizioni sono colorati in bianco-grigiastro, appaiono sporificati e non presentano periteci. Alle prove di estrazione si è avuto un *estratto in etere di petrolio* quasi incolore, che lascia alla evaporazione un residuo di aspetto grasso solo debolmente colorato in giallo. Lavando con etere di petrolio per asportare i grassi, rimangono g 0,2 di una sostanza bianca di aspetto sterinico, che ricristallizzata da alcool fonde nettamente a 157°-159°.

All'analisi (micro) ha dato:

| | | | | |
|----------|---------|-------|---------|-------|
| trov. %: | C 81,07 | 81,43 | H 11,91 | 11,94 |
|----------|---------|-------|---------|-------|

valori assai vicini a quelli trovati per l'analoga sostanza da *Aspergillus repens* (p. 225) che ha anche un p. di f. non molto diverso. Tracce di *flavoglaucina* (pochi cristallini) si sono ricavate dall'etere di petrolio di lavaggio di questa sostanza.

L'*estratto cloroformico* ha infine fornito g 2,0 di *echinulina* grezza lavata con benzolo.

Ci è grato ringraziare il dott. F. Canal della Farmitalia per le due analisi semimicro, e la dott.ssa Nebbia dell'Istituto Donegani di Novara che ha eseguito la maggior parte delle microanalisi contenute nel presente lavoro.

Chimica generale. — *Separazione negli antipodi ottici della β -naftolbenzilamina racemica per cromatografia di partizione su carta* (*).
Nota di GIOV. BATTISTA BONINO e V. CARASSITI, presentata (**)
dal Socio G. B. BONINO.

In un noto lavoro del 1949 C. E. Dent ⁽¹⁾, occupandosi del metodo cromatografico di partizione su carta proposto da A. H. Gordon e J. P. Martin e Collaboratori ⁽²⁾, affermava non esservi ragione di credere che i composti otticamente attivi ed i miscugli racemici non procedessero sulla carta cromatografica con eguale velocità.

D'altronde la letteratura scientifica non si è occupata estesamente dell'argomento della separazione cromatografica su carta degli antipodi ottici costituenti un racemo, mentre la risoluzione delle sostanze racemiche negli antipodi ottici su colonna adsorbente è stata coronata da successo ⁽³⁾. Recentemente in un noto suo libro E. Lederer ⁽⁴⁾ rileva che i rapporti tra costituzione chimica e cromatografia si riducono, nella cromatografia di partizione, a rapporti fra costituzione chimica e coefficienti di partizione. Il coefficiente di partizione dipende soprattutto dalla natura dei differenti gruppi che entrano a far parte della molecola e poco o niente dalla loro posizione. Nell'adsorbimento vero e proprio, invece la configurazione spaziale della molecola ha una importanza capitale.

Negli ultimi anni A. E. Flood, E. L. Hirst e J. K. N. Jones ⁽⁵⁾ hanno tentato di risolvere negli antipodi ottici il DL-arabinosio in soluzione acquosa all'1 % col metodo della cromatografia su carta servendosi sia di levomentolo, sia di levoamylalcol. I risultati sono stati negativi e anche dopo 160 ore a temperatura ordinaria nessuna separazione è stata messa in evidenza.

Abbiamo pensato di riprendere il problema tentando di scindere negli antipodi ottici sulla carta cromatografica delle basi organiche racemiche impiegando fenolo come fase fissa del processo cromatografico e soluzioni acquose di acidi otticamente attivi come fase mobile. L'esperienza ha avuto un risultato nettamente positivo e siamo riusciti a separare in tal modo sul cromatogramma di partizione la β -naftolbenzilamina racemica usando come fase mobile una soluzione acquosa di acido destro-tartarico saturato di fenolo.

(*) Lavoro eseguito al Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, presso l'Istituto Chimico Giacomo Ciamician dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

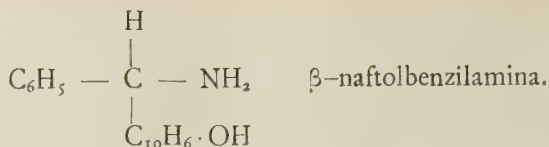
(1) C. E. DENT, « Biochem. Journ. », 43, 169 (1949).

(2) Vedi per esempio R. CONSDEN, A. H. GORDON e J. P. MARTIN, « Biochem. Journ. », 38, 224 (1944).

(3) Vedi per esempio L. ZECHMEISTER, *Stereochemistry and Chromatography*. « Ann. New York Acad. Sci. », 49, 220 (1948).

(4) E. LEDERER, *Progrès Recents de la Chromatographie*. Herman, Paris 1949, p. 37.

(5) A. E. FLOOD, E. L. HIRST e J. K. N. JONES « Journ. Chem. Soc. », ottobre 1948, p. 1679.



Con un tempo minimo di esperienza di 5 o 6 ore la separazione dei due antipodi è già nettissima.

A chiarimento e conferma di queste esperienze abbiamo studiato la velocità di spostamento sia della base levogira sia di quella destrogira pure dopo avere scisso negli antipodi ottici la base racemica con i metodi chimici ordinari descritti nella letteratura.

Con i due isomeri puri si sono ottenute velocità di spostamento nettamente diverse come risulta dalla seguente tabella dove vengono dati i valori del noto rapporto R_F tra la distanza percorsa dalla sostanza e la distanza percorsa dal solvente.

Come è naturale il detto rapporto dipende dalla concentrazione in acido tartarico della fase mobile. Nella tabella sono indicati i valori per due diverse concentrazioni.

| | Valori R_F | |
|-------------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| | ac. <i>d</i> -tartarico 50 % | ac. <i>d</i> -tartarico 13,04 % |
| β -naftolbenzilamina levogira | 0,17-0,19 | 0,14-0,16 |
| id. destrogira | 0,45-0,50 | 0,35-0,40 |

Eseguendo un cromatogramma sullo stesso foglio di carta e con la base racemica, e con il destroisomero, e con il levoisomero si osserva, dopo il tempo di esperienza, che in corrispondenza della base racemica si hanno due tracce, a distanze diverse dall'origine, mentre con ciascuno degli antipodi puri si ha una sola traccia sul cromatogramma, che corrisponde, per ciascuno dei due antipodi rispettivamente, a una delle due tracce ottenute con la base racemica.

Effettivamente la base racemica si salifica con l'acido tartarico destrogiro e i due diastereoisomeri viaggiano con velocità diversa avendo un diverso coefficiente di partizione.

A complemento di queste nostre prove si è eseguita l'esperienza stessa sostituendo all'acido tartarico destrogiro l'acido mesotartarico. In queste nuove condizioni di esperienza la scissione negli antipodi ottici non si è più ottenuta.

Abbiamo operato pure utilizzando acido tartarico racemico. Ma la discussione di queste ultime esperienze con l'acido racemico (esperienze che per alcuni aspetti possono ritenersi ancora non del tutto terminate) ci occuperà in una prossima Nota.

Le tracce della base sulla carta cromatografica venivano identificate con l'osservazione in luce di Wood dato che, come si sa, la base utilizzata è incolore.

PARTE SPERIMENTALE. - La β -naftolbenzilamina racemica è stata preparata con il metodo pubblicato da M. Betti ⁽⁶⁾ da β -naftolo, benzaldeide ed ammoniac.

(6) M. BETTI, «Gazz. Chim. Ital.», 31, I, 386 (1901); «Gazz. Chim. Ital.», 36, II, 392 (1906).

e, per le esperienze con antipodi puri, è stata scissa nei suoi antipodi ottici seguendo i metodi indicati dallo stesso A.

La tecnica cromatografica è quella proposta da R. Consden, A. H. Gordon e A. J. P. Martin.

Si è utilizzata carta Whatman n. 1 impiegando fenolo come fase fissa e soluzione acquosa di acido tartarico come fase mobile. La carta viene impregnata di fenolo facendo scorrere lo stesso come se fosse solvente mobile: con ciò si raggiunge una impregnazione razionale ed uguale, in tutti i punti della striscia. La carta poi viene asciugata parzialmente in corrente d'aria fredda. La base organica viene applicata in soluzione eterea (o anche fenolica) in concentrazione 0,002 molare. L'esperienza dura da 5 a 15 ore a seconda della lunghezza del cromatogramma. Le tracce della base, o dei suoi antipodi, vengono rivelate sul cromatogramma con il metodo seguente. La striscia di carta viene sviluppata stendendola su uno straterello di un paio di millimetri di spessore di carbonato di sodio secco in polvere distribuito sopra una lastra di vetro. Il cromatogramma viene quindi spruzzato con soluzione diluita di idrato sodico.

Lo straterello di carbonato sodico, oltre a contribuire alla neutralizzazione dell'acido tartarico in eccesso, costituisce uno strato assorbente atto ad impedire il dilavamento del cromatogramma durante lo spruzzamento con soluzione di idrato sodico. Questa operazione di sviluppo rimette quindi in libertà la base salificata dall'acido tartarico. Questa (sia racemica, sia nei due antipodi) presenta una netta ed intensa fluorescenza blu-violetta in luce di Wood quando è in mezzo nettamente alcalino. Esponendo pertanto alla luce di Wood il cromatogramma così sviluppato si mettono in nettissima evidenza le tracce degli antipodi della base sotto forma di macchie azzurre fluorescenti. È facile pertanto constatare qualitativamente le due macchie disugualmente distanti dall'origine quando si è impiegata base racemica, paragonare la posizione delle stesse macchie con quella delle tracce ottenute con antipodi puri separati e di eseguire le misure necessarie per la determinazione del rapporto R^F .

Il metodo è molto sensibile poichè abbiamo ottenuto delle nette risposte anche con circa 0,3 gamma di base racemica.

Il metodo perciò può presentare (se applicato in opportune condizioni) una sensibilità superiore a quella dell'ordinaria misura polarimetrica per mettere in evidenza la scissione di un racemo. E ciò ha significato non solo se la scissione avviene sotto la influenza di agenti chimici come nel caso sopra descritto, ma presumibilmente anche sotto quella di agenti fisici di opportuna simmetria e la cui azione possa prolungarsi durante tutto il tempo, certamente non brevissimo, richiesto dalle relativamente basse velocità di traslazione delle sostanze studiate sulla carta cromatografica.

Per quanto del tutto prematuro, abbiamo voluto anche dare un cenno di questo aspetto del problema del quale pure ci stiamo occupando con esperienze in corso.

Anatomia. — *Particolari morfologici e genetici del bulbo olfattivo.*
Nota (*) del Socio ANTONIO PENSA.

Fra le poche eccezioni alla legge quasi generale che le cellule nervose dei centri nevrassiali dei vertebrati sono provvedute di due sorta di prolungamenti: i dendriti ed un neurite che si continua in una fibra nervosa; abbiamo in prima linea i granuli del bulbo olfattivo. Essi mancano di un prolungamento che possa, con sicurezza essere riconosciuto come neurite; tutti i loro prolungamenti hanno piuttosto il carattere di dendriti.

Tuttavia in base a criterii cito-morfologici e sopra tutto in considerazione del fatto che i granuli si trovano proprio accumulati in quello strato dove fittissima è la rete nervosa interposta fra la via afferente e l'efferente del bulbo olfattivo non è possibile negar loro il significato di cellule nervose nel senso di avere un intervento diretto nella attività nervosa.

D'altra parte bisogna riconoscere che queste particolari cellule hanno una grande somiglianza con speciali cellule di nevroglia che prevalgono e sono più dimostrabili nei periodi di vita prenatale e immediatamente post-natale, ma che permangono però come tali anche in condizioni definitive di sviluppo. Hanno pressappoco le stesse dimensioni dei granuli, hanno un corpo cellulare globiforme ma villosa e sprovvista oppure in scarsa misura di prolungamenti rivolti in profondità; si continuano invece come i granuli con un tronco allungato che risale verso la superficie del bulbo olfattivo arrivando fino allo strato dei glomeruli dove si ramifica; le sue ramificazioni hanno l'aspetto di quelle dei gliociti di tipo protoplasmatico e molte di esse contraggono quei rapporti di aderenza alla parete dei vasi sanguigni che sono ben conosciuti per la nevroglia. Orbene ho potuto constatare che non di rado anche le ramificazioni periferiche dei granuli contraggono consimili rapporti coi vasi sanguigni. Sono quindi riscontrabili forme di transizione fra i granuli e quei gliociti.

Vien fatto di pensare che i granuli si differenzino, come i gliociti, da cellule dello strato ependimale definibili come granuloblasti per significare il loro grado di gerarchia intermedio fra gli spongioblasti (capostipiti delle cellule di nevroglia) e i neuroblasti (capostipiti delle vere e proprie cellule nervose).

L'esistenza di questo particolare tipo di cellule che sembrano rappresentare un qualche cosa di intermedio fra cellule nervose e cellule di nevroglia ed alle quali, come ho detto, è da attribuirsi funzione nervosa, conforta l'opinione già da me espressa in altre occasioni che anche la nevroglia propriamente detta, non soltanto passivamente e indirettamente, ma anche direttamente partecipi alla attività nervosa.

(*) Presentata nella seduta dell'11 novembre 1950.

La genesi dei granuli è tale da chiarire la loro peculiarità morfologica rispetto alle cellule nervose vere e proprie del bulbo olfattivo e la loro comunanza con le cellule di nevroglia.

Mentre i granuloblasti insieme agli spongioblasti provengono dallo strato endimale del ventricolo del bulbo, invece le cellule mitrali e le altre cellule nervose, derivano dallo spesso strato corticale di neuroblasti che, nella porzione paraolfattoria della vescicola telencefalica hanno avuto origine dalla zona endimale di questa; strato di neuroblasti che, estendendosi in superficie, avvolge secondariamente il bulbo olfattivo.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Topologia). — *Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico.* Nota I (*) di ALBERTO ROSELLI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Nel presente lavoro⁽¹⁾, premesse alcune considerazioni generali sui coni d'ordine qualunque, studio dal punto di vista topologico le curve situate sui coni del 3° ordine, privi di generatrici multiple, ad una e a due falde.

Dimostro che *sopra un cono cubico ad una falda* i circuiti pari (o dispari) segano ogni generatrice in un numero pari (rispettivamente dispari) di punti reali; un circuito pari sega ogni altro circuito (pari o dispari) in un numero pari, e due circuiti dispari si segano in un numero dispari di punti reali. Una curva algebrica sghemba, priva di singolarità, se d'ordine pari non possiede alcun circuito dispari, se d'ordine dispari uno ed uno solo (oltre eventuali circuiti pari).

Per il cono cubico *a due falde* dimostro che per i circuiti situati sulla falda dispari valgono le stesse proprietà dei circuiti situati sul cono ad una falda; mentre sulla falda pari i circuiti hanno comportamento topologico analogo a quello dei circuiti situati su di un cono quadrico. Invece le curve algebriche prive di singolarità posseggono (oltre eventuali circuiti pari) al massimo due circuiti dispari se d'ordine pari ed un solo circuito dispari se d'ordine dispari.

Dimostro infine l'esistenza effettiva di curve d'ordine pari con due circuiti dispari, costruendo sul cono cubico per « piccola variazione » una quartica sghemba con due circuiti dispari.

§ I. — CONSIDERAZIONI GENERALI SULLA TOPOLOGIA DEI CONI.

1. Sia dato un cono algebrico d'ordine m privo di generatrici multiple, ottenuto come proiezione di una curva algebrica piana (d'ordine m) priva di singolarità. In tal caso la curva base ha il genere $p = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ e, per il teorema di Harnack, ha al massimo $p + 1$ circuiti.

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1950.

(1) Diviso in due Note, di cui la presente considera il caso dei coni cubici ad una falda; la successiva quello dei coni cubici a due falde.

Dicendo *falda topologica* del cono il luogo delle generatrici del cono che si appoggiano ad un sol circuito della curva base (insieme di due coni opposti al vertice intesi nel senso della geometria elementare) poichè ad ogni circuito corrisponde una falda del cono, avremo che:

Un cono d'ordine m , privo di singolarità, possiede al massimo $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ falde.

Un cono è composto di falde pari e falde dispari. Una falda si dirà *pari* quando una retta generica dello spazio la interseca in un numero pari (≥ 0) di punti reali ed è la proiezione di un circuito pari della curva base; si dirà *dispari* nel caso contrario. Si chiama ordine topologico di una falda il massimo numero di punti reali in cui essa è intersecata da una retta.

Due falde d'ordine pari si segano in un numero pari (≥ 0) di generatrici reali, mentre due falde d'ordine dispari si segano secondo un numero dispari di generatrici reali e quindi in una almeno che risulta multipla per il cono. Invero tante sono le generatrici comuni a due falde del cono quante sono le intersezioni dei due circuiti corrispondenti della curva base, in modo che i teoremi che valgono per le intersezioni (reali) di due circuiti di una curva algebrica piana si estendono anche alle generatrici comuni a due falde del cono. Dunque:

Se un cono, privo di singolarità, è d'ordine pari, esso contiene solo falde pari, se è d'ordine dispari ne possiede una ed una sola dispari perchè altrimenti due di queste si segherebbero necessariamente secondo una generatrice doppia del cono.

2. *Curve sghembe situate sui coni.* — Una curva sghemba tracciata sul cono può essere composta di uno o più circuiti. *Ordine* (topologico) della curva è il massimo numero di punti reali che essa ha in comune con un piano; in modo analogo si definisce l'ordine di un suo circuito.

Una curva sghemba d'ordine pari (situata sul cono) ha o tutti circuiti pari o oltre a questi un numero pari di circuiti dispari, anche se essa è priva di singolarità; ciò può accadere perchè due circuiti dispari non si segano necessariamente in un punto reale come avviene invece nel piano. Per esempio su di un cono del 3° ordine a due falde topologiche si possono prendere due circuiti dispari, uno sulla falda pari passante per il vertice, l'altro sulla falda dispari e non passante per il vertice (ved. n. 9). Una curva sghemba d'ordine dispari contiene un numero dispari di circuiti dispari e quindi uno almeno.

In particolare per curve situate sopra coni valgono, come è noto ⁽²⁾, le seguenti formule che danno l'ordine ed il genere della curva sghemba:

$$n = ma + b$$

$$p = \frac{a(a-1)}{2} m + (a-1)(b-1) + a\pi$$

dove le lettere hanno i seguenti significati: n è l'ordine della curva sghemba, m quello del cono, a il numero delle intersezioni tra reali ed immaginarie della

(2) R. STURM, *Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln*. « Math. Ann. », Bd. XIX (1882).

curva con una generatrice generica (fuori del vertice), b la molteplicità della curva nel vertice del cono, p il genere della curva sghebbata, π il genere del cono (ossia di una sezione piana).

Se si tratta di un cono cubico basta porre nelle formule precedenti $m = 3$. Per curve prive di singolarità potrà essere $b = 0$ o $b = 1$.

$$\text{Se } b = 0 \quad \begin{cases} a \text{ pari} & = 2\nu & n = 6\nu \\ a \text{ dispari} & = 2\nu + 1 & n = 6\nu + 3 \end{cases}$$

$$\text{Se } b = 1 \quad \begin{cases} a \text{ pari} & = 2\nu & n = 6\nu + 1 \\ a \text{ dispari} & = 2\nu + 1 & n = 6\nu + 4. \end{cases}$$

Quindi le curve d'ordine pari sono del tipo

$$n = 6\nu \text{ non passanti per il vertice}$$

$$n = 6\nu + 4 \text{ passanti per il vertice.}$$

Quelle dell'ordine dispari sono del tipo:

$$n = 6\nu + 1 \text{ passanti per il vertice}$$

$$n = 6\nu + 3 \text{ non passanti per il vertice.}$$

§ 2. — CONO CUBICO.

3. Poichè segnando un cono cubico con un piano non passante per il vertice si ottiene una curva del terzo ordine di genere $\pi = 1$ distingueremo i coni del 3° ordine in:

1° Coni ad una sola falda (proiezione di una cubica ad un solo circuito)

2° Coni a due falde (proiezione di una cubica bipartita).

4. *Cono cubico ad una falda. Sezioni piane.* — Il piano all'infinito, come ogni piano dello spazio, sega un cono cubico ad una falda in una cubica ad un sol circuito, segata da ogni retta impropria in tre punti $A_\infty B_\infty C_\infty$ di cui almeno uno reale. Esistono sempre delle trasversali r_∞ che segano la cubica in tre punti reali ed altre che la segano in un sol punto reale. Nel primo caso i piani che hanno la giacitura di r_∞ segano il cono secondo una cubica (propria) avente tre punti impropri (reali) e nel secondo uno solo (reale). Il cono ammette dunque sezioni con tre od un sol punto reale all'infinito.

Come cubica base potremo allora, senza ledere la generalità, prendere una cubica con un sol punto reale all'infinito (v. fig. 1).

5. *Circuiti sul cono cubico ad una falda.* — Rispetto alle loro intersezioni con un piano generico si distinguono in:

a) circuiti pari se hanno un numero pari (≥ 0) di intersezioni reali con un piano;

b) circuiti dispari se hanno un numero dispari (≥ 1) di intersezioni reali con un piano.

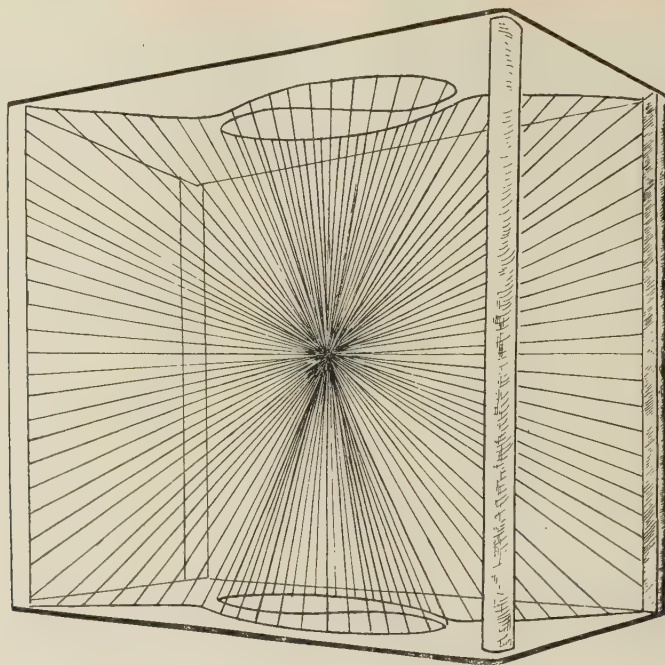


Fig. 1.

Cominciamo dai circuiti pari. È evidente che esistono infiniti piani passanti per il vertice del cono che lo segano secondo tre generatrici reali. Sia π un piano contenente le tre generatrici reali r, s, t ed indichiamo con le stesse lettere il numero delle intersezioni di ciascuna con un circuito (pari). È evidente che si ha:

$$r + s + t = \text{numero pari.}$$

Perciò potremo avere o tutte intersezioni pari o una pari e due dispari. Supponiamo che possa verificarsi la seconda ipotesi e sia r una delle due rette che hanno un numero dispari di intersezioni con il circuito.

Prendendo un piano generico per r , questi incontrerebbe il cono secondo altre due generatrici s', t' aventi con il circuito un numero di intersezioni reali di diversa parità e che non potrebbero perciò mai coincidere in una sola generatrice. Ciò equivale a dire che da R , intersezione della retta r con la curva base non sarebbe possibile condurre alcuna tangente (reale) alla stessa con un punto di contatto diverso da R , (in particolare tangente d'inflexione in R) il che è assurdo. Dunque r, s, t sono pari.

E poichè per una generica generatrice passa sempre un piano segante il cono secondo tre generatrici reali, si ha:

Un circuito d'ordine pari sega ogni generatrice in un numero pari di punti reali.

Segue che ogni circuito pari considerato come taglio spezza sempre la connessione della superficie: questa viene suddivisa in due regioni una esterna e l'altra interna al circuito e tali che mentre due punti di una stessa regione possono

sempre essere congiunti da una linea senza attraversare il circuito, questo non è possibile per due punti appartenenti a regioni opposte e qualunque sia il cammino percorso. Inoltre nella regione interna non possono tracciarsi per intero circuiti dispari, in quella esterna sì.

I circuiti d'ordine pari si possono suddividere nei seguenti tre tipi:

1° circuiti non passanti per V e non seganti tutte le generatrici del cono in punti reali;

2° circuiti non passanti per V e seganti tutte le generatrici del cono in punti reali in modo che per deformazione continua si possano ridurre al vertice. Per analogia con le convenzioni usate per i circuiti pari delle quadriche a punti parabolici ⁽³⁾, li chiameremo anche *circuiti monocentrici*. Un esempio è offerto dall'intersezione del cono con una sfera avente il centro nel vertice;

3° Circuiti passanti per V .

Esaminiamo ora i circuiti dispari (situati sul cono).

Questi li distingueremo in:

1° circuiti dispari non passanti per il vertice;

2° circuiti dispari passanti per il vertice.

Ogni circuito dispari inoltre deve segare tre generatrici complanari o tutte in un numero dispari di punti o due in un numero pari ed una dispari. La seconda eventualità si può escludere considerando il piano passante per una generatrice r con un numero pari di intersezioni e ragionando come nel caso dei circuiti pari. Quindi:

Un circuito d'ordine dispari sega ogni generatrice in un numero dispari di punti reali.

I risultati di questo n. si possono invertire, perchè se un circuito sega una generatrice un numero pari (o dispari) di volte, esso è pari (o dispari). Le considerazioni precedenti ci portano a concludere che sul cono cubico ad una falda i circuiti di una curva sghemba si comportano rispetto alle generatrici come i circuiti di una curva piana rispetto alle rette del suo piano.

6. *Curve algebriche situate sul cono cubico ad una falda.* — Esse sono composte di circuiti pari e circuiti dispari. Ogni circuito pari, considerato come taglio, spezza sempre la connessione della superficie (ved. n. 5) e ciò anche se abbraccia il vertice, ossia è monocentrico (contrariamente a quel che accade per i circuiti monocentrici di un cono quadrico o i circuiti pari di seconda specie di un iperboloide) ⁽³⁾.

Ne consegue che ogni circuito, pari o dispari, situato sul cono, deve segare un circuito pari in un numero pari (≥ 0) di punti reali.

Invece due circuiti dispari γ, γ_1 si segano sempre in un numero dispari ≥ 1 di punti reali. Infatti escluso il caso che passino entrambi (semplicemente) per il vertice (nel qual caso il teorema è banale) sia γ uno dei due circuiti dati supposto

(3) M. PIAZZOLLA-BELOCH, *Sulla configurazione delle curve situate sopra quadriche, e, in particolare, sulla configurazione delle curve algebriche sghembe col massimo numero di circuiti.* « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XXII, ser. V, 2° sem., fasc. 2 e 3.

non passante per il vertice. Proiettiamolo da un punto O non situato sul cono; si ottiene un cono topologico d'ordine dispari che sega il cono cubico secondo una curva topologica d'ordine dispari che si compone del circuito dispari γ e di una curva complementare d'ordine pari dotata eventualmente di più circuiti. Possiamo dimostrare che questi ultimi debbono essere tutti pari. Supponiamo infatti che ciò non fosse, che la curva complementare possedesse cioè qualche circuito dispari. Essendo essa d'ordine pari, questi dovrebbero essere in numero pari (≥ 2) e ognuno di essi dovrebbe segare ogni generatrice del cono cubico dato (di vertice V) in almeno un punto reale Q_i (vedi n. 5). Sia ora O_1 la traccia su π della retta VO e conduciamo per O_1 nel piano π una retta segante la curva base in un sol punto reale P_1 , ciò che per qualunque posizione di O (e O_1) è sempre possibile. Sia α il piano VO_1P_1 ; esso sega il cono cubico (di vertice V) secondo la sola generatrice reale VP_1 . Congiungendo un punto generico P di VP_1 con O , la retta OP sega il cono cubico dato nel solo punto reale P (ed in due punti immaginari coniugati).

Se il punto P coincide con uno dei punti Q_i , la retta OQ_i che deve segare il cono dato nel solo punto reale Q_i , dovendo appoggiarsi anche al circuito γ , avrebbe riunite in Q_i due intersezioni col cono dato, il che, essendo O generico, non può essere. La curva complementare non potrà quindi possedere alcun circuito dispari c. v. d.

Ma γ_1 deve intersecare γ ed il complementare di γ complessivamente in un numero dispari di punti reali ⁽⁴⁾; togliendo le intersezioni di γ_1 con il complementare di γ (che sono in numero pari) γ e γ_1 si intersecano in un numero dispari (≥ 1) di punti reali.

Come conseguenza di quanto dimostrato possiamo affermare che:

Una curva algebrica sghemba, d'ordine n , priva di singolarità, situata sul cono cubico può avere:

tutti circuiti pari se n è pari;

circuiti pari ed un sol circuito dispari se n è dispari.

Analisi matematica. — *Un criterio generale di compattezza per lo spazio delle successioni.* Nota di ENNIO DE GIORGI, presentata ^(*) dal Socio M. PICONE.

Consideriamo l'insieme Σ delle successioni; indichiamo con Σ_n l'insieme formato dagli elementi di Σ che hanno nulle tutte le coordinate dalla $(n+1)$ -esima in poi. Dato un elemento $x \equiv \{x_k\}$ chiameremo proiezione di x su Σ_n l'elemento $\pi_n(x)$ che ha le prime n coordinate uguali alle corrispondenti coordinate di x e le altre tutte nulle; dato un insieme X chiameremo proiezione di X su Σ_n e indicheremo con $\pi_n(X)$ l'insieme formato dalle proiezioni di tutti gli elementi di X .

(4) Perchè un circuito dispari sega un cono topologico dispari in un numero dispari di punti reali; e questi nel caso nostro sono su γ e il complementare.

(*) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

L'insieme Σ può, in infiniti modi, essere considerato uno spazio metrico; in questo lavoro supponiamo che la metrica di Σ soddisfi le condizioni:

I) Indicando con $|x - y|$ la distanza di 2 elementi x e y si ha

$$|x - y| \geq |\pi_n(x) - \pi_n(y)|.$$

$$\text{II)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_n(x) - \pi_n(y)| = |x - y|.$$

III) Dato un insieme limitato X di Σ , comunque si prenda una successione $\{X_k\}$ di insiemi contenuti in X , esiste un elemento y di Σ tale che per ogni valore di n la successione $\{\pi_n(X_k)\}$ ammette $\pi_n(y)$ come *elemento di compattezza* ⁽¹⁾. Le tre condizioni enunciate sono soddisfatte per gli spazi di Lagrange, Hilbert, Frechet.

DEFINIZIONE DELLE FUNZIONI $\varphi(X), f(X|y)$. - Dato un insieme X limitato, consideriamo le coppie di elementi x_1, x_2 appartenenti ad X e soddisfacenti la condizione

$$(1) \quad |\pi_n(x_1) - \pi_n(x_2)| < \frac{1}{n};$$

l'estremo superiore delle distanze relative a tali coppie si indicherà con $\varphi(n|X)$; $\varphi(n|X)$ è evidentemente una funzione positiva e non crescente di n , esiste quindi determinato e finito il limite

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n|X) = \varphi(X).$$

Sia invece y un elemento qualsiasi di Σ , avente distanza finita da X ; consideriamo gli elementi x di X soddisfacenti la

$$(3) \quad |\pi_n(y) - \pi_n(x)| < \frac{1}{n}$$

indichiamo con $f(n|X|y)$ l'estremo superiore delle distanze $|y - x|$; se non esistono elementi x soddisfacenti la (3), poniamo $f(n|X|y) = 0$.

Evidentemente $f(n|X|y)$ è una funzione non crescente di n ; esiste, quindi, finito, il limite

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n|X|y) = f(X|y).$$

LEMMA. - Comunque si scelgano l'insieme X e il punto y si ha

$$(5) \quad f(X|y) \leq \varphi(X).$$

Dim. - La (5) è senz'altro verificata nel caso che da un certo indice K in poi non esistano punti x di X che soddisfino la

$$(3') \quad |\pi_k(x) - \pi_k(y)| < \frac{1}{k};$$

(1) Seguo la nomenclatura adottata dal prof. Picone nel suo corso di *Analisi funzionale* tenuto nell'anno accademico 1949-50, all'Università di Roma.

ammettiamo quindi che la (3') sia soddisfatta per ogni indice k ; in particolare preso un n intero qualunque esisterà un elemento x di X per cui

$$(6) \quad |\pi_{2n}(x) - \pi_{2n}(y)| < \frac{1}{2n}.$$

Per la condizione II) esisterà un intero $m > 2n$ tale che

$$(7) \quad |\pi_m(x) - \pi_m(y)| + \frac{1}{2n} > |x - y|.$$

D'altra parte esiste qualche elemento \bar{x} di X tale che

$$(8) \quad |\pi_m(\bar{x}) - \pi_m(y)| < \frac{1}{m} < \frac{1}{2n}.$$

Dalle (6), (7) segue, per la condizione I),

$$(9) \quad |\pi_n(x) - \pi_n(y)| < \frac{1}{2n} \quad ; \quad |\pi_n(\bar{x}) - \pi_n(y)| < \frac{1}{2n}$$

e per la relazione triangolare

$$(10) \quad |\pi_n(x) - \pi_n \bar{x}| < \frac{1}{n}.$$

Ma, per la definizione di $\varphi(n|X)$, dalla (10) segue

$$(11) \quad |\pi_m(x) - \pi_m(\bar{x})| \leq |x - \bar{x}| \leq \varphi(n|X)$$

e quindi dalle (7), (8), (11)

$$(12) \quad |x - y| < \varphi(n|X) + \frac{1}{n}.$$

Ma x era un elemento qualunque di X , soddisfacente la (6), quindi dalla (12) segue la

$$(13) \quad f(2n|X|y) < \varphi(n|X) + \frac{1}{n};$$

passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ottiene la (5).

TEOREMA. - Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme limitato X sia compatto è che $\varphi(X) = 0$.

Dim. - Proviamo la sufficienza. Data una successione di insiemi

$$(14) \quad X_1, \dots, X_n, \dots,$$

per la condizione III) esiste un elemento y tale che per ogni valore di n la successione

$$(15) \quad \pi_n(X_1), \dots, \pi_n(X_n), \dots,$$

ammette $\pi_n(y)$ come elemento di compattezza.

Preso ora un arbitrario numero positivo ε , possiamo sempre, per le (4), (5), trovare un numero intero n tale che

$$(16) \quad f(n|X|y) < \varepsilon.$$

Per la definizione stessa di $f(y|X|n)$ ogni punto x di X che verifichi la

$$(17) \quad |\pi_n(x) - \pi_n(y)| < \frac{1}{n}$$

verifica anche la

$$(18) \quad |x - y| < \varepsilon,$$

ora, essendo $\pi_n(y)$ elemento di compattezza per la successione (15), esisteranno infiniti valori di k per cui

$$(19) \quad I_{1/n}(\pi_n(y)) \cdot \pi_n(X_k) \neq \omega^{(2)};$$

ma per le (17) e (18) ogni valore di k che soddisfa la (19) soddisfa pure la

$$(20) \quad I_\varepsilon(y) \cdot X_k \neq \omega$$

e quindi y è elemento di compattezza della successione (14).

Dimostriamo la necessità. Sia l'insieme X un insieme compatto e sia

$$(21) \quad \varphi(X) > K > 0.$$

Dato un insieme Y contenuto in X indicheremo con $L_n(Y)$ l'insieme degli elementi x contenuti in X e tali che esista almeno un elemento y di Y per cui valgano le

$$(22) \quad |\pi_n(y) - \pi_n(x)| < \frac{1}{n} \quad ; \quad |y - x| > K.$$

Risulta evidente che se M ed N sono due insiemi contenuti in X

$$(23) \quad \text{se } L_n(M) \cdot N \neq \omega, \quad \text{anche } L_n(N) \cdot M \neq \omega,$$

inoltre ricordando il significato di $\varphi(X)$ si vede subito che, per ogni valore di n ,

$$(24) \quad L_n(X) \neq \omega.$$

Consideriamo dunque la successione di insiemi

$$(25) \quad L_1(X) > \dots > L_n(X) > \dots$$

essi avranno per ipotesi un elemento di compattezza t ; non sarà allora mai vuoto l'insieme

$$(26) \quad B_n = L_n(X) \cdot I_{1/n}(t).$$

Osserviamo che dalla (26) segue subito

$$(26') \quad L_n(X) \cdot B_n \neq \omega,$$

e quindi, per la (23), non saranno mai vuoti gli insiemi della successione

$$(27) \quad L_1(B_1) > \dots > L_n(B_n) > \dots$$

che avrà anch'essa almeno un elemento di compattezza Z ; quindi non saranno vuoti gli insiemi

$$(28) \quad L_n(B_n) \cdot I_{1/n}(Z) = C_n.$$

(2) Indico con $I_{1/n}(\pi_n(y))$ l'intorno di raggio $1/n$ dell'elemento $\pi_n(y)$.

Sia ora c_n un elemento di C_n ; essendo

$$(29) \quad L_n(B_n) \cdot c_n \neq \omega \quad \text{sarà pure} \quad L_n(c_n) \cdot B_n \neq \omega.$$

Sia b_n un elemento di $L_n(c_n) \cdot B_n$. Avremo allora, ricordando le (26), (28), (22),

$$(30) \quad |t - b_n| < \frac{1}{n} \quad ; \quad |z - c_n| < \frac{1}{n} \quad ; \quad |b_n - c_n| > K$$

e ricordando la condizione I) e la (22)

$$(31) \quad |\pi_n(t) - \pi_n(b_n)| < \frac{1}{n} \quad ; \quad |\pi_n(z) - \pi_n(c_n)| < \frac{1}{n} \quad ; \quad |\pi_n(b_n) - \pi_n(c_n)| < \frac{1}{n}.$$

Per la relazione triangolare dalle (30), (31) segue

$$(32) \quad |t - z| > k - \frac{2}{n} \quad ; \quad |\pi_n(t) - \pi_n(z)| < \frac{3}{n}.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ e ricordando la condizione II), dalle (32) otteniamo

$$(33) \quad |t - z| \geq k \quad ; \quad |t - z| = 0.$$

Le (33) sono contraddittorie e l'assurdo nasce dall'aver supposto che per un insieme X compatto valga la (21).

Analisi matematica. — *Sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili.*
Nota di EUGENIO LEVI, presentata (*) dal Corrisp. G. ASCOLI.

1. È noto che una funzione $F(x)$, continua in $(0, 1)$, può approssimarsi mediante i polinomi di Bernstein, definiti da

$$B_n F(x) = \sum_0^n T_{n,m}(x) F\left(\frac{m}{n}\right) \quad \text{con} \quad T_{n,m}(x) = \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}$$

sicché si ha, uniformemente in detto intervallo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [B_n F(x) - F(x)] = 0^{(1)}.$$

Si presenta spontanea la domanda, se sia possibile approssimare una funzione $f(x)$, sommabile in $(0, 1)$, mediante le derivate dei polinomi di Bernstein relativi alla funzione integrale di $f(x)$, che è continua.

(*) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

(1) S. BERNSTEIN, *Quelques remarques sur l'interpolation*. «Commun. de la Soc. Math. de Kharkow», 15 (1915-17), pp. 49-61. Cfr. anche: G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. Zanichelli, Bologna, pp. 402-404 (1946). Una dimostrazione più rapida e che dà una miglior misura del grado di approssimazione si trova in: T. POPOVICIU, *Sur l'approximation des fonctions continues d'une variable par des polynomes*. «Ann. Scient. de l'Université de Jassy (Roumanie)», 28, p. 208 (1942).

Si può effettivamente dimostrare il teorema: *La derivata dell' n -esimo polinomio di Bernstein relativo alla funzione integrale della funzione $f(x)$, sommabile in $(0, 1)$, converge per $n \rightarrow \infty$ in media (di ordine 1) verso la funzione $f(x)$.*

In altre parole, posto:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad C_n f(x) = \frac{d}{dx} B_n F(x)$$

si ha:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |C_n f(x) - f(x)| dx = 0.$$

2. Determiniamo la forma esplicita di $C_n f(x)$. Si ha:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{m=0}^n T'_{n,m}(x) F\left(\frac{m}{n}\right) \\ &= \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} m x^{m-1} (1-x)^{n-m} F\left(\frac{m}{n}\right) - \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} (n-m) x^m (1-x)^{n-m-1} F\left(\frac{m}{n}\right) \\ &= \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} m x^{m-1} (1-x)^{n-m} F\left(\frac{m}{n}\right) - \sum_{m=1}^n \binom{n}{m-1} (n-m+1) x^m (1-x)^{n-m} F\left(\frac{m-1}{n}\right) \\ &= \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} m x^{m-1} (1-x)^{n-m} \left[F\left(\frac{m}{n}\right) - F\left(\frac{m-1}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

e quindi:

$$(2) \quad C_n f(x) = \sum_{m=1}^n A_{n,m}(x) \int_{(m-1)/n}^{m/n} f(t) dt \quad \text{con} \quad A_{n,m}(x) = \binom{n}{m} m x^{m-1} (1-x)^{n-m}.$$

D'altra parte, essendo:

$$F\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{s=1}^m \int_{(s-1)/n}^{s/n} f(t) dt.$$

si ha facilmente, sostituendo nella primitiva espressione di $C_n f(x)$,

$$(3) \quad A_{n,m}(x) = \sum_{s=m}^n T'_{n,s}(x).$$

3. Ci serviranno nella dimostrazione le seguenti relazioni:

a) È evidentemente:

$$(4) \quad \sum_{m=0}^n T_{n,m}(x) = [x + (1-x)]^n = 1.$$

b) Essendo ⁽²⁾ $m T_{n,m}(x) = n x T_{n-1,m-1}(x)$ segue:

$$(5) \quad \sum_{m=0}^n m T_{n,m}(x) = n x.$$

(2) Per m negativo deve porsi $T_{n,m} = 0$.

e quindi anche:

$$(6) \quad \sum_{m=0}^n A_{n,m}(x) = n,$$

$$(7) \quad \sum_{m=0}^n (m - nx) T_{n,m}(x) = 0.$$

c) Si può scrivere:

$$m^2 T_{n,m}(x) = m(m-1) T_{n,m}(x) + m T_{n,m}(x) = n(n-1)x^2 T_{n-2,m-2}(x) + m T_{n,m}(x),$$

da cui, tenendo poi conto della (4) e della (5),

$$\begin{aligned} (8) \quad \sum_{m=0}^n (m - nx)^2 T_{n,m}(x) &= \sum_{m=0}^n (m^2 - 2mnx + n^2 x^2) T_{n,m}(x) = \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{m=0}^n T_{n-2,m-2}(x) + (1-2nx) \sum_{m=0}^n m T_{n,m}(x) + n^2 x^2 \sum_{m=0}^n T_{n,m}(x) = \\ &= n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx + n^2 x^2 = nx(1-x). \end{aligned}$$

d) Dalla diseuguaglianza, valida per $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$,

$$\sum x_i y_i = \sum \sqrt{x_i} \cdot \sqrt{y_i} \leq \sqrt{\sum x_i \sum y_i^2}$$

si ricava, tenendo presente la (4) e la (8),

$$(9) \quad \sum_{m=0}^n |m - nx| T_{n,m}(x) \leq \sqrt{\sum_{m=0}^n (m - nx)^2 T_{n,m}(x)} = \sqrt{nx(1-x)}.$$

e) Dalla (3) si ha:

$$(10) \quad \int_0^1 A_{n,m}(x) dx = \sum_{s=m}^n T_{n,s}(1) - \sum_{s=m}^n T_{n,s}(0) = 1 \quad (3).$$

Dimostriamo infine il seguente lemma: *L' integrale in $(0, 1)$ del modulo della funzione approssimante $C_n f(x)$ non supera l' integrale in $(0, 1)$ del modulo di $f(x)$.*

Risultando infatti dalla seconda delle (2) che le $A_{n,m}(x)$ sono sempre positive o nulle, e tenuto conto della (10), si ha:

$$\int_0^1 |C_n f(x)| dx \leq \sum_{m=1}^n \int_0^1 A_{n,m}(x) dx \int_{(m-1)/n}^{m/n} |f(t)| dt = \sum_{m=1}^n \int_{(m-1)/n}^{m/n} |f(t)| dt = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

4. Per dimostrare il teorema consideriamo anzitutto il caso in cui, essendo $0 < a < 1$, sia $f(x) = 0$ per $0 \leq x < a$, $f(x) = 1$ per $a \leq x \leq 1$. La funzione

(3) Le relazioni (5), (7), (8), (9) sono note dal Calcolo delle probabilità. Per le (5) e (8) cfr. anche G. SANSONE, op. cit.

integrale $F(x)$ è allora nulla per $0 \leq x \leq a$, mentre vale $x - a$ per $a \leq x \leq 1$. Dalle (2) risulta subito $C_n f(x) \geq 0$; d'altra parte, essendo $f(x) \leq 1$, si ha:

$$\int_{(m-1)/n}^{m/n} f(t) dt \leq \frac{1}{n}$$

e quindi, per la (6),

$$C_n f(x) \leq \frac{1}{n} \sum A_{n,m}(x) = 1.$$

Dunque $C_n f(x)$ è sempre compreso tra 0 e 1.

Si può allora scrivere:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) - C_n f(x)| dx &= \int_0^a C_n f(x) dx + \int_a^1 (1 - C_n f(x)) dx = \\ &= \int_0^a C_n f(x) dx + 1 - a - \int_a^1 C_n f(x) dx = \\ &= B_n F(a) - B_n F(0) + 1 - a - B_n F(1) + B_n F(a) = 2 B_n F(a) \end{aligned}$$

essendo evidentemente $B_n F(0) = F(0) = 0$, $B_n F(1) = F(1) = 1 - a$.

Ma tenendo conto della (7), e successivamente della (9), si ha:

$$\begin{aligned} B_n F(a) &= \sum_{m \geq na} \left(\frac{m}{n} - a \right) T_{n,m}(a) = \sum_{m \leq na} \left(a - \frac{m}{n} \right) T_{n,m}(a) \\ B_n F(a) &= \frac{1}{2} \sum_0^n \left| \frac{m}{n} - a \right| T_{n,m}(a) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1(1-a)}{n}} \leq \frac{1}{4\sqrt{n}} \end{aligned}$$

perchè per $0 \leq a \leq 1$ è $a(1-a) \leq 1/4$. È dunque:

$$\int_0^1 |f(x) - C_n f(x)| dx \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

e da ciò segue senz'altro, per il caso studiato, la (1).

5. Essendo ora

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{r-1} < x_r = 1,$$

sia $f(x)$ la funzione «a scala» che per $x_{i-1} \leq x < x_i$ assume il valore costante α_i . Tenuto conto che una tale funzione si esprime linearmente mediante funzioni del tipo considerato nel n. 4, e che l'operatore C_n è lineare, è immediato che per essa vale ancora la (1). Si trova precisamente:

$$\int_0^1 |f_n(x) - C_n f(x)| dx \leq \frac{V}{2\sqrt{n}}$$

dove V è la variazione totale di $f(x)$ in $(0, 1)$.

6. Si passa al caso generale di una qualunque funzione $f(x)$ sommabile in $(0, 1)$ fondandosi sul teorema secondo il quale una tale funzione può approssimarsi in media per mezzo di funzioni a scala ⁽⁴⁾. Ottenuta una funzione a scala $\varphi(x)$ per la quale risulti:

$$\int_0^1 |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

si può infatti scrivere:

$$\int_0^1 |C_n f(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)| dx + \int_0^1 |\varphi(x) - C_n \varphi(x)| dx + \int_0^1 |C_n \varphi(x) - C_n f(x)| dx$$

da cui, applicando il lemma del n. 3,

$$\int_0^1 |C_n f(x) - f(x)| dx < 2 \frac{\varepsilon}{3} + \int_0^1 |\varphi(x) - C_n \varphi(x)| dx;$$

e basterà quindi scegliere n in modo che l'ultimo integrale sia $< \varepsilon/3$ per avere

$$\int_0^1 |C_n f(x) - f(x)| dx < \varepsilon,$$

ciò che dimostra il teorema.

Geometria. — *Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue.*
Nota di LEONARD ROTH, presentata^(*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

In occasione della pubblicazione di una recente Nota ⁽¹⁾, il prof. Castelnuovo mi ha chiesto se i metodi ivi esposti potessero servire a determinare le V_3 regolari su cui l'aggiunzione si estingue e se, inoltre, tali V_3 fossero tutte unirazionali. Mentre il problema generale sembra alquanto complicato, quello delle V_3 con numero base uguale ad uno non presenta difficoltà; ad esso è dedicata la presente Nota, dalla quale risulta che le V_3 siffatte riduconsi a pochi tipi birazionalmente distinti e che, all'infuori di due casi dubbi, esse sono unirazionali o birazionali.

1. Supponiamo che, sulla V_3 completamente regolare, tutte le superficie siano multiple d'una sola superficie A , necessariamente regolare; allora, il sistema $|A|$ completo individuato da A non può possedere dei punti base, e le sue curve

(4) Si veggia per esempio: G. ASCOLI, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari.* « Annali di Matem. » (4), 9, pp. 70-71 (1931).

(*) Nella seduta dell' 11 novembre 1950.

(1) L. ROTH, « Rend. Acc. Lincei » (8), 9, 62 (1950).

caratteristiche non possono essere composte con una congruenza, sicchè la sua dimensione $r \geq 3$; però il sistema $|A|$ può essere semplice o composto. Denotando con n, π, p_a i caratteri (grado, genere curvilineo e genere aritmetico) di $|A|$, quelli del sistema $|hA|$, con h intero, deduconsi dalle seguenti formule di Severi⁽²⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} n_0^{(h)} = h^3 n & , & n_1^{(h)} = h^2 (\pi - 1) + h^2 (h - 1) n + 1 , \\ n_2^{(h)} = \binom{h}{3} (n - 1) + \binom{h}{2} \pi + h p_a + \binom{h-1}{3} . \end{cases}$$

Siccome il sistema canonico virtuale $|K|$ è anch'esso della forma $|hA|$, i suoi caratteri virtuali $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ ottengono ponendo $h = k$ nelle (1); tali caratteri devono inoltre soddisfare alla relazione di Pannelli,

$$(2) \quad 2 \Omega_1 - 2 = 3 \Omega_0 .$$

2. Incominciamo col dimostrare che *condizione necessaria e sufficiente affinché su V_3 l'aggiunzione successiva si estingua è che il sistema $|A'|$ aggiunto a $|A|$ sia nullo o virtuale.*

Sia $A' = hA$; allora, se m è un intero positivo qualunque,

$$(mA)' = (m - 1)A + A' = (m + h - 1)A .$$

Pertanto il processo di aggiunzione applicato ad un sistema $|mA|$ qualsiasi, con o senza elementi base, si estingue se, e soltanto se, $h \leq 0$; ed allora il sistema $|K| = |(h - 1)A|$ ed i suoi multipli successivi sono tutti virtuali, come del resto era prevedibile, in quanto l'estinguersi dell'aggiunzione implica l'annullarsi del genere geometrico e dei plurigeneri.

3. Supponiamo dapprima che A' sia virtuale³; quindi i generi p_g, p_a di A sono nulli, e $K = -kA$ ($k \geq 2$). Sostituendo i valori di Ω_0 e Ω_1 dalle (1) nella (2), troviamo che

$$(3) \quad -2(\pi - 1) = (k - 2)n .$$

Poichè $n > 0$, risulta che o $\pi = 0$ oppure $\pi = 1$ (con $k = 2$). Inoltre, nel caso $\pi = 0$, si vede che la (3) ammette soltanto le soluzioni $n = 1, k = 4$, e $n = 2, k = 3$: è qui una dimostrazione aritmetica del fatto che lo spazio S_3 e la quadrica generale V_3^2 sono le uniche V_3 a curve sezioni razionali con numero base uguale ad uno.

Parte di questi risultati si può anche stabilire nella maniera seguente. Consideriamo il sistema $|2A|$ costituito di superficie regolari di genere π ; siccome il sistema $|(2A)'|$ aggiunto ad esso deve segare il sistema canonico completo⁽³⁾ su $2A$, la sua dimensione deve risultare $\pi - 1$; e poichè $(2A)' = -(k - 2)A$, (con $k \geq 2$) discende che $\pi = 0, 1$.

(2) F. SEVERI, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 28, 33 (§ 11) (1909); pel caso delle superficie virtuali, cfr. B. SEGRE, «Mem. R. Acc. d'Italia», 5, 479 (1934).

(3) F. SEVERI, op. cit. (§ 20).

Dal fatto che la superficie regolare A contiene almeno una rete di curve razionali od ellittiche segue⁽⁴⁾ che essa è razionale; e poichè V_3 contiene un sistema lineare, ∞^3 almeno, di superficie razionali a curve caratteristiche razionali od ellittiche, essa risulta unirazionale⁽⁵⁾. Però si può giungere alla stessa conclusione mediante altre considerazioni le quali ci permetteranno di classificare i vari tipi possibili.

4. Per valutare la dimensione r di $|A|$ avremo ricorso al seguente teorema di B. Segre⁽⁶⁾:

Se V_3 è completamente regolare a genere geometrico nullo, $r \geq n - \pi + p_a + 2$. Discende dalle note proprietà delle curve razionali ed ellittiche che, nel caso $\pi = 0$, $r = n + 2$, e che, nel caso $\pi = 1$, $r = n + 1$.

5. Se $\pi = 0$, si vede facilmente che il sistema $|A|$ dev'essere semplice e che, in base al n. 3, può riferirsi (i) ai piani di S_3 , oppure (ii) alle sezioni iperpiane d'una quadrica generale di S_4 .

Se $\pi = 1$ e $|A|$ è semplice, esso può riferirsi alle sezioni iperpiane d'una V_3^n non-singolare di S_{n+1} , a curve sezioni ellittiche, contenente sole intersezioni complete. Dalla classificazione di tali varietà fatta da Enriques⁽⁷⁾ risulta che V_3^n può essere:

(iii) la forma cubica generale di S_4 ;

(iv) l'intersezione completa di due quadriche generali di S_5 ; oppure

(v) la sezione V_3^5 della grassmanniana delle rette di S_4 .

Nel caso (iii) V_3 è unirazionale, mentre negli altri casi essa è birazionale.

Evidentemente vi è un caso solo in cui $|A|$ può essere composto, corrispondente ai valori $n = 2$, $r = 3$; allora $|A|$ può rappresentarsi su (vi) l' S_3 doppio con superficie quartica generale di diramazione; e questa varietà è unirazionale⁽⁸⁾.

6. Occupiamoci ora del caso in cui A' è la superficie nulla; allora A è una superficie regolare con curva canonica pura di ordine zero, sicchè $n = 2\pi - 2$ e, in base al n. 4, $r = \pi + 1$ ($\pi \geq 2$).

Nel caso in cui $|A|$ è semplice, esso può riferirsi al sistema delle sezioni iperpiane d'una $V_3^{2\pi-2}$ non-singolare di $S_{\pi+1}$, contenente sole intersezioni complete. Questa classe di varietà, la quale è stata studiata da Fano⁽⁹⁾, comprende i tipi seguenti:

(4) Pel caso delle curve ellittiche, ved. G. CASTELNUOVO, «Rend. Acc. Lincei», (5) 3, 473 (1894)₁.

(5) F. ENRIQUES, «Math. Annalen», 49, 1 (1897).

(6) B. SEGRE, «Mem. Acad. roy. Belgique» (2), 14, § 9 (1936).

(7) F. ENRIQUES, «Math. Annalen», 46, 181 (1895).

(8) L. ROTH, op. cit.

(9) G. FANO, *Scritti matematici offerti a L. Berzolari* (Pavia, 1936), 329; «Mem. R. Acc. d'Italia» 8, 23 (1937); «Comm. Math. Helvetici», 14, 203 (1941).

(vii) la forma quartica generale di S_4 ;

(viii) l'intersezione V_3^6 d'una forma cubica ed una quadrica di S_5 ;

(ix)–(xiv) altre varietà corrispondenti ai valori $5 \leq \pi \leq 10$; le curve sezioni generiche di queste varietà sono sempre curve canoniche generali.

Mentre (vii) è di dubbia unirazionalità, tutti gli altri sono unirazionali ed in particolare, per $\pi = 7, 9, 10$, birazionali. Il fatto che varietà di questo genere non esistono per $\pi > 10$ è implicito nei risultati ottenuti da Fano, e lo si dimostra come segue.

Ogni $V_3^{2\pi-2}$ (detta di prima specie) contiene una rigata, in generale irriducibile, ed un sistema ∞^2 , pure irriducibile, di coniche. Se $\pi > 4$, la proiezione di $V_3^{2\pi-2}$ da una retta l è una $V_3^{2\pi-6}$ a curve sezioni canoniche, non più di prima specie, bensì contenente una rigata cubica normale R^3 . Nel caso $\pi \geq 9$, si può dimostrare che gli iperpiani passanti per R^3 segano su $V_3^{2\pi-6}$ un sistema $\infty^{\pi-6}$ di superficie razionali di ordine $2\pi - 9$, a curve caratteristiche razionali di ordine $2\pi - 14$ e di grado $\pi - 8$. Tale sistema (che rappresenta quello delle sezioni iperpiane di $V_3^{2\pi-2}$ con retta l doppia) è quindi immagine d'una $V_3^{\pi-8}$ di $S_{\pi-6}$ a curve sezioni razionali. Ora, in questa rappresentazione vi sono due superficie fondamentali, e precisamente quella corrispondente alla retta l , e la superficie luogo delle coniche incidenti a l ; eppertanto il numero base di $V_3^{2\pi-2}$ deve risultare uguale a quello di $V_3^{\pi-8}$, il che vuol dire che $\pi \leq 10$. Una conclusione analoga vale per le $V_4^{2\pi-2}$ di prima specie, ma può ottenersi per via diversa ⁽¹⁰⁾.

7. Se, al contrario, il sistema $|A|$ è composto, le sue curve caratteristiche, che sono canoniche, devono essere iperellittiche; in questo caso $|A|$ può riferirsi alle sezioni iperpiane d'una V_3 doppia, a curve sezioni razionali, contenente sole intersezioni complete. Quindi vi sono due possibilità:

(xv) $\pi = 2$: l' S_3 doppia con superficie sestica generale di diramazione;

(xvi) $\pi = 3$: la V_3^2 generale doppia con superficie di diramazione dell'ottavo ordine, intersezione di V_3^2 con una forma quartica.

Il tipo (xv) è probabilmente non unirazionale sebbene lo siano alcuni sottotipi ben noti, ad esempio quello che si ottiene proiettando (viii) da una sua retta. Invece (xvi) è unirazionale; difatti le rette di V_3^2 che passano per un suo punto hanno per immagine un sistema razionale ∞^1 di curve ellittiche passanti per ciascuno dei punti corrispondenti della varietà W_3 semplice. Mediante tal sistema, e col procedimento della Nota già citata, si perviene a costruire su W_3 un sistema ∞^3 di curve razionali e quindi ad ottenere una rappresentazione unirazionale della varietà suddetta.

8. Dalle precedenti indagini risulta che vi sono 16 specie di varietà del tipo richiesto e che, all'infuori dei casi dubbi (vii) e (xv), esse sono unirazionali o birazionali; esaminiamo ora le varie irrazionalità da cui dipendono le note rappresentazioni unirazionali o birazionali di ciascuna delle 14 specie.

(10) L. ROTH, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 46, 419 (1950).

Adoperando le notazioni di un antecedente lavoro⁽¹¹⁾, supposta la V_3 in parola definita in un campo K , denotiamo con $K(P)$ o $K(l)$ l'estensione di K ottenuta aggiungendovi l'irrazionalità da cui dipende la determinazione di un suo punto P od una sua retta l . Allora otteniamo i risultati seguenti:

(i) $L'S_3$ è birazionale in K , e (ii) la V_3^2 è birazionale in $K(P)$.

(iii)-(vi) Queste varietà sono tutte unirazionali in $K(P)$, come risulta dalla Nota già citata. Si può dire inoltre che (iii) è unirazionale in $K(l)$, e che (iv) è birazionale in $K(l)$, in quanto vien proiettata in S_3 da una sua retta. E risulta da un teorema di Enriques (op. cit. in ⁽⁷⁾) che (v) è birazionale in K .

(viii) Si perviene alla nota rappresentazione unirazionale di V_3^6 introducendo l'estensione K' di K in cui si può effettuare la separazione dei due sistemi di cubiche piane giacenti su di essa; secondo un risultato classico di Enriques⁽¹²⁾, V_3^6 è unirazionale in $K'(P)$.

(ix)-(xiv) Dalle ricerche di Fano risulta che (ix), (x), (xii) sono unirazionali, e (xi), (xiii), (xiv) birazionali, in $K(l)$. È interessante notare che (xi), cioè la V_3^{12} di S_8 , è pure birazionale in $K(P)$ poichè vien proiettata, da un suo spazio tangente, in una M_4^1 di S_4 contenente una superficie non normale di Veronese; e siccome quest'ultima possiede un punto triplo apparente, M_4^1 può rappresentarsi su S_3 senza introdurre altre irrazionalità. Il tipo (xii), che è birazionalmente equivalente alla forma cubica (iii), è pure unirazionale in $K(P)$; ed infine (xvi) è unirazionale in $K(P)$. Quindi tutte le 14 varietà sono unirazionali o birazionali in K , $K(P)$, $K(l)$ oppure $K'(P)$.

9. Aggiungiamo qualche osservazione a proposito delle V_3 irregolari; in tali casi il sistema $|A|$ potrebbe risultare di dimensione minore di 3, ma qualora non soddisfacesse alle condizioni del n. 1 dovrebbe appartenere ad un sistema $\{A\}$ continuo, ∞^1 almeno, senza punti base e con curve caratteristiche non composte. E siccome rimangono sempre validi i risultati del n. 2 e la dimostrazione aritmetica del n. 3, per trovare dei tipi nuovi bisogna supporre che A sia irregolare.

(i) Se A' è virtuale, i generi di A hanno i valori $p_g = 0$, $p_a \leq -1$; ma allora è ammissibile soltanto l'ipotesi $\pi = 1$, da cui risulta che A dev'essere riferibile ad una rigata ellittica, in quanto contiene un sistema infinito, a grado positivo, di curve ellittiche. In base al n. 2, se $\pi = 1$, $K = -2A$, e quindi $(2A)' = 0$; pertanto il sistema $|2A|$ è costituito di superficie irregolari a curva canonica di ordine zero, cioè superficie iperellittiche ($p_g = 1$, $p_a = -1$). Dalle (1) troviamo che $\Omega_0 = -8n$, $\Omega_1 = 12n + 1$, $\Omega_2 = -4n - 1$, sicchè, dalla relazione di Severi $2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4$, discende che $P_a = 1$.

(ii) Se invece A' è nulla ($K = -A$) la superficie A dev'essere iperellittica, con $p_g = 1$, $p_a = -1$, $n = 2\pi - 2$. Dalle (1) abbiamo $\Omega_0 = -2\pi + 2$, $\Omega_1 = -3\pi + 4$, $\Omega_2 = -\pi$, e quindi $P_a = 1$. Però non è noto nessun esempio di questi due tipi di varietà.

(11) L. ROTH, « Boll. U. M. I. » (3), 5 (1950).

(12) F. ENRIQUES, « Rend. Acc. Lincei » (5), 21, 81 (1912).

Meccanica. — *Sul campo elettromagnetico «ortogonale» nello spazio-tempo.* Nota I ^(*) di ALDO M. PRATELLI, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

Nello spazio-tempo quadridimensionale il campo elettromagnetico è individuato da un tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$, il tensore elettromagnetico, e dal vettore J_α , che rappresenta la distribuzione elettrica. Il tensore $F_{\alpha\beta}$ ammette due invarianti non identicamente nulli, entrambi quadratici, indipendenti: il *primo*, \mathfrak{A} , ottenuto mediante saturazione del tensore elettromagnetico col tensore fondamentale della metrica, e il *secondo*, \mathfrak{B} , ottenuto mediante saturazione col tensore quadruplo di Ricci.

Allorchè lo spazio-tempo è pseudoeuclideo è la metrica pseudopitagorica, il *primo* è uguale alla differenza tra il quadrato del vettore spaziale \mathbf{H} (rappresentante il campo magnetico) e il quadrato del vettore spaziale \mathbf{E} (rappresentante il campo elettrico) ed è quindi, nel vuoto, proporzionale alla densità d'azione elettromagnetica; il *secondo* è proporzionale al prodotto scalare dei due vettori \mathbf{E} ed \mathbf{H} ; esso è quindi nullo se il campo è magnetostatico ($\mathbf{E} = 0$) oppure elettrostatico ($\mathbf{H} = 0$) o, caso ben più importante, quando i due vettori spaziali suindicati son tra di loro ortogonali. L'annullarsi di \mathfrak{B} reca anche come conseguenza che il tensore $F_{\alpha\beta}$ è « semplice », cioè esso è un « bivettore », esprimibile come prodotto esterno (di Grassmann) di due convenienti vettori a quattro componenti.

La sola ipotesi alla base di queste due Note è che, indipendentemente dall'annullarsi di \mathfrak{A} , sia nullo \mathfrak{B} ; allo scopo di mettere in evidenza la corrispondente ortogonalità dei due vettori spaziali \mathbf{E} ed \mathbf{H} , denomino brevemente « ortogonali » i campi elettromagnetici siffatti. L'ipotesi $\mathfrak{B} = 0$ ha l'aspetto, dal punto di vista matematico, di una ipotesi molto restrittiva, in quanto sembra limitare lo studio a un caso molto particolare, ma non è così se si pensa al significato fisico: vi soddisfano, ad esempio, ampie classi di onde elettromagnetiche ⁽¹⁾ e la classe più ristretta costituita dai campi elettromagnetici puri di Levi-Civita ⁽²⁾.

Un teorema di Ch. Méray ⁽³⁾ afferma che ogni tensore emisimmetrico semplice irrotazionale può esprimersi come prodotto esterno di gradienti di convenienti funzioni scalari. Ora il tensore elettromagnetico è appunto irrotazionale per effetto di quelle equazioni di Maxwell le quali assicurano che non esistono cariche magnetiche libere; è semplice per effetto dell'ipotesi $\mathfrak{B} = 0$; ad esso posso quindi

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1950.

(1) Cfr. G. Y. RAINICH, *Electrodynamics in the General Relativity Theory*. « Trans. Am. Math. Soc. », vol. 27, pp. 106-136 (1925); J. L. SYNGE, *Principal null-directions defined in space-time ecc.*, « Univ. Toronto Stud. », n. 1 (1935); H. S. RUSE, *On the Geometry of the Electromagnetic Field*. « Proc. London Math. Soc. », vol. 41, pp. 302-331 (1936).

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Sui campi elettromagnetici puri*. « Atti R. Ist. Ven. », vol. 67, pp. 995-1010 (1907-8).

(3) Dimostrato da CH. MÉRAY, *Intégration d'une différentielle totale binaire*. « Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. », vol. 6, pp. 509-520 (1899); la dimostrazione valida per le varietà generiche si trova in J. A. SCHOUTEN and W. v. d. KULK, *Pfaff's Problems*, Oxford, p. 135 (1949).

applicare il teorema di Méray, traendone conseguenze significative: ed è questo il fine che mi propongo nella presente Nota e nella successiva.

Nel § 1 faccio rilevare che la circolazione elementare, nello spazio-tempo, del potenziale spazio-temporale φ_α (il quale è un vettore con quattro componenti) pur non essendo mai un differenziale esatto, ammette un fattore integrante, mentre il vettore φ_α dipende, sostanzialmente, da *due* scalari.

Nel § 2 dimostro che, come il lavoro di un vettore irrotazionale lungo una curva dello spazio tridimensionale euclideo $S_{(3)}$ è esprimibile mediante i valori che la funzione potenziale dello stesso assume nei punti estremi della curva, così il lavoro del tensore elettromagnetico lungo una superficie (varietà bidimensionale orientata dello spazio-tempo) è esprimibile mediante i valori assunti al contorno dalla coppia di scalari ⁽⁴⁾.

Nel § 3 mostro l'esistenza di convenienti ipersuperfici (varietà tridimensionali orientate dello spazio-tempo) tali che il lavoro del tensore $F_{\alpha\beta}$ lungo le superfici aperte in esse immerse è nullo; denomino « equipotenziali » tali ipersuperfici, perchè svolgono ufficio analogo a quello delle superfici equipotenziali dello spazio $S_{(3)}$. Si ritrovano, come intersezioni di due ipersuperfici equipotenziali, le superfici « elettropotenziali » già studiate (da un diverso punto di vista) da E. T. Whittaker ⁽⁵⁾.

In tutto il seguito non farò nessuna specifica ipotesi relativamente al vettore J_α : si comprende che (come esporrò brevemente nel § 4) qualora questo vettore fosse identicamente nullo, cioè il campo elettromagnetico fosse neutro, il tensore elettromagnetico sarebbe contemporaneamente irrotazionale e solenoidale, e potrebbero ripetersi per il tensore coniugato di $F_{\alpha\beta}$ (che ho denominato « magnetoelettrico » e indicato con $*F^{\gamma\delta}$) le considerazioni e le proprietà stabilite per il tensore elettromagnetico.

§ 1. CONDIZIONI AFFINCHÈ IL TENSORE ELETTROMAGNETICO $F_{\alpha\beta}$ SIA SEMPLICE. — Nello spazio-tempo pseudoeuclideo della relatività ristretta, detta x_0 la coordinata temporale e x_1, x_2, x_3 le coordinate spaziali, può attribuirsi alla metrica la forma pseudopitagorica ⁽⁶⁾

$$(1) \quad ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx_0 dx^0 - dx_r dx^r \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3; r = 1, 2, 3).$$

(4) Il solo vago accenno alla possibilità di esprimere il tensore elettromagnetico come prodotto esterno di gradienti di due scalari, e alla possibilità di trovare un fattore integrante per la circolazione elementare $\varphi_\alpha dx^\alpha$, si trova, a quanto mi consta, in uno scambio epistolare tra W. G. BROWN e E. T. WHITTAKER: cfr. C. G. KNOTT, *Biographical Notice of W. G. Brown*, «Proc. of the R. Soc. of Edinburgh», vol. 42, pp. 242-244 (1921-22).

(5) Cfr. E. T. WHITTAKER, *On tubes of Electromagnetic Force*, «Proc. of the R. Soc. of Edinburgh», vol. 42, pp. 1-23 (1921-22).

(6) Indicata con c la velocità della luce nel vuoto, $x_0 = ct$ è il tempo espresso in unità römmeriane. Nel seguito, userò sempre lettere greche per gli indici che possono assumere i valori 0, 1, 2, 3, e lettere latine per gli indici, puramente spaziali, 1, 2, 3; resta sottinteso il segno di sommatoria rispetto agli indici di covarianza che saturano altrettanti indici di controvarianza; gli indici preceduti da una lineetta inclinata sono di derivazione tensoriale. Per maggiori notizie sui simboli usati cfr. B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna (1949).

Il tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ è, secondo la concezione del Minkowsky, un tensore doppio emisimmetrico (cioè di segno contrario al suo trasposto $F_{\beta\alpha}$, e in cui quindi le componenti non nulle, essenzialmente distinte, da 16 si riducono a 6). Indicato con $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ il tensore emisimmetrico quadruplo di Ricci (avente, nel riferimento (1), le componenti immaginarie) il tensore magnetoelettrico $*F^{\gamma\delta}$, coniugato del tensore elettromagnetico, è il risultante del prodotto interno del tensore elettromagnetico col tensore di Ricci

$$*F^{\gamma\delta} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta}.$$

Il tensore elettromagnetico si definisce ponendo ⁽⁷⁾

$$F_{ko} = E_k = -F_{ok} \quad ; \quad *F^{ko} = i H^k = -*F^{ok} \quad (k = 1, 2, 3)$$

ove E_k e H_k sono le componenti dei vettori spaziali elettrico e magnetico, e i è l'unità immaginaria.

L'invariante lineare di $F^{\alpha\beta}$ è nullo; quelli quadratici sono i prodotti interni del tensore elettromagnetico per se stesso (« norma ») o per il proprio coniugato $*F^{\gamma\delta}$:

$$(2) \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} = H^2 - E^2$$

$$(3) \quad \mathcal{B} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} *F^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = 2 i E_k H^k = 2 i (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

ove il prodotto scalare dell'ultimo membro della (3) è il classico prodotto scalare dei due vettori spaziali \mathbf{E} ed \mathbf{H} ; \mathcal{B} è quindi nullo tutte le volte che è nullo uno dei due vettori, oppure quando è retto l'angolo da essi formato.

Le equazioni di Maxwell-Lorentz, in forma tensoriale, sono ⁽⁸⁾:

$$(4) \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \quad F_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = J_\alpha.$$

La prima afferma che il tensore elettromagnetico è *irrotazionale*; la seconda afferma che la *divergenza* del tensore elettromagnetico eguaglia il vettore J_α ; questi rappresenta la distribuzione elettrica nello spazio e nel tempo, ed è definito assumendo come componente temporale la densità elettrica ρ e come componenti spaziali quelle del vettore $\rho/c \mathbf{v}$, che è proporzionale alla corrente specifica di convezione.

Un generico tensore doppio emisimmetrico $V_{\alpha\beta}$ in una varietà riemanniana $V_{(n)}$ si dice « semplice » allorchando è esprimibile come prodotto esterno (di Grassmann) di due vettori indipendenti c_α e d_β ; esprimibile in infiniti modi, in quanto se $V_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} c_\gamma d_\delta = c_\alpha d_\beta - c_\beta d_\alpha$, possiamo trovare sempre altri due

(7) Più ampi ragguagli, sulle definizioni e sulle proprietà qui richiamate, si trovano in A. M. PRATELLI, *Lavoro e flusso dei tensori emisimmetrici*. « Rend. Ist. Lombardo », vol. 82, pp. 12-28 (1949); nel seguito denominerò brevemente « Nota A » tale Nota; A. M. PRATELLI, *Sui tensori emisimmetrici coniugati*, ivi pp. 473-487 (« Nota B »); A. M. PRATELLI, *I tensori coniugati del campo elettromagnetico*, in corso di stampa nel vol. 83 degli stessi « Rendiconti » (« Nota C »).

(8) Cfr. B. FINZI, *Formulazione integrale delle leggi elettromagnetiche nello spazio-tempo*. Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. 5, pp. 203-211 (1948).

vettori che ammettono lo stesso prodotto esterno, ad esempio moltiplicando un fattore per un numero arbitrario, e dividendo l'altro fattore per il medesimo numero. Denominato brevemente « bivettore » un « tensore doppio emisimmetrico semplice », la condizione caratteristica affinché un tensore doppio emisimmetrico sia un bivettore è che sia nullo il prodotto interno del tensore stesso per il proprio coniugato; prodotto interno che coincide col *secondo* invariante del tensore quando il numero n delle dimensioni della varietà ambiente è, come appunto nello spazio-tempo, eguale a 4⁽⁹⁾. Ad ogni bivettore $V_{\alpha\beta}$ possiamo far corrispondere un piano orientato, avente per retta impropria la congiungente i punti impropri dei due vettori c_α e d_β , fattori del prodotto esterno.

Condizioni differenziali. - L'integrale generale della prima delle (4) è $F_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta/\alpha} - \varphi_{\alpha/\beta}$, ove il vettore spazio-temporale φ_α rappresenta il potenziale elettromagnetico⁽¹⁰⁾; e d'altra parte il teorema di Méray ci assicura che condizione caratteristica affinché valga la (4) unitamente alla condizione $\mathcal{B} = 0$, è che sia

$$(4') \quad F_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} f_{/\gamma} g_{/\delta} = f_{/\alpha} g_{/\beta} - f_{/\beta} g_{/\alpha}$$

ove $f = f(x^\alpha)$, $g = g(x^\alpha)$ sono due scalari, funzioni delle x^α . In conseguenza di ciò la più generale espressione del potenziale spazio-temporale φ_α è

$$(5) \quad \varphi_\alpha = h_{/\alpha} + \frac{1}{2} (f g_{/\alpha} - g f_{/\alpha})$$

ove $h = h(x^\alpha)$ è uno scalare arbitrario; della presenza del gradiente arbitrario $h_{/\alpha}$ possiamo giovarci (come nel caso $\mathcal{B} \neq 0$) per porre la condizione che φ_α sia solenoidale: e troviamo così (mediante semplice calcolo) che la divergenza di φ_α è nulla se, fissati f e g , si assume lo scalare h , arbitrario, in modo che esso sia soluzione dell'equazione

$$h_{/\alpha}{}^\alpha = - (f g_{/\alpha}{}^\alpha - g f_{/\alpha}{}^\alpha).$$

Naturalmente possiamo approfittare dell'arbitrarietà di h per assumere, in base a criteri di comodità,

$$(5') \quad \varphi_\alpha = -f g_{/\alpha} \quad \text{oppure} \quad \varphi_\alpha = g f_{/\alpha}.$$

L'espressione differenziale $\varphi_\alpha dx^\alpha$ esprime la circolazione elementare (o lavoro elementare) nello spazio-tempo del vettore φ_α ; tale espressione non è mai un differenziale esatto (altrimenti $F_{\alpha\beta} \equiv 0$) ma può ammettere un fattore integrante; se μ è un tale fattore, allora vuol dire che è definita una $g = g(x^\alpha)$ tale che $dg = \mu \varphi_\alpha dx^\alpha$, cosicchè basta prendere $f(x^\alpha) = -1/\mu$ per vedere che il potenziale ha la prima forma delle (5').

(9) Cfr. il teorema II della Nota B, (p. 481). Le componenti covarianti $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ del tensore di Ricci sono, per definizione, eguali a $\pm \sqrt{|\det a_{\alpha\beta}|} = \pm \sqrt{-1}$, a seconda della classe della sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ 0123 \end{pmatrix}$. Per il legame tra il tensore di Ricci e il tensore $a_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = a_\alpha^\gamma a_\beta^\delta - a_\beta^\gamma a_\alpha^\delta$, cfr. B. FINZI e M. PASTORI, loc. cit. (6), p. 91.

(10) Ricordo che la componente temporale φ_0 si pone eguale al potenziale scalare α , mentre le componenti spaziali φ_r si identificano con le componenti cartesiane del potenziale vettore \mathbf{A} ; cfr. B. FINZI e M. PASTORI, loc. cit. (6), p. 355.

Viceversa, supposta verificata la prima dellè (5') (o una delle equivalenti) segue

$$\varphi_a dx^a = -fg_{/a} dx^a = -fdg.$$

In conclusione, condizione caratteristica affinché l'espressione differenziale $\varphi_a dx^a$ ammetta un fattore integrante, è che il tensore elettromagnetico sia semplice.

Condizioni geometriche. — Sulla base delle mutue relazioni tra due piani in una varietà quadridimensionale⁽¹¹⁾, possiamo dire *paralleli* nello spazio-tempo due bivettori che abbiano le sei componenti ordinatamente proporzionali in un generico riferimento; *semiparalleli* se hanno uno dei due fattori a comune. Due bivettori si dicono *semiperpendicolari* se un fattore dell'uno è perpendicolare ai due fattori dell'altro (e in tal caso è nullo il prodotto interno dei due bivettori); *totalmente perpendicolari*, infine, se ogni fattore dell'uno è perpendicolare a ogni fattore dell'altro (e in tal caso, oltre a essere nullo il prodotto interno dei due bivettori, son nulli i quattro prodotti interni di ognuno dei fattori dell'uno con ognuno dei fattori dell'altro). Il caso della *totale perpendicolarità* si può verificare solo in una varietà quadridimensionale, mentre il caso della *semiperpendicolarità* è il caso che ordinariamente si presenta negli spazi tridimensionali.

Data una famiglia di ∞^1 ipersuperfici, esiste sempre una congruenza di curve che tagliano ad angolo retto tutte le ipersuperfici, e che costituiscono le loro traiettorie ortogonali; assegnata invece una congruenza di curve, non sempre esiste una famiglia di ipersuperfici che le ammettono come traiettorie ortogonali: se la famiglia esiste, la congruenza delle curve si dice *normale*⁽¹²⁾. È ben noto come si costruisce la congruenza delle linee vettoriali φ_a : se il vettore φ_a ha la forma (5'), la congruenza è costituita dalle traiettorie ortogonali alla famiglia di ipersuperfici di equazione $g(x^a) = c_2$ oppure a quella delle ipersuperfici $f(x^a) = c_1$, ove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie. Viceversa, se consideriamo la famiglia di ipersuperfici $g = c_2$ oppure $f = c_1$, è manifesta la espressione del vettore ortogonale a queste⁽¹³⁾.

Risulta così dimostrato che, se la congruenza delle linee vettoriali del potenziale spazio-temporale è normale, il tensore elettromagnetico è semplice; se il tensore elettromagnetico è semplice, il potenziale spazio-temporale può esser determinato in modo che le sue linee di flusso costituiscano una congruenza normale.

(11) Cfr. Nota B, pp. 484-486.

(12) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. Bologna p. 279 (1933); cfr. anche Nota C, form. (17).

(13) Nel seguito, col termine *superficie* indicherò sempre una varietà orientata bidimensionale, col termine *ipersuperficie* una varietà orientata tridimensionale. Se il vettore φ_a ha la forma $\varphi_a = 1/2 (gf_{/a} - fg_{/a})$, esso è combinazione lineare di un vettore normale alla ipersuperficie $f(x^a) = c_1$ con uno normale alla $g(x^a) = c_2$; esso giace nel piano normale (inteso nel senso di totalmente perpendicolare) alla superficie intersezione delle due ipersuperfici; in questo caso non si può, a rigore, parlare di congruenza normale. È evidente inoltre che l'aggiunta dell'inessenziale gradiente arbitrario $h_{/a}$ può recare come conseguenza che la congruenza delle linee di flusso di φ_a non sia più normale.

Osservazione I. - La condizione che la congruenza delle linee vettoriali φ_α sia normale, può tradursi nella condizione

$$(5'') \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_\alpha \varphi_\beta / \gamma = 0.$$

Ciò permette di affermare che *deve esser nullo il prodotto interno del potenziale per il suo rotore*, il che equivale a dire che la direzione di φ_α è perpendicolare al piano contenente il suo rotore (che è il bivettore magnetoelettrico $*F\gamma^\delta$) ed è quindi parallela nello spazio-tempo al piano del bivettore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ ⁽¹⁴⁾.

Se u è un vettore spaziale posizionale, è evidente l'analogia con la proprietà di cui gode il lavoro elementare $u \times dP$, espressione differenziale che, nello spazio euclideo $S_{(3)}$, ammette un fattore integrante se è verificata la condizione caratteristica $u \times \text{rot } u = 0$.

Osservazione II. - Da tutto quanto precede si può trarre la conclusione che *il potenziale spazio-temporale φ_α dipende, in sostanza, dalla « coppia » di funzioni potenziali f e g , e che queste non hanno un preciso significato prese separatamente, ma solo se considerate nel loro insieme.*

Meccanica. — *Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein.* Nota ^(*) di PAOLO UDESCHINI, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

In appendice alla terza edizione del libro *The Meaning of Relativity* ⁽¹⁾ Einstein dà una suggestiva soluzione del problema relativistico unitario, del problema cioè di istituire una teoria geometrica dei fenomeni gravitazionali ed elettromagnetici, i soli fenomeni elementari ai quali possono ridursi, in estrema analisi, tutti i fenomeni fisici attualmente noti nel macrocosmo.

In questa teoria lo spazio-tempo è un continuo quadridimensionale non riemanniano e la sua geometria è individuata assegnando in ogni punto un unico tensore doppio fondamentale non però simmetrico: la sua parte simmetrica è la sola che interviene nella metrica ed è atta a caratterizzare il campo gravitazionale, in assenza di campo elettromagnetico; la parte emisimmetrica ha per coniugato un tensore che può interpretarsi come tensore elettromagnetico.

Le ultime definitive equazioni di questa teoria unitaria costituiscono il perfezionamento di precedenti tentativi del 1945-46-48. Nel 1946 ⁽²⁾ Einstein e Straus diedero le equazioni di prima approssimazione, assumendo per il campo unitario una primitiva formulazione alquanto diversa dall'attuale.

(14) La presente form. (5'') è dedotta con semplici passaggi dalla form. [6] a p. 281 di T. LEVI-CIVITA, loc. cit. (12) (form. esprimente la condizione caratteristica affinché una congruenza sia normale). I due bivettori $F_{\alpha\beta}$ e $*F\gamma^\delta$ individuano due piani totalmente perpendicolari (cfr. Nota B, p. 486) e sono (a meno di inessenziali fattori numerici) l'uno il gradiente e l'altro il rotore del vettore φ_α (cfr. form. (11) della Nota C).

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 novembre 1950.

(1) EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, Princeton University, trad. it. Einaudi editore (1950).

(2) EINSTEIN e STRAUS, « Ann. of Math. », vol. 47, p. 731 (1946).

In questa Nota dò le equazioni di prima approssimazione, per le regioni vuote dello spazio, partendo dalle definitive [equazioni della teoria unitaria. Ottengo il seguente risultato: il campo gravitazionale e quello elettromagnetico si separano; le equazioni riguardanti la gravitazione sono quelle stesse dell'ordinaria teoria relativistica gravitazionale e le equazioni riguardanti il campo elettromagnetico sono le equazioni di Maxwell dei campi neutri.

Tutto questo vale, ben inteso, in prima approssimazione e non rigorosamente. Mostrerò anzi in una Nota successiva come già in seconda approssimazione non sia possibile separare le equazioni del campo gravitazionale da quelle del campo elettromagnetico.

1. EQUAZIONI DEL CAMPO UNITARIO. — Nella nuova teoria unitaria di Einstein lo spazio-tempo è un continuo quadridimensionale non riemanniano. Ad ogni suo punto corrisponde un evento elementare individuato da una coordinata temporale x^0 e da tre coordinate spaziali $x^1 x^2 x^3$; la sua geometria è tutta individuata assegnando in ogni punto un unico tensore doppio fondamentale g_{ik} non simmetrico. Se si scompone il tensore g_{ik} nella sua parte simmetrica ed emisimmetrica, $\underline{g_{ik}}$ e $\underset{\vee}{g_{ik}}$ rispettivamente, secondo la relazione

$$g_{ik} = \underline{g_{ik}} + \underset{\vee}{g_{ik}} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

soltanto la prima interviene nella metrica $ds^2 = \underline{g_{ik}} dx^i dx^k$. La parte emisimmetrica interviene tuttavia nel determinante $||g_{ik}||$ e nel passaggio dalla forma covariante alla controvariante di un tensore.

I coefficienti di connessione non costituiscono un tensore e li indicheremo con $\Gamma_{(ik)}^l$. Essi non sono simmetrici rispetto ai due indici i e k , fra parentesi, e la parte emisimmetrica $\underset{\vee}{\Gamma_{ik}^l}$ costituisce un tensore emisimmetrico. Questi coefficienti di connessione sono definiti, a partire dal tensore g_{ik} , in modo che sia nullo il tensore derivato del tensore fondamentale, quando si derivi secondo l'ordine degli indici indicato nella seguente formula:

$$(2) \quad \underset{+-}{g_{ik|l}} = g_{ik,l} - g_{sk} \Gamma_{(il)}^s - g_{is} \Gamma_{(lk)}^s = 0 \quad (i, k, l = 0, 1, 2, 3)^{(3)}$$

nella quale gli indici i e k devono restare al loro posto sia nel tensore fondamentale che nei coefficienti di connessione.

Definiti con la (2) i coefficienti di connessione, le equazioni del campo unitario, nelle regioni vuote di materia e di energia, sono le seguenti ⁽⁴⁾:

$$(3) \quad \begin{cases} R_{ik} = \Gamma_{(ik),s}^s - \frac{1}{2} (\Gamma_{(is),k}^s + \Gamma_{(ks),i}^s) + \Gamma_{(ik)}^s \Gamma_{(sl)}^l - \Gamma_{(il)}^s \Gamma_{(sk)}^l = 0; \\ \Gamma_i = \underset{\vee}{\Gamma_{ik}^k} = 0 \end{cases}$$

(3) La sbarretta precedente indici indica derivazione tensoriale, la virgola precedente indici indica derivazione ordinaria. Al solito si sopprimono le sommatorie quando si satura un indice di covarianza con un indice di controvarianza. Gli indici assumono d'ordinario i valori 0, 1, 2, 3.

(4) Cfr. appendice II del libro I° citato.

Le prime delle (3) generalizzano le equazioni della teoria relativistica gravitazionale negli spazi vuoti, e a queste si riducono allorchè $g_{ik} = 0$ e $\Gamma_{(ik)}^s$ sono gli ordinari simboli di Christoffel di seconda specie. Le seconde delle (3) affermano che è nullo il vettore ottenuto contraendo il tensore emisimmetrico, detto di torsione, Γ_{ik}^s .

Le (2) e (3) costituiscono un sistema di 84 equazioni in 80 incognite; i 64 coefficienti di connessione $\Gamma_{(ik)}^s$ e le 16 componenti del tensore fondamentale g_{ik} . Fra queste 84 equazioni sussistono per altro le seguenti identità

$$(4) \quad \epsilon^{ikrs} * g_{ik,r}^{\vee} = 0 \quad (5)$$

dove ϵ^{ikrs} è il tensore di Ricci nello spazio tempo, e $* g_{\vee}^{ik} = \frac{1}{2} \epsilon^{ikrs} g_{rs}^{\vee}$ è il tensore coniugato di g_{rs}^{\vee} .

L'identità (4) scende dall'identità $\mathfrak{G}_{\vee,s}^{is} = 0$ (4). Infatti la densità tensoriale \mathfrak{G}^{ik} è legata al tensore g^{ik} dalla relazione: $\mathfrak{G}^{ik} = W g^{ik}$, dove $W = \sqrt{-\|g_{ik}\|}$, e $W_{;\mu} = W_{,l} - W \Gamma_{(l)}^s = 0$; si ha

$$\mathfrak{G}_{\vee,s}^{is} \equiv W(g_{\vee,s}^{is} + g_{(r)}^{\vee} \Gamma_{(r)}^s) = 0.$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \epsilon^{ikrs} * g_{ik,r}^{\vee} &= \epsilon^{ikrs} * g_{ik,r}^{\vee} = \frac{1}{2} \epsilon^{ikrs} \epsilon_{ikpq} g_{\vee,r}^{pq} = (g_p^r g_q^s - g_p^s g_q^r) g_{\vee,r}^{pq} = 2 (g_{\vee,r}^{rs} + \\ &+ g_{\vee}^{rl} \Gamma_{(l)}^s + g_{\vee}^{ls} \Gamma_{(l)}^r) = 2 g_{\vee,r}^{rs} = g_{\vee,r}^{rs} - g_{\vee,r}^{sr} = 2 (g_{\vee,r}^{rs} + g_{\vee}^{ls} \Gamma_{(l)}^r) = 0 \end{aligned}$$

dove $g_{\vee,r}^{rs}$ indica la divergenza costruita con la parte simmetrica dei coefficienti di connessione. Vale la pena di notare come la metà del rotore di $* g_{ik}^{\vee}$, coniugato

del tensore g_{ik}^{\vee} , coincida con la divergenza $g_{\vee,r}^{rs}$ del tensore g_{\vee}^{rs} , e viceversa, quando la divergenza sia costruita con la parte simmetrica dei coefficienti di connessione.

La (4) afferma che è nullo il rotore del coniugato (della parte emisimmetrica) del tensore fondamentale. Grazie a queste identità le 84 equazioni (2) e (3) sono in grado di determinare il tensore fondamentale e i coefficienti di connessione. È appunto grazie alle identità (4) che il tensore emisimmetrico $* g_{ik}^{\vee}$ si può interpretare come tensore elettromagnetico: entrambi sono infatti irrotazionali e la divergenza (costruita con le parti simmetriche dei coefficienti di connessione) può interpretarsi come il vettore che dà nello spazio-tempo la distribuzione elettrica. Quest'ultima, oltrechè dalla divergenza del tensore $* g_{ik}^{\vee}$, può anche essere espressa dalla metà del rotore di g_{ik}^{\vee} .

2. EQUAZIONI DI PRIMA APPROSSIMAZIONE. - In prima approssimazione le componenti del tensore fondamentale g_{ik} sono prossime alle componenti a_{ik} del tensore fondamentale degli spazi ovunque vuoti ed in assenza di campo elettroma-

gnético. Essendo $a_{ik} = a_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = k = 0 \\ -1 & \text{per } i = k = 1, 2, 3 \end{cases}$, $a_{ik} = 0$ per $i \neq k$, la metrica è perciò prossima alla seguente:

$$ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

dove $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ è il quadrato dell'elemento lineare dell'ordinario spazio euclideo in coordinate cartesiane ortogonali. Poniamo:

$$(5) \quad g_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

dove le 16 quantità b_{ik} sono puri numeri da trattare in prima approssimazione, come infinitesimi. Pure infinitesimi sono i coefficienti di connessione $\Gamma_{(ik)}^l$.

Nell'approssimazione considerata determiniamo anzitutto dalla (2) i coefficienti di connessione. Per la (5), la (2) diviene:

$$b_{ik,l} = g_{ik,l} = a_{sk} \Gamma_{(il)}^s + a_{is} \Gamma_{(lk)}^s.$$

Poniamo $\Gamma_{(il)s} = a_{sk} \Gamma_{(il)}^k$, la precedente fornisce:

$$b_{ik,l} = \Gamma_{(il)k} + \Gamma_{(lk)i}$$

$$b_{kl,i} = \Gamma_{(kl)i} + \Gamma_{(li)k}$$

$$b_{li,k} = \Gamma_{(lk)i} + \Gamma_{(ki)l}.$$

Togliendo la prima dalla somma delle altre due, si ha:

$$(6) \quad \Gamma_{(ki)}^l = \frac{1}{2} a^{lj} (b_{ji,k} + b_{kj,i} - b_{ik,j}).$$

Decomposto b_{ik} nella sua parte simmetrica ed emisimmetrica $b_{ik} = \underline{b_{ik}} + \underline{\underline{b_{ik}}}$, si constata come la parte simmetrica dei coefficienti di connessione sono i simboli di Christoffel di seconda specie (di prima approssimazione) nella metrica $ds^2 = (a_{ik} + b_{ik}) dx^i dx^k$ e la parte emisimmetrica ha un'espressione formalmente identica a quella dei simboli di Christoffel di seconda specie costruiti con la parte emisimmetrica $\underline{\underline{b_{ik}}}$ del tensore fondamentale. Possiamo cioè scrivere, con le solite notazioni per i simboli di Christoffel:

$$(7) \quad \Gamma_{(ki)}^l + \Gamma_{\underline{\underline{ki}}}^l = \Gamma_{(ki)}^l = \left\{ \begin{matrix} l \\ \underline{\underline{ki}} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} l \\ \underline{\underline{ki}} \end{matrix} \right\}.$$

Noti i coefficienti di connessione si costruiscono subito le equazioni del campo (3) di prima approssimazione, che risultano linearizzate. Si ha immediatamente:

$$(8) \quad \Gamma_{\underline{\underline{is}}}^s = \frac{1}{2} a^{js} (b_{\underline{\underline{ij}},s} + b_{\underline{\underline{js}},i} - b_{\underline{\underline{si}},j}) = \frac{1}{2} (b_{\underline{\underline{ij}},j} - b_{\underline{\underline{si}},s}) = b_{\underline{\underline{is}},s}$$

e l'equazione $\Gamma_i = 0$, la seconda delle (3), diviene:

$$(9) \quad b_{\underline{\underline{is}},s} = 0.$$

La prima delle (3) in prima approssimazione diviene

$$(10) \quad R_{ik} = \Gamma_{(ik),s}^s - \frac{1}{2} (\Gamma_{(is),k}^s + \Gamma_{(ks),i}^s) = 0.$$

Grazie a (6) si ha:

$$R_{ik} = \frac{1}{2} a^{js} (b_{ij,k} + b_{jk,i} - b_{ki,j})_{,s} - \frac{1}{2} b_{,ik} = 0$$

dove $a^{ik} b_{ik} = b$; e ricordando la (9):

$$(11) \quad b_{ij,k}^j + b_{jk,i}^i - b_{ki,j}^j - b_{,ik} = 0.$$

Scriviamo la (11) così:

$$\left(b_{ij,k}^j - \frac{1}{2} b_{,i} \right)_{,k} + \left(b_{jk,i}^j - \frac{1}{2} b_{,k} \right)_{,i} - b_{ki,j}^j = 0$$

e assumiamo, come è sempre lecito e come del resto si fa nella relatività ordinaria, il sistema di riferimento in modo che sia verificata la relazione $b_{ij,k}^j - 1/2 b_{,i} = 0$; le (11) diventano:

$$(12) \quad b_{ik,j}^j = 0.$$

Pertanto le equazioni lineari del campo unitario, di prima approssimazione, sono le (9) e le (12), cioè mettendo in evidenza la parte simmetrica ed emisimmetrica di b_{ik} :

$$(13) \quad b_{ik,i}^j = 0 \quad b_{ik,j}^j = 0 \quad b_{ij,\checkmark}^j = 0^{(6)}.$$

Le equazioni precedenti possono scriversi esplicitamente così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial t^2} \equiv \square b_{ik} = 0 \\ \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial t^2} \equiv \square b_{ik} = 0 \\ \text{div } b_{ij} = 0. \end{array} \right.$$

(6) Si può facilmente constatare che le equazioni di prima approssimazione (13) si accordano con quelle ottenute da Einstein e Straus (nella Nota citata). Einstein e Straus assumono come equazioni del campo unitario, nelle regioni vuote, quelle ottenute annullando la parte simmetrica ed il rotore di quella emisimmetrica del tensore di Riemann contratto generalizzato R_{ik} , e annullando il vettore ottenuto contraendo la parte emisimmetrica dei simboli di connessione. In prima approssimazione essi ottengono così la prima e l'ultima della (13) e in luogo della seconda, la relazione seguente:

$$(b_{ik,l}^l + b_{kl,i}^i + b_{li,k}^k)_{,j} = 0.$$

Quest'ultima consegue dalla seconda e dalla terza delle (13), quando si tenga presente che dall'armonicità e solenoidalità di b_{ik} scende l'irrotazionalità di b_{ik} .

Cfr. anche STRAUS, « Reviews of Modern Physics », vol. 21 n. 3, p. 414 (1949).

Le (13) sono le equazioni di prima approssimazione nella teoria einsteiniana del campo unitario, nelle regioni ove lo spazio è vuoto di materia e di energia; esse mostrano che è armonico il tensore simmetrico g_{ik} che dà la metrica e così pure è armonico il tensore emisimmetrico g_{ik} al quale compete anche divergenza nulla. Dall'armonicità e solenoidalità di g_{ik} scende che è nullo il rotore di g_{ik} .

Le (13) mettono immediatamente in evidenza un fatto notevole: in prima approssimazione campo gravitazionale e campo elettromagnetico si separano nel senso che le equazioni del campo unitario si scindono in due gruppi distinti contenenti ciascuno soltanto le incognite funzioni riguardanti uno dei due campi fondamentali. Il primo è atto a caratterizzare il campo gravitazionale perchè contiene soltanto il tensore simmetrico g_{ik} , che individua il ds^2 spazio temporale, come nella teoria relativistica gravitazionale. Il secondo caratterizza il campo elettromagnetico perchè contiene il tensore emisimmetrico g_{ik} che individua gli elementi del campo elettromagnetico, poichè il coniugato del tensore g_{ik} può identificarsi col tensore elettromagnetico.

Infatti le prime 10 equazioni (13) sono le equazioni di prima approssimazione dell'ordinaria relatività generale che appunto affermano essere nullo il d'alembertiano di b_{ik} (7). Le rimanenti equazioni (13), identificando il tensore elettromagnetico con $*g_{ik}$ coniugato di g_{ik} (cioè in prima approssimazione, di b_{ik}) danno le equazioni di Maxwell per i campi neutri. Dalla seconda e terza di (13) si deduce:

$$(13') \quad \varepsilon^{ikrs} h_{rs,k} = 0.$$

La terza delle (13) e la (13') diventano (tenendo presente che nel passaggio da un tensore al coniugato si scambiano gli operatori divergenza e rotore, e che le derivate tensoriali sono, nell'approssimazione considerata, le derivate ordinarie)

$$(14) \quad \varepsilon^{ikrs} *b_{rs,k} = 0 \quad *b^{\quad rs}_{\quad ,s} = 0.$$

Le (14) sono le equazioni di Maxwell ed esprimono che il tensore elettromagnetico è irrotazionale e solenoidale nello spazio-tempo.

La teoria del campo unitario in prima approssimazione porta a concludere quanto segue:

per quanto riguarda il campo gravitazionale, valgono tutti i risultati della relatività generale di prima approssimazione.

Le equazioni riguardanti il campo elettromagnetico sono quelle maxwelliane di un campo elettromagnetico neutro.

Le soluzioni che si conoscono delle equazioni che reggono i due campi forniscono automaticamente soluzioni delle equazioni che reggono il campo unitario.

(7) Cfr., ad esempio, FINZI-PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*. Bologna (1949).

Fisica. — *Considerazioni sul II postulato della relatività.* Nota (*)
di MARIO GALLI, presentata dal Corrisp. L. TIERI.

La teoria della relatività (ristretta) si fonda notoriamente su due postulati, il primo dei quali afferma l'indipendenza delle leggi naturali dal particolare sistema di riferimento inerziale prescelto, il secondo la costanza della velocità della luce.

Perfino nell'epoca nella quale le controversie pro e contro la relatività erano più vivaci che mai, poche obiezioni furono sollevate contro il primo principio, mentre fu molto discusso il secondo. Anche recentemente Q. Majorana scrive: «Esso (il primo postulato) è una inconfutabile verità, anche nel dominio dell'ottica. Non così si può dire del secondo postulato» ⁽¹⁾. Perfino un relativista convinto come G. Giorgi aderisce parzialmente a questo punto di vista, ammettendo che le esperienze favorevoli al secondo postulato non si possono considerare decisive ⁽²⁾.

Ma, dato e non concesso che questa tesi sia realmente plausibile, sarebbe legittimo inferirne che la teoria della relatività è per lo meno dubbia?

Questa illazione presuppone implicitamente che il principio della costanza della velocità della luce è realmente indispensabile per la teoria della relatività, così che il primo passo obbligatorio per il fisico relativista è l'esecuzione di esperienze atte a verificarlo. Ebbene, ci proponiamo di dimostrare che questa presupposizione, nonostante forti apparenze in contrario, è falsa.

1. L'opinione che vogliamo confutare può apparire fondata da un punto di vista storico. Infatti Einstein ed i suoi immediati successori, nonchè la maggioranza dei trattatisti anche moderni, si fondano sul postulato della costanza della velocità della luce per dedurre le trasformazioni di Lorentz, quelle che costituiscono veramente il cardine della relatività ristretta. Ma nessun argomento ci obbliga a ritenere che le trasformazioni di Lorentz si possano giustificare solo a quel modo. Non solo è vero il contrario, ma si può sostenere addirittura che il principio della costanza della velocità della luce non sia rigoroso senza derogare alla teoria della relatività. Recentemente De Broglie ha costruito una teoria quantistica del fotone ⁽³⁾ nella quale le velocità di fase e di gruppo delle onde luminose sono funzioni della frequenza, ciò che esclude manifestamente la possibilità di considerare il secondo principio della relatività come esatto, eppure la teoria è strettamente relativistica. Infatti le formole fondamentali sono invarianti per trasformazioni di Lorentz. Anche Ditchburn ha considerato sistematicamente e dimostrato la compatibilità dell'ipotesi della dispersione del vuoto con la teoria della relatività ⁽⁴⁾.

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1950.

(1) Cfr. «Rend. Linc.», ser. VIII, vol. 5, p. 212 (1948).

(2) Cfr. «Rend. Linc.», ser. VIII, vol. 5, p. 216 (1948).

(3) Cfr. *Mécanique Ondulatoire du photon et théorie quantique des champs*. Paris, p. 58 (1949).

(4) «Revue d'Optique», 27, p. 1 (1948).

Ma anche a prescindere da queste ed altre recenti teorie, è noto che, anche pochi anni dopo la pubblicazione delle prime Memorie di Einstein, alcuni seguaci delle nuove idee ritennero il secondo postulato alquanto insoddisfacente, non perchè dubitassero della sua corrispondenza alla realtà fisica, ma perchè giustamente osservavano che una teoria implicante profonde modificazioni dei concetti abituali di spazio e di tempo non si poteva molto razionalmente fondare su un fenomeno particolare qual'è la propagazione delle onde luminose. Per conseguenza si tentò in vario modo di dedurre le trasformazioni di Lorentz facendo uso unicamente del principio di relatività. I primi studi si devono a Plank⁽⁵⁾, Ignatowski⁽⁶⁾, Frank e Rothe⁽⁷⁾ (1910-12) e furono continuati intensamente nel decennio 1920-30, ma i risultati conseguiti dai primi investigatori sono rimasti sostanzialmente immutati. Le conclusioni alle quali si perviene in quest'ordine di idee sono in breve le seguenti. Tra le coordinate spazio-temporali x, y, z, t relative ad un dato sistema di riferimento inerziale e le corrispondenti x', y', z', t' , relative ad un altro sistema mobile uniformemente rispetto al primo sussistono le relazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \alpha v^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \alpha v x'}{\sqrt{1 - \alpha v^2}} \end{cases}$$

Queste equazioni sono formalmente le trasformazioni di Lorentz.

Però la costante indeterminata α che vi compare non ha *a priori* alcuna parentela con la velocità della luce c . Anzi non è escluso che valga la relazione $\alpha = 0$, ricadendosi così nelle trasformazioni galileiane. È ovvio infatti che anche queste soddisfano al principio di relatività.

Che la costante α debba o non debba porsi uguale a zero ha certo importanza decisiva per la relatività einsteiniana, ma stabilito che essa ha un valore finito, è del tutto secondario definire se essa debba coincidere col reciproco del quadrato della velocità della luce nel vuoto, se cioè debba porsi $\alpha = 1/c^2$. Questa coincidenza, come abbiamo fatto osservare precedentemente, sarebbe certo impossibile se la velocità di propagazione dipendesse dalla frequenza, come richiedono alcune teorie moderne. Che poi di fatto debba assumere un valore nullo o finito può essere deciso solo con ulteriori esperienze, le quali non devono necessariamente appartenere al dominio dell'ottica.

Ma, anche a prescindere da questa determinazione (escluso il caso estremo $\alpha = 0$) restano valide le consuete conclusioni dedotte dalle trasformazioni di Lorentz, quali la contrazione longitudinale delle lunghezze, la dilatazione temporale, l'esistenza di una velocità limite ecc.

(5) M. PLANK, *Acht Vorlesungen über theoretische Physik*, p. 110, Leipzig 1910.

(6) W. IGNATOWSKI, « *Annalen der Physik* », 33, p. 607 (1910); 34, p. 373 (1911); « *Physikalische Zeitschrift* », II, p. 972 (1910).

(7) P. FRANK e H. ROTHE, « *Annalen der Physik* », 24, p. 825 (1911); « *Physikalische Zeitschrift* », 13, p. 750 (1912).

A commento di questi risultati Ignatowski osserva: «È chiaro che, mediante la superiore deduzione delle equazioni di trasformazione, l'ottica ha perduto la sua posizione privilegiata di fronte al principio di relatività. Con ciò questo principio guadagna in universalità, poichè non dipende più da un fenomeno fisico particolare ma da una costante universale».

Per conseguenza, sebbene quasi tutti i fisici sperimentali, specialmente nel periodo di massimo fervore per gli studi relativistici, abbiano tentato di verificare direttamente il secondo postulato (forse allora era questa la via più agevole) si può anche ricorrere ad altre esperienze ed oggi conviene farlo.

Già ai suoi tempi (1910) Ignatowski suggeriva di ricorrere, per la determinazione della costante a qualche fenomeno puramente elettromagnetico. A questo riguardo giova tuttavia una osservazione di carattere generale. Se si ammette che i fenomeni elettromagnetici siano descritti esattamente ed universalmente con le equazioni di Maxwell, allora non è nè necessario nè opportuno ricorrere a fenomeni particolari. Infatti le equazioni di Maxwell, per il principio di relatività, devono essere invarianti per trasformazioni del tipo (1) ma questo può avvenire solo qualora si identifichi la costante c_r ⁽⁸⁾ con $1/\alpha$.

Tuttavia non si può escludere *a priori* che le equazioni di Maxwell abbiano solo una validità limitata. Conviene quindi rivolgersi a qualche fenomeno particolare.

2. Ignatowski ⁽⁹⁾ considera molto opportunamente la formula del potenziale convettivo. La forza che un elettrone di carica e mobile con velocità costante v esercita su un altro elettrone e' mobile parimenti con velocità v , si può pensare come il \rightarrow
gradiente di un opportuno scalare ψ che si chiama il potenziale convettivo ⁽¹⁰⁾

$$(2) \quad F = - \text{grad } \psi = - e' (1 - \beta^2) \varphi$$

essendo φ il potenziale scalare. Quest'ultima relazione si deduce associando alle equazioni di Maxwell l'equazione di Lorentz

$$(3) \quad F = e' \left(E + \frac{1}{c} v \wedge H \right).$$

Ora è interessante notare che le superficie equipotenziali di ψ sono ellissoidi di rivoluzione che si possono pensare ottenuti da sfere contraendole nella direzione del moto secondo il rapporto $\sqrt{1 - v^2/c_r^2} : 1$. Invece per un ossevatore mobile con l'elettrone le superficie equipotenziali sono manifestamente sfere concentriche con la posizione attuale dell'elettrone. Per mettere d'accordo questo risultato col principio di relatività occorre ammettere la contrazione lorentziana delle lunghezze. Ciò richiede:

$$(4) \quad \alpha = \frac{1}{c_r^2}.$$

(8) Indichiamo con c_r invece che con c la costante caratteristica delle equazioni di Maxwell per lasciare impregiudicata la questione se essa debba indentificarsi con la velocità della luce nel vuoto.

(9) IGNATOWSKI, «Physikalische Zeitschrift», 11, p. 974 (1910).

(10) J. FRENKEL, *Lehrbuch der Elektrodynamik*, p. 173, Berlin 1926.

Questo procedimento è certo molto elegante, ma non del tutto persuasivo per la ragione detta precedentemente. Infatti che sia vera la relazione (2) risulta solo dalle equazioni di Maxwell combinate con l'equazione (3), non già da esperienze dirette, e d'altra parte non sappiamo con certezza se le equazioni di Maxwell sono sicuramente applicabili al caso in questione.

Tuttavia la formula del potenziale convettivo può essere oggi utilizzata convenientemente per la determinazione sicura di α ricorrendo alla dilatazione temporale.

Prendiamo in considerazione lo stesso problema alquanto modificato. Supponiamo che un elettrone di carica e sia obbligato a muoversi lungo l'asse x e supponiamo ancora che un altro elettrone si muova parallelamente al primo a distanza y_0 ed in modo che la congiungente i due elettroni sia costantemente parallela all'asse y .

Ciò posto, ammettiamo che il secondo elettrone ad un certo istante sia libero di ubbidire alla repulsione causata dal primo. Se ci limitiamo a considerare l'effetto dell'interazione per un tempo infinitesimo τ è assai agevole calcolare l'intervallo spaziale Δy che esso percorre. Dalla formola (2) applicata al caso presente si ricava:

$$(5) \quad F = \frac{e^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{y^2},$$

Avendo considerato τ infinitesimo, F può ritenersi costante e scriveremo per conseguenza:

$$(5') \quad F = \frac{e^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{y_0^2}.$$

D'altra parte l'elettrodinamica di Lorentz dà per l'equazione di moto dell'elettrone:

$$(5'') \quad F = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right).$$

Da cui si deduce:

$$(6) \quad \Delta y = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \sqrt{1 - \beta^2} \tau^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{y_0^2 m} (1 - \beta^2) \tau^2.$$

Per l'osservatore mobile insieme ai due elettroni avremo invece indubbiamente:

$$(6') \quad \Delta y' = \frac{1}{2} \frac{e^2}{y_0^2 m} \tau'^2.$$

È chiaro che le due equazioni (6) e (6') non vanno d'accordo. Ora $\Delta y = \Delta y'$, perchè le distanze trasversali sono apprezzate allo stesso modo dai due osservatori (e del resto il contrario già ripugnerebbe alla meccanica classica). Occorre quindi porre:

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Ma questa ammissione è conciliabile con le (1) solo ponendo $\alpha = 0$, più precisamente: $\alpha = 1/c^2$.

Non si può dire che questa dimostrazione sia legata all'esattezza dell'elettrodinamica classica. Infatti l'equazione (5') è certo valida, poichè l'interazione di due cariche elettriche quiescenti è, almeno con grandissima approssimazione, quella

coulombiana. D'altra parte, anche senza basarsi sulla formola del potenziale convettivo, dedotta originariamente solo mediante considerazioni teoriche, risulta oggi da esperienze inoppugnabili eseguite con i moderni acceleratori che la repulsione mutua di due corpuscoli elettrici in moto uniforme, quando la velocità è vicina a quella della luce, è notevolmente minore di quella che dedurrebbe dalla formola (6') ed è invece ben rappresentata dalla (6). Infatti la tendenza che ha un sottile fascetto di corpuscoli elettrici in moto ad espandersi è di gran lunga inferiore a quella che conseguirebbe dalla legge d'interazione coulombiana. Questo risultato è compatibile con la relatività solo ammettendo la dilatazione temporale.

3. Anche l'equazione (5'') dedotta da Lorentz mediante ipotesi speciali ed acquisita poi dalla teoria della relatività mediante ragionamenti più generali per masse di qualunque origine, ha ormai avuto brillantissime conferme. Anch'essa ci offre un mezzo per determinare la costante indeterminata α .

Infatti l'equazione fondamentale della dinamica del punto materiale, per essere conforme al principio di relatività, deve essere invariante rispetto alle trasformazioni (1). Ora l'esperienza conferma indubbiamente l'equazione (5''), ma questa è invariante rispetto alle trasformazioni (1) solo a condizione di porre $\alpha = 1/c^2$.

Alcuni credono di potere accettare l'equazione (5'') senza allontanarsi dalle idee classiche di spazio e di tempo, ammettendo che l'equazione (3) sia da rivedere. Questa opinione risale a Ritz⁽¹¹⁾.

« Sono le forze e non le masse che variano. Le esperienze di Kauffmann ammettono anche questo modo di vedere ». Ad una simile interpretazione inclina anche Majorana⁽¹²⁾.

Ma tale opinione, dato e non concesso che avesse qualche probabilità ai tempi di Ritz, non regge certamente ai nostri giorni. Ai tempi di Ritz l'unico modo di verificare l'equazione (5'') consisteva nel deflettere un fascetto di elettroni veloci emessi dal radio mediante campi elettrici e magnetici. In queste esperienze la variazione energetica delle particelle deflesse era trascurabile. Inoltre le esperienze di Kauffmann non erano molto precise. Basti ricordare a questo riguardo che esse per molto tempo non permisero di discriminare sicuramente fra le due teorie concorrenti di Lorentz e di Abraham⁽¹³⁾. Ma oggi si riesce addirittura ad accelerare corpuscoli elettrici fino a velocità estremamente vicine a quella della luce. Per interpretare correttamente queste esperienze bisogna osservare che, mentre la velocità tende ad un limite, l'energia può oltrepassare qualsiasi valore prefissato. Anche concedendo che l'impossibilità di oltrepassare un certo limite per la velocità sia imputabile ad una diminuzione della forza, rimarrebbe però inesplicabile l'incremento di energia cinetica. Che poi questo incremento esista realmente non solo si deduce dalla formola relativistica:

$$(7) \quad W = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

(11) « Ann. de Physique », XIII, p. 151 (1908).

(12) « Rend. Linc. », ser. VIII, vol. V, p. 151 (1948).

(13) Cfr. « Handbuch der Physik », XII, p. 307.

la quale potrebbe essere assoggettata a revisione da parte di chi non accetta la teoria della relatività, ma risulta anche dal principio di conservazione dell'energia. Ad esempio un fascetto di elettroni accelerati attraverso una differenza di potenziali di 2×10^7 e. v. incidendo su uno schermo materiale genera quivi una quantità di calore che è doppia di quella che vi genererebbe se fosse stato accelerato mediante una differenza di potenziale di soli 10^7 e. v., mentre la differenza delle velocità nei due casi non è affatto notevole.

4. Ed infine consideriamo un'esperienza ottica, ma non del tipo di quelle generalmente considerate in passato, ma un'esperienza che giunga a rivelare effetti di second'ordine.

L'effetto Doppler è stato utilizzato fin da principio per decidere tra teoria balistica e teoria della relatività. La scarsa precisione raggiunta nelle misure non ha permesso di raggiungere una decisione definitiva. La situazione è oggi notevolmente cambiata.

La formola relativistica dell'effetto Doppler si deduce con un procedimento che è ben noto⁽¹⁴⁾. Noi lo applicheremo con l'unica variante della sostituzione delle equazioni (1) a quelle di Lorentz. Si deduce per la variazione di frequenza:

$$\nu' = \nu \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \alpha v^2}}.$$

Questo procedimento, per quanto abbiamo detto precedentemente, si fonda unicamente sul principio di relatività, e quindi vale per tutti i sistemi di fisica che vogliono rispettarlo.

Supponiamo di operare in condizioni tali che sia $\cos \theta = 0$ (effetto Doppler trasversale). Allora:

$$(8) \quad \nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \alpha v^2}}.$$

Se $\nu' \neq \nu$ è certo che $\alpha \neq 0$.

Ebbene, le misure eseguite da Ives e Stillwell⁽¹⁵⁾ dell'effetto Doppler trasversale esaminando la luce emessa dai raggi canali verificano molto bene la formola (8).

È vero che Ives preferisce vedere nei risultati delle sue esperienze una conferma dell'elettrodinamica di Lorentz, piuttosto che della teoria di Einstein⁽¹⁶⁾. Non vogliamo discutere quest'ultima opinione. Comunque è certo che tali risultati condannano definitivamente la teoria balistica. È certo soprattutto che le trasformazioni di Lorentz si possono giustificare anche senza garantire preventivamente la costanza della velocità della luce e quindi esse si devono accettare anche se le varie esperienze di laboratorio escogitate allo scopo fossero da riguardare come incerte.

(14) Cfr. ad esempio M. J. BECQUEREL, *Le principe de relativité*. Paris (1922).

(15) H. E. IVES e G. R. STILLWELL, « Journal Optical Society of America », 28, p. 215 (1938).

(16) H. E. IVES, « Phil. Mag. », 36, p. 392 (1945).

Fisiologia umana. — *Gli effetti delle crisi convulsive da elettroshock sul comportamento sessuale del rospo («Bufo vulgaris»)*^(*). Nota ^(**) di GAETANO LIVREA, presentata dal Corrisp. G. AMANTEA.

Altrove⁽¹⁾ sono state formulate le ragioni che hanno indotto ad elaborare un piano di lavoro sperimentale inteso a chiarire, fra l'altro e soprattutto, un problema finora trascurato di fisiopatologia del sistema nervoso, il problema, cioè, delle conseguenze di ripetuti eccitamenti massivi dei centri encefalici sulle funzioni dei diversi organi ed apparati, ed altrove pure sono stati comunicati i risultati dei primi accertamenti su alcuni fatti elementari.

Per informare i lettori di questi « Rendiconti », tali risultati vengono qui riassunti brevemente. Le ricerche di cui alle note⁽²⁻⁵⁾ e quelle che fanno oggetto della presente comunicazione sono state compiute con un fondo concesso dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Sono stati studiati dapprima gli effetti delle crisi convulsive da E. S. sui processi costruttivi⁽²⁾ e con tali ricerche è stato dimostrato: a) che a parità di fattori esterni ambientali, le ripetute crisi convulsive da E. S. hanno un'immane e costante influenza nociva sui processi costruttivi degli animali, che li subiscono; b) che l'organismo di alcuni animali in accrescimento sottoposto a un notevole susseguirsi di crisi convulsive perde o è incapace di far funzionare quei meccanismi di compensazione, che entrano in gioco, allorché, per una causa transitoria qualsiasi, si è verificata un'alterazione dell'accrescimento.

Sono stati studiati gli effetti delle crisi convulsive da E. S. sui processi ricostruttivi dei colombi⁽³⁾ e con tali ricerche è stato dimostrato che la quantità di peso recuperabile dagli animali elettroshockati, con una quantità definita di alimento assunto, è sempre inferiore; però, mentre negli animali che hanno subito un modico numero di crisi convulsive la durata della rialimentazione rimane invariata e la quantità complessiva e la quantità media giornaliera di alimento assunto aumentano, negli animali che hanno subito un notevole numero di crisi convulsive, la durata della rialimentazione aumenta, aumenta la quantità complessiva dell'alimento e diminuisce invece la quantità media giornaliera.

Sono stati studiati infine gli effetti delle crisi convulsive da E. S. sullo sviluppo dell'apparato genitale e sull'attività sessuale di alcuni animali da laboratorio⁽⁴⁻⁵⁾ e con tali ricerche si è dimostrato che: a) nei ratti, la discesa e lo sviluppo dei testicoli è avvenuta con un ritardo non chiaramente dimostrativo; b) nelle cavie, al contrario, la discesa e, ancor di più, lo sviluppo dei testicoli è stato conside-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1950.

(1) G. LIVREA, « Riv. di Biologia », 41, 461 (1949).

(2) G. LIVREA, « Riv. di Biologia », 41, 467 (1949).

(3) G. LIVREA, « Riv. di Biologia », 42, 45 (1950).

(4) G. LIVREA, « Riv. di Biologia », 42, 59 (1950).

(5) G. LIVREA, « Riv. di Biologia », 42, 67 (1950).

revolmente ritardato; c) l'ostio vaginale, nelle rattine, si è aperto con un ritardo di 5-15 giorni e la durata dei primi cicli estrali è stata in media di 11 giorni più lunga che negli animali di controllo; la durata degli altri cicli estrali è stata in media più lunga di 9 giorni; d) nelle cavie, i suddetti ritardi sono stati ancora più manifesti, così che in alcuni casi l'ostio vaginale non si è aperto neppure 40 giorni dopo la cessazione delle crisi convulsive; e) i ratti e le cavie, posti di fronte a femmine sicuramente in estro, si sono mostrati sprovvisti di libido; f) le femmine, i cui strisci vaginali presentavano le tipiche modificazioni dell'estro, offerte a maschi attivi, non si sono lasciate coprire, nè hanno presentato riflessi estrali; g) ponendo insieme ratti di sesso diverso sottoposti a E. S., non si sono osservati mai accoppiamenti, nè mai si sono ottenute gravidanze; h) lo stesso è accaduto ponendo insieme maschi elettroshockati con femmine giovani e fertili; i) ponendo insieme maschi giovani e attivi con femmine sottoposte a circa 100 crisi convulsive, in un solo caso, nel quale più che negli altri ratti l'animale sembrava avesse acquistato un adattamento alle crisi convulsive elettricamente provocate, l'accoppiamento ha avuto luogo due volte a 9 giorni di distanza. La seconda copulazione è stata seguita da gravidanza, che, perdurando il trattamento convulsivante, al 18° giorno ha portato a morte l'animale; l) i colombi non sono stati mai visti in accoppiamento e le loro femmine hanno deposto uova non fecondate; m) l'ovulazione delle colombe è rimasta assopita durante e per lungo tempo dopo il trattamento convulsivante.

Un'interpretazione non ipotetica dei dati sinora rilevati è possibile solo chiarendo i diversi quesiti sorti in conseguenza dell'accertamento dei dati medesimi.

Nel mentre erano e sono in corso le ricerche in tal senso, nel febbraio-aprile del corrente anno, approfittando della stagione propizia, ho pensato di allargare lo studio del problema dei rapporti tra ripetute crisi convulsive da E. S. ed attività sessuale, estendendo le ricerche agli anfibii anuri. L'interesse di tale estensione mi è sembrato risiedere in questo: a) possibilità di asserire un più ampio valore biologico dei rapporti tra crisi convulsive da E. S. e apparato e comportamento sessuale dei vertebrati; b) possibilità di analizzare il meccanismo funzionale di tali rapporti, tenendo conto della relativa semplicità del sistema nervoso di questi vertebrati e dato che il complesso quadro del comportamento motorio esibito dal maschio nell'accoppiamento sessuale indica con chiarezza che il sistema nervoso vi è intimamente connesso; c) possibilità di estendere ai mammiferi i risultati di queste osservazioni.

Ho eseguito le ricerche sui rospi maschi accoppiati, dell'ardore sessuale dei quali ho creduto di poter giudicare mediante un attento studio preventivo delle ben note modificazioni indotte in essi dall'atto dell'amplesso.

Precisamente su 50 coppie ho accertato nei maschi: I) l'assenza di movimenti riflessi con gli arti anteriori; II) la continuazione dell'abbraccio e l'aumento del tono dello stesso per l'applicazione, ovunque praticata, di stimoli molesti; III) la presenza dei seguenti complessi atti riflessi degli arti posteriori, i quali non si osservano mai, all'infuori dell'amplesso, nell'animale normale: a) riflesso di estensione tonica del capo, provocabile comprimendo leggermente con un dito la cute del capo del rospo; b) riflesso della flessione forzata dell'arto poste-

riore omolaterale, o di tutti e due gli arti posteriori, sull'articolazione dell'anca e successiva brusca estensione, provocabile applicando uno stimolo molesto nei fori nasali: c) riflesso di estensione tonica dei due arti posteriori, provocabile comprimendo leggermente i polpastrelli di due dita sulle superficie plantari; IV) la presenza dei seguenti fatti inibitori: a) assenza dei movimenti di fuga in seguito all'applicazione di stimoli fortemente molesti; b) assenza del riflesso di posizione, per cui, ponendo sul dorso una coppia di rospi, è la sola femmina che compie i movimenti necessari per riacquistare la posizione normale.

Ho eliminato quelle coppie i cui maschi non presentavano tutte o ben nette le anzidette modificazioni ed ho condotte le ricerche sulle coppie restanti, in tutto 32.

A ciascun maschio accoppiato di queste ho provocato la crisi convulsiva da E. S. in modo molto semplice, applicando, cioè, due piccoli elettrodi bottonuti in corrispondenza delle regioni retrorbitarie ed inserendo e staccando a mano con rapida mossa la corrente stradale.

In conseguenza ho osservato sempre lo stesso quadro, consistente, per quanto riguarda il maschio, in una violenta contrazione tonica di tutti i muscoli del corpo: precisamente, gli arti posteriori si estendono fortemente, gli arti anteriori si flettono in un amplesso più vigoroso e tutti i muscoli fanno netta salienza al di sotto della cute; indi la contrazione tonica degli arti diminuisce, generalmente prima negli arti posteriori e poi negli arti anteriori, e come effetto postumo si osserva una notevole diminuzione della forza dell'amplesso, cosicchè è facilissimo staccare il maschio dalla femmina, anzi, talvolta, questo cade spontaneamente di fianco.

Dopo un certo tempo, più o meno breve, dalla crisi, il maschio in genere torna di nuovo all'amplesso e possono riosservarsi in esso, tutte o quasi, uguali o quasi, quelle modificazioni suddescritte e legate all'atto dell'amplesso. Ripetendo però l'E. S. nei giorni successivi, in ragione di 1 E. S. pro die, dopo 3-8 crisi i maschi, staccati dalle femmine, non mostrano più alcuna tendenza a riaccoppiarsi, sebbene non presentino segni apparenti di lesioni centrali, come si può dedurre dal fatto che sono integre la respirazione, la locomozione, ecc., e sono normali i riflessi della posizione, degli arti posteriori, degli arti anteriori, ecc.

Tale perdita della libido in una parte dei maschi permane duratura, pur avendo osservato, nei pochi casi appositamente esaminati, che le crisi convulsive da E. S. non sono accompagnate nè seguite da eiaculazione; in altri maschi, invece, la perdita è temporanea, e, dopo 15-20 giorni, l'accoppiamento può ristabilirsi.

A me sembra che la conclusione che si può trarre da questi esperimenti è che le crisi convulsive da E. S. alterano profondamente la base biologica del comportamento sessuale del rospo maschio. E questa conclusione mi sembra tanto più interessante in quanto che, sin dall'epoca di Spallanzani, è noto come sia difficile ottenere la cessazione dell'amplesso, in altri termini alterare i meccanismi funzionali che ingranano in quest'atto, per quanto violenti possano essere gli stimoli meccanici, termici, chimici, ai quali può essere sottoposto il maschio accoppiato,

ed anche elettrici, sebbene di tipo diverso e in condizioni diverse dalle mie; ad esempio, nelle esperienze di S. Baglioni ⁽⁶⁾, le faradizzazioni ripetute della superficie degli emisferi e dei lobi ottici non determinarono mai il distacco del maschio dalla femmina e neppure una diminuzione del tono dell'abbraccio.

Si tratta ora di definire con osservazioni sperimentali il meccanismo funzionale dell'anzidetta alterazione e stabilire poi se gl'insegnamenti ricavabili da queste nuove indagini possono essere validi per i mammiferi.

Dopo un'attenta analisi delle nostre principali conoscenze circa il fondamento biologico della condotta sessuale degli anfibî ⁽⁷⁻¹⁴⁾, analisi che non può rientrare nei limiti di questa comunicazione, ho impostato le ricerche, che credo più atte a definire dappresso il meccanismo col quale le crisi convulsive da E. S. alterano la condotta sessuale degli anfibî.

È molto poco probabile che esse agiscano sulle vie attraverso le quali viaggiano gli eccitamenti afferenti destinati a promuovere lo stato attivo dei centri sessuali, eccitamenti che, come è noto, provengono dalle papille sensitive delle callosità nuziali delle dita della mano, per le quali callosità gli stimoli adeguati sono quelli da compressione contro il corpo della femmina e forse, specie in un primo tempo, quelli tattili contro le verruche e gli ispessimenti della cute della femmina.

Pertanto le ricerche impostate mirano a stabilire se le crisi convulsive da E. S. inducono la cessazione dell'amplesso *a)* o agendo direttamente sui centri sessuali dei lobi ottici, sopprimendone l'attività funzionale o abbassandone la soglia dell'eccitabilità; *b)* o agendo sul testicolo o sull'ipofisi o su entrambe queste ghiandole, le quali attraverso i loro ormoni possono determinare il grado di eccitabilità necessaria per lo svolgimento delle funzioni dei centri sessuali dei lobi ottici; *c)* determinando una parziale detensione delle vie di raccolta degli spermatozoi e quindi sopprimendo o indebolendo quegli stimoli meccanici o di turgore, i quali, proveniendo dalle anzidette vie, certamente contribuiscono, come notoriamente è stato ammesso, all'elevazione dell'eccitabilità centrale.

La fine della stagione degli amori non mi ha permesso di compiere tutte le osservazioni atte a chiarire a quale delle suddette possibilità, o ad altre ancora, debba attribuirsi l'interruzione dell'amplesso del rospo provocato dalle crisi convulsive da E. S. È mio proposito di continuare ed ultimare le ricerche nella prossima stagione.

(6) S. BAGLIONI, «Zeit. f. allg. Physiol.», 14, 161 (1912).

(7) J. R. TARCHANOFF, «Pflügers Arch.», 40, 330 (1887).

(8) M. E. G. SCHRADER, «Pflügers Arch.», 41, 75 (1887).

(9) P. ALBERTONI, «Arch. Ital. de Biol.», 9, 19 (1888) e «Centr. f. Physiol.», 1, 733 (1888).

(10) M. NUSSBAUM, «Anat. Anz.», 30, 578 (1907).

(11) E. STEINACH, «Zbl. Physiol.», 24, 551 (1910).

(12) G. C. LINDEBOOM, «Arch. néer. Physiol.», 12, 424 (1928).

(13) G. BROSSARD e P. GLEY, «C. R. Soc. Biol.», 101, 757 (1929).

(14) H. A. SHAPIRO, «J. of exp. Biol.», 13, 47, 57, 60 (1936).

Fisiologia. — *Sulle relazioni che intercorrono tra la cronassia del muscolo striato e la permeabilità del medesimo all'acqua* (*). Nota di XENIA MACHNE, presentata (**) dal Corrisp. G. PUPILLI.

I risultati di numerose ricerche [cfr. le citazioni in Machne⁽¹⁾] permettono di ritenere oggi generale la relazione tra polarizzazione e cronassia, per cui questa varierebbe sempre in senso opposto a quella. Tuttavia, i valori dei parametri dell'eccitabilità, secondo l'ipotesi formulata da Monnier⁽²⁾ e convalidata da molte osservazioni sperimentali, non sarebbero determinati dalla sola polarizzazione del tessuto; vi concorrerebbe un fattore ad azione antagonistica, rappresentato dalla permeabilità delle membrane tessutali agli ioni. È stato dimostrato che questa varia costantemente in direzione opposta della polarizzazione del tessuto [Dubuisson^(3,4); Dubuisson e Vandervael⁽⁵⁾]; l'aumento della permeabilità del tessuto provocherebbe un accorciamento della cronassia e una elevazione della reobase.

Se quest'ipotesi permette di schematizzare in modo assai semplice le relazioni che intercorrono fra i parametri dell'eccitabilità e le modificazioni chimico-fisiche dei tessuti, essa non chiarisce però in quale rapporto stiano le variazioni della cronassia con le modificazioni della capacità d'imbibizione del muscolo striato, nè quale relazione sussista tra la permeabilità di un tessuto agli ioni e la permeabilità del medesimo all'acqua. Molti dati sperimentali [Lapicque^(6,7,8)] hanno dimostrato che ad ogni diminuzione della cronassia corrisponde un aumento della capacità d'imbibizione del muscolo e viceversa. L'andamento dei fenomeni osmotici che accompagnano le modificazioni della cronassia, contrasta col concetto di eccitazione elettrica accettato dalla maggior parte degli Autori [Gellhorn e Régnier⁽⁹⁾]. Se si concepisce l'eccitazione come una depolarizzazione, cioè come un passaggio più libero di ioni attraverso una membrana primitivamente assai poco permeabile, il muscolo trattato con un agente che abbassi la sua cronassia dovrebbe presentare una capacità d'imbibizione minore di quella del muscolo normale: in virtù delle leggi osmotiche, in seguito alla uscita degli ioni il richiamo di acqua da parte del muscolo sarebbe ridotto [Lapicque⁽¹⁰⁾]. Perciò mi è sembrato utile esaminare l'azione che alcuni farmaci, di cui è noto

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

(1) X. MACHNE, « Arch. Sci. biol. », XXXIV, 1 (1950).

(2) A. M. MONNIER, *L'excitation électrique des tissus. Essai d'interprétation physique*. Paris, Hermann et C. ie (1934).

(3) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », XXXVII, 35 (1933).

(4) M. DUBUISSON, « Arch. int. Physiol. », XXXVIII, 85 (1934).

(5) M. DUBUISSON et F. VANDERVAEL, « Arch. int. Physiol. », XL, 173 (1934-35).

(6) L. LAPICQUE, « J. Physiol. Path. gén. », IX, 620 (1907).

(7) L. LAPICQUE, « Rev. gén. Sci. », 540 (1913).

(8) L. LAPICQUE, « C. r. Soc. Biol. », CXV, 827 (1934).

(9) E. GELLHORN et J. RÉGNIER, *La perméabilité*. Paris, Masson (1936).

(10) L. LAPICQUE, « Arch. int. Pharmacodyn. », XXXVIII, 209 (1930).

l'effetto sulla cronassia e sulla capacità d'imbibizione del muscolo scheletrico, esercitano sulla polarizzazione e sull'impedenza del medesimo. Ho studiato gli effetti della veratrina, che accorcia la cronassia del muscolo scheletrico e ne aumenta la capacità d'imbibizione; del curaro, che invece allunga la cronassia del tessuto muscolare e ne diminuisce la capacità d'imbibizione [cfr. Lapique ^(11, 12)]; infine, della d-tubocurarina, che è il solo alcaloide del curaro a costituzione ben nota e che manifesta intense proprietà curarizzanti.

Le ricerche sono state eseguite sul muscolo gastrocnemio di *R. temporaria* *in situ*. Dopo essere stata decapitata e smidollata, la rana veniva fissata su una tavoletta di sughero, col dorso rivolto alla medesima; l'arto posteriore, abdotto, era sollevato dal piano della tavoletta, il ginocchio e l'estremità della zampa venendo fissati su adatti rialzi. Si metteva allo scoperto, da ultimo, l'*A. aorta abdominalis*. L'animale era tenuto in camera umida, fornita di fori per il passaggio degli elettrodi, e a temperatura costante. Il potenziale di lesione del muscolo veniva misurato con un potenziometro Allocchio e Bacchini (grande modello). Gli elettrodi erano del tipo d'Arsonval-Lapique ⁽¹²⁾, di argento clorurato per elettrolisi: un elettrodo (positivo) era messo a contatto della superficie sana del ventre muscolare; l'altro (negativo) a contatto con una zona lesa del muscolo; la lesione era profonda, di taglio. L'impedenza trasversale del muscolo veniva misurata mediante un apparecchio costruito essenzialmente sullo schema di quello proposto da Dubuisson ⁽³⁾, usandosi per la derivazione elettrodi d'argento. In ogni singola esperienza si effettuava soltanto la misura del potenziale di lesione oppure quella dell'impedenza del muscolo. Dopo aver ripetuto alcune volte la misura del potenziale di lesione o dell'impedenza del muscolo, s'iniettava il farmaco nell'*A. aorta abdominalis*: si procedeva infine ad una nuova misurazione. Le modificazioni dell'impedenza indotte dal farmaco, sono state studiate relativamente al valore d'impedenza riscontrato all'inizio dell'esperimento. Per quanto riguarda il potenziale di lesione, si è dovuto tener conto del fatto ch'esso decresce spontaneamente nel tempo, dapprima rapidamente e poi sempre più lentamente. Il farmaco in esame veniva iniettato, nei miei esperimenti, a distanza di circa 20 minuti dal momento della lesione, quando il decremento spontaneo del potenziale di lesione era divenuto molto lento.

La veratrina (solfato di veratrina Merck) è stata iniettata in dosi pari a ml. 0,013 di una soluzione al 0,4%, per g. di peso dell'animale; il curaro (curaro Merck, hochwirksam) è stato iniettato in dosi pari a ml. 0,005 di una soluzione all'1%, per g. di peso; la d-tubocurarina («tubarine» Borroughs Wellcome & Co.) veniva iniettata in dosi pari a ml. 0,0025 di una soluzione al 0,01%, per g. di peso. Tutti e tre i farmaci esercitano, nelle dosi usate, azione curarica. I farmaci erano disciolti in liquido di Ringer per rana.

Ho ottenuto i seguenti risultati. L'iniezione intrarteriosa di veratrina, curaro e d-tubocurarina, comporta un abbassamento dei valori del potenziale di lesione

(11) L. LAPICQUE, «C. r. Soc. Biol.», LXXVII, 288 (1914).

(12) L. LAPICQUE, *L'excitabilité en fonction du temps*. Paris, Presses Universitaires de France (1926).

e dell'impedenza del muscolo. Questa discesa dei valori del potenziale di lesione è assai rapida in confronto con quella spontanea. Nella tabella I sono riportate: a) le variazioni del potenziale di lesione ($\Delta E\%$) riscontrate 7 minuti dopo l'iniezione di veratrina, curaro e d-tubocurarina, in percento del valore ottenuto immediatamente prima dell'iniezione; b) le variazioni dell'impedenza ($\Delta Z\%$) osservate per effetto dei tre farmaci 7 minuti dopo l'iniezione, in percento del valore riscontrato immediatamente prima; c) i valori del rapporto tra le variazioni percentuali del potenziale di lesione e quelle della impedenza. Si rileva che il rapporto $\Delta E\%/\Delta Z\%$ è all'incirca eguale per il curaro e per la d-tubocurarina; ciò sta ad indicare che a parità di variazione del potenziale di lesione per i due farmaci, corrisponde una modificazione dell'impedenza eguale per effetto dell'uno e dell'altro. Si constata, invece, che il medesimo rapporto acquista un valore più basso per effetto della veratrina: ciò sta ad indicare che a parità di variazione del potenziale di lesione per i tre farmaci, corrisponde una modificazione dell'impedenza maggiore per azione della veratrina che per effetto del curaro e della d-tubocurarina.

TABELLA I.

| | $\Delta E\%$ | $\Delta Z\%$ | $\frac{\Delta E\%}{\Delta Z\%}$ |
|--------------------------|--------------|--------------|---------------------------------|
| veratrina | 11,2 | 7,8 | 1,43 |
| curaro | 33 | 5,7 | 5,78 |
| d-tubocurarina | 54,2 | 9,4 | 5,76 |

Vediamo anzitutto quale significato assumano le modificazioni dell'impedenza quando si pongano in rapporto con quelle del potenziale di lesione del muscolo. Si tenga presente che il potenziale di lesione, pur non misurando soltanto la FEM della membrana, può venir considerato come indice delle sue variazioni [Schaefer ⁽¹³⁾].

Misurando l'impedenza del muscolo con correnti alternate di varia frequenza, Cole e Curtis ⁽¹⁴⁾ hanno stabilito che si può schematicamente considerare come circuito equivalente alle membrane del muscolo scheletrico, una capacità in parallelo con una resistenza; il medesimo circuito vale anche per la membrana del nervo.

In base ad una serie di ricerche eseguite su *Nitella* e sul N. stellare di *Loligo pealii* allo scopo di studiare le modificazioni dell'impedenza durante l'attività, Cole e Curtis ^(15, 16) sono giunti alla conclusione che sussiste un così stretto

(13) H. SCHAEFER, *Elektrophysiologie*, I Band. Wien, Deuticke (1940).

(14) K. S. COLE a. H. J. CURTIS, «Cold. Spring Harb. Symp. quant. Biol.», IV, 73 (1936).

(15) K. S. COLE a. H. J. CURTIS, «J. gen. Physiol.», XXII, 37 (1939).

(16) K. S. COLE a. H. J. CURTIS, «J. gen. Physiol.», XXII, 649 (1939).

parallelismo tra il comportamento della resistenza e della FEM della membrana, da poter considerare la FEM come un elemento in serie con la resistenza nel circuito sopra descritto: la resistenza sarebbe, almeno in parte, la resistenza interna della FEM, corrispondendo ad una diminuzione della FEM una diminuzione della resistenza e viceversa. Si è visto inoltre [Cole e Curtis^(15, 16); Cole e Baker⁽¹⁷⁾] che durante l'eccitazione e nel catelettrotono del nervo, l'aumento della conduttività del tessuto è dovuta in gran parte alla diminuzione di detta resistenza, mentre assai scarsa è la diminuzione della capacità della membrana: ciò sta ad indicare che la capacità rappresenta l'aspetto « non conducente » della membrana, mentre la resistenza in parallelo ne rappresenta l'aspetto « conducente » ovvero « ioni-permeabile ».

Nelle condizioni sperimentali delle presenti ricerche, si è osservata una diminuzione del potenziale di lesione e dell'impedenza del muscolo: come si è detto, il valore del rapporto $\Delta E \% / \Delta Z \%$ risulta inferiore per la veratrina che per il curaro e la d-tubocurarina. Essendo ammissibile che il meccanismo dell'eccitazione e quello della propagazione siano nei diversi tessuti assai simili [cfr. Schaefer⁽¹³⁾; Cole e Curtis⁽¹⁶⁾], possiamo ritenere che anche nel muscolo la resistenza e la FEM della membrana costituiscano due elementi in serie: ne deriva che la diminuzione dell'impedenza provocata dai farmaci in esame, è dovuta in gran parte ad una diminuzione della « resistenza interna » della FEM. Poichè la diminuzione di detta resistenza dev'essere proporzionale alla diminuzione della FEM, tre ipotesi sono prospettabili per spiegare i risultati da me ottenuti: 1) ammesso che la variazione dell'impedenza osservata per effetto della veratrina sia proporzionale alla diminuzione della FEM del muscolo, si verificherebbe per azione del curaro un aumento della resistenza capacitativa, ovvero una diminuzione della capacità della membrana, sì da compensare in parte la diminuzione della sua « resistenza interna »; 2) ammesso, invece, che la modificazione dell'impedenza riscontrata per effetto del curaro sia proporzionale alla diminuzione della FEM del tessuto muscolare, per azione della veratrina una diminuzione della resistenza capacitativa si sommerebbe alla diminuzione della « resistenza interna »; 3) potrebbe, infine, aversi per effetto del curaro un aumento della resistenza capacitativa e per opera della veratrina una diminuzione della medesima.

Ora è noto che l'acqua ha una costante dielettrica molto elevata: una diminuzione dell'imbibizione del tessuto, come la si osserva in seguito a trattamento con curaro, deve quindi determinare una diminuzione della capacità e di conseguenza un aumento della resistenza capacitativa della membrana; viceversa, un aumento dell'imbibizione, come lo si riscontra per effetto della veratrina, dovrà dar luogo a un aumento della capacità e ad una diminuzione della resistenza capacitativa della membrana. Appare perciò probabile che la terza ipotesi risponda al vero: la capacità delle membrane muscolari diminuirebbe per azione del curaro e aumenterebbe per effetto della veratrina.

Esaminerò, alla luce di dette conclusioni, l'ipotesi di Monnier⁽⁸⁾ sul determinismo dei parametri dell'eccitabilità d'un tessuto.

(17) K. S. COLE a. R. F. BAKER, « J. gen. Physiol. », XXIV, 535 (1941).

A tale scopo riferisco dapprima come Cole e Curtis⁽¹⁵⁾ abbiano elettricamente definito la permeabilità delle membrane agli ioni, intesa come numero di ioni trasportati attraverso la membrana nell'unità di tempo per ogni coppia di ioni separati dalla membrana stessa. Le abbreviazioni sono quelle usate dagli Autori sopra citati. Se consideriamo l'impedenza di « polarizzazione », quale sarebbe l'impedenza delle membrane tessutali, essenzialmente come un'impedenza dielettrica e questa come una caratteristica dell'aspetto ioni-impermeabile della membrana, la costante α e l'angolo di fase Φ che ne è la misura (essendo $\Phi = \alpha\pi/2$ radianti) costituiscono le misure della perdita dielettrica che si verifica quando α è minore di 1. Questa perdita, verosimilmente dovuta a una resistenza frizionale per la rotazione dipolare, è espressa come una resistenza elettrica, ma non è da confondersi con una resistenza che sia espressione del trasporto di ioni attraverso la membrana. Una variazione della differenza di potenziale tra le due superfici della membrana (ΔV) comporta una variazione della densità della corrente nella membrana (ΔI); secondo la legge di Ohm, la resistenza della membrana per unità di superficie è espressa da $r_4 = \Delta V / \Delta I$. La permeabilità della membrana agli ioni può esser definita come il numero di ioni trasportati attraverso l'unità di superficie, nell'unità di tempo e per unità di differenza di potenziale. Accettando questa definizione, la permeabilità risulta proporzionale a $\Delta I / \Delta V = 1/r_4$ ossia alla conduttanza della membrana. Ci sarà pure un accumulo di cariche elettriche ai due lati della membrana, $+\Delta Q$ e $-\Delta Q$, essendo per la definizione di capacità $\Delta Q = c_m \Delta V$ ove c_m è la capacità della membrana per unità di superficie. Se ora si definisce la permeabilità agli ioni come il numero di ioni trasportati attraverso la membrana nell'unità di tempo e per ogni paio di ioni separati dalla membrana stessa, questa permeabilità è data da $\Delta I / \Delta Q = 1/r_4 c_m$ che è pure il valore reciproco della costante del tempo della membrana.

Se la capacità delle membrane è diminuita nel muscolo trattato con curaro e aumentata in quello trattato con veratrina, a parità di variazione del potenziale di lesione per i due farmaci corrisponderà un aumento della permeabilità agli ioni maggiore per effetto del curaro che per opera della veratrina. Si spiegherebbe così l'andamento dei fenomeni osmotici, che si osserva dopo aver trattato il muscolo coi due farmaci. Infatti, essendo la uscita degli ioni proporzionale alla permeabilità del muscolo e di conseguenza maggiore per effetto del curaro che per azione della veratrina, il primo farmaco deve determinare un minor richiamo di acqua da parte del muscolo che il secondo.

È noto che la veratrina determina un aumento della reobase e un accorciamento della cronassia del muscolo. Poichè si è dimostrato che la medesima sostanza diminuisce la polarizzazione del muscolo e ne aumenta la permeabilità agli ioni, possiamo concludere, secondo lo schema proposto da Monnier⁽⁸⁾, che i valori dei parametri dell'eccitabilità ottenuti per azione della veratrina sono da attribuirsi al prevalere dell'influenza su di loro esercitata dalla permeabilità del tessuto sull'azione riferibile al cambiamento della polarizzazione fisiologica.

Il curaro dà luogo ad un aumento della reobase e a un allungamento della cronassia. Si è dimostrato che il medesimo farmaco diminuisce la polarizzazione del muscolo e provoca un cospicuo aumento della sua permeabilità agli ioni.

L'aumento della reobase di per se stesso fa pensare che l'influsso esercitato dalla permeabilità del tessuto sui parametri dell'eccitabilità prevalga sull'azione riferibile alla diminuzione della polarizzazione fisiologica. L'allungamento della cronassia del tessuto, che si osserva per effetto del curaro, sarebbe dovuto al già elevato dislocamento dei colloidi cellulari: per quest'effetto è impedito un ulteriore aumento della permeabilità, quale sarebbe indispensabile, in base alla teoria della membrana di Bernstein⁽¹⁸⁾ e di Höber^(19, 20), affinchè si abbia l'eccitamento.

Biologia. — *Secrezione di acido ribonucleico da parte delle cellule follicolari e suoi rapporti con la spermatogenesi in «Anilocra» (Crust. Isop.)* (*). Nota di SILVIA MONTEFOSCHI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In seguito all'introduzione del metodo di Brachet⁽¹⁾ per la dimostrazione citologica dell'acido ribonucleico (RNA) con la colorazione di Unna-Pappenheim e il relativo controllo con la ribonucleasi, gli studi sull'importanza dell'RNA nel metabolismo cellulare hanno ricevuto un notevole impulso.

In un recente lavoro⁽²⁾ è stato osservato, nei testicoli di *Asellus aquaticus*, che grosse cellule follicolari con nuclei poliploidi secernono RNA e che la secrezione è ciclica ed in stretto rapporto con le fasi della spermatogenesi.

Gli autori di tale lavoro suppongono che l'RNA, o una sostanza intimamente legata ad esso, abbia un'importante funzione nel promuovere e regolare i processi meiotici.

In alcuni Cimotoidi (Crostacei Isopodi) sono state osservate⁽³⁾ grosse cellule della parete dei follicoli testicolari, che presentano nuclei poliploidi, la cui particolare struttura è stata descritta dal Montalenti⁽⁴⁾.

Scopo di questo lavoro è stato di mettere in luce se il significato funzionale di tali cellule sia analogo a quello delle cellule follicolari di *Asellus* e di indagare le varie fasi del ciclo di secrezione di questi elementi, che per le cospicue dimensioni si prestano assai bene allo studio citologico.

È stata studiata la specie *Anilocra physodes*, che, come tutti i Cimotoidi è un ermafrodita proterandro. Sono stati presi in osservazione prevalentemente gli

(18) J. BERNSTEIN, *Electrobiologie*. Braunschweig, Vieweg (1912).

(19) R. HÖBER, *Physikalische Chemie der Zellen und der Gewebe*. Leipzig, Engelmann (1926).

(20) R. HÖBER, «*Physiol. Rev.*», XVI, 52 (1936).

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Biologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, presso la Stazione Zoologica di Napoli, diretto dal Prof. G. Montalenti.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

(1) J. BRACHET, «*Arch. de Biol.*», vol. 53, pp. 207-257 (1942).

(2) G. MONTALENTI, G. VITAGLIANO, M. DE NICOLA, «*Heredity*», vol. 4, pp. 75-87 (1950).

(3) G. MONTALENTI, «*Boll. Soc. It. Biol. Sper.*», vol. 15, pp. 1108-1110 (1940).

(4) G. MONTALENTI, «*Proc. 6th. Intern. Congress of Exper. Cyt.*», pp. 123-128 (1947).

individui in fase maschile, ma anche alcuni di quelli che si trovano in transizione verso la fase femminile, questi ultimi con l'intento di indagare i fenomeni di degenerazione dei testicoli.

Le gonadi sono state fissate in liquido di Helly e le sezioni, dello spessore di 7 o 8 μ , sono state colorate con ematossilina ferrica di Heidenhain o con la reazione di Feulgen e, in maggior parte, con la miscela di Unna-Pappenheim per mettere in evidenza l'RNA. Sono stati fatti i controlli con la ribonucleasi.

La struttura della gonade di *Anilocra* è stata descritta da Montalenti⁽⁵⁾. La struttura istologica è analoga a quella di *Asellus* descritta dalla Vitagliano⁽⁶⁾. Nell'interno di ogni follicolo rivestito dalle grosse cellule poliploidi, si trovano due gruppi di cellule germinali: goni che non hanno ancora iniziato la meiosi e spermatociti, o spermatidi o spermatozoi. Il decorso della meiosi e della spermioistogenesi è, come in *Asellus*, sincrono per tutti gli elementi dello stesso lobo. Quando vi sono spermatozoi, la massa dei goni è già entrata in meiosi per la preparazione della successiva ondata spermatogenetica e solo pochi goni (da cui inizierà un'ulteriore ondata) rimangono quiescenti. In questo caso, dunque, si trovano nel lobo tre tipi di cellule germinali: goni quiescenti, spermatociti in stadio di leptozigotene e spermatozoi. I vari stadi del processo spermatogenetico verranno descritti nel lavoro in esteso.

Le cellule follicolari elaborano e secernono, sotto forma di granuli, un'abbondante quantità di RNA, che viene immesso tra le cellule germinali e da queste, a quanto pare, assorbito ed utilizzato.

Non ho potuto accertare se la secrezione consiste esclusivamente di RNA o se nei granuli si trovi qualche sostanza di altra natura. Il processo di secrezione è ciclico e la sua corrispondenza con i diversi stadi della spermatogenesi è indicato nella tabella I.

In base ai caratteri del nucleo, del citoplasma e dei granuli di secrezione, ho potuto distinguere nel ciclo di attività delle cellule follicolari quattro fasi che corrispondono abbastanza bene, salvo variazioni di secondaria importanza, a quelle stabilite in *Asellus*.

Le quattro fasi hanno i seguenti caratteri, messi in evidenza mediante la colorazione con Unna-Pappenheim.

FASE I O QUIESCENTE. - Cromocentri blu in numero diverso, a seconda del grado di poliploidia; nucleoli⁽⁷⁾ in numero 7 o 8, di cui alcuni, che ritengo in via di formazione⁽⁸⁾, attaccati ai cromocentri, con un aspetto tondeggianti o clavi-forme e a volte allungati fra due cromocentri, altri in posizione periferica e più piccoli; citoplasma incolore e privo di granuli di secrezione.

FASE II. - Cromocentri viola, cromatina viola a zolle molto fitte che occupa tutto lo spazio contenuto nella membrana nucleare; nucleoli fortemente pironinofili; più grossi e meno numerosi di quelli della fase precedente, e spostati verso la periferia del nucleo; citoplasma incolore e privo di granuli di secrezione.

(5) G. MONTALENTI, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. 18, pp. 338-394 (1941).

(6) G. VITAGLIANO, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. 21, pp. 164-182.

(7) Tutti i nucleoli sono pironinofili e circondati da un anello di cromatina; non si colorano più con la pironina, dopo trattamento con la ribonucleasi.

(8) T. CASPERSSON, I. SANTESSON, «Acta Radiol.», suppl. XLVI, pp. 1-105 (1942).

FASE III. — Cromocentri viola, cromatina viola diffusa. I nucleoli sono difficilmente visibili, ma a volte si intravedono molto grandi, fortemente pironinofili ed in numero di due o tre alla periferia del nucleo, che si presenta molto contratto; citoplasma incolore. Talvolta si osserva della sostanza fortemente pironinofila addossata alla parete esterna del nucleo. Questo rappresenta l'inizio del passaggio dell'RNA dal nucleo al citoplasma, che raggiungerà il massimo di intensità nella fase successiva.

FASE IV. — Meno definibile delle precedenti, perchè i mutamenti che procedono con la secrezione sono più rapidi. La cromatina conserva inizialmente un aspetto diffuso, il succo nucleare è violaceo. Man mano che l'RNA passa dal nucleo al citoplasma della cellula follicolare, la cromatina riprende il colore verde ed un aspetto prima diffuso, poi a zolle, quindi a raggiera attorno ai cromocentri. I nucleoli periferici sono piccoli ed incolori come anellini vuoti; il citoplasma è carico di RNA. Mentre quest'ultimo esce dal citoplasma delle cellule follicolari e si diffonde tra gli elementi germinali, i nuclei poliploidi riprendono l'aspetto iniziale (fase I) e nuovi nucleoli appaiono attorno ai cromocentri.

TABELLA I.

| Stadi della meiosi | nucleoli (1) | pironinofilia del citoplasma | granuli RNA liberi | fasi delle cellule follicolari |
|------------------------------|--------------|------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------|
| Goni I con mitosi | 3-4 piccoli | + | ++ | I II III |
| Goni II quiescenti | 3-4 piccoli | +++ (2) | +++ | IV |
| Preleptotene I | 1-2 grandi | ++ | — | I |
| Preleptotene II | 1 grande | + | — | II III |
| Leptotene | 1 grande | +++ | +++ | IV |
| Lepto-zigotene | 1 grande | ++ | — | I |
| Zigotene | 1 grande | + | — | II III |
| Pachitene | 1 grande | +++ | +++ | IV |
| Diacinesi | 1 piccolo | ++ | — | I |
| Metase I-II | — | + | — | I |
| Spermatidi | — | +(3) | — | I |
| Spermatozoi | — | — | — | I |

(1) I nucleoli sono sempre pironinofili.

(2) La pironinofilia non è uniforme, ma massima dalla parte della cellula rivolta verso i nuclei poliploidi.

(3) Il citoplasma pironinofilo è in via di eliminazione e formerà il coagulo rosa, che rimane compreso tra le teste degli spermatozoi, i quali assumono una caratteristica disposizione periferica, con le teste rivolte verso il centro del follicolo.

Come risulta dalla Tabella I, si possono riconoscere in ogni ciclo spermatogenetico tre periodi di secrezione, di cui il primo si svolge durante lo stadio di goni, il secondo comincia in corrispondenza del preleptotene ed ha il suo massimo

allo stadio di leptotene, il terzo si svolge durante la profase meiotica, ed ha il suo massimo allo stadio di pachitene. Dopo di questo le cellule follicolari entrano in stadio di riposo e vi rimangono durante tutto il successivo periodo della meiosi e della spermiostigiogenesi.

Sembra che l'andamento ciclico della secrezione dell'RNA sia in rapporto al tempo impiegato dagli elementi germinali per assorbirlo. Cioè, l'RNA secreto all'inizio della meiosi, dopo che i goni hanno subito il processo di auxocitosi, passando attraverso il citoplasma ed il nucleolo degli elementi germinali, verrebbe completamente assorbito ed utilizzato da questi, forse per la sintesi dell'acido timonucleico⁽⁹⁾, al leptotene, quando i cromosomi si mettono per la prima volta in evidenza. L'RNA secreto al leptotene sarebbe completamente utilizzato al pachitene (primo ispessimento dei cromosomi). L'RNA secreto al pachitene, sarebbe completamente utilizzato alla diacinesi, metafase I (secondo ispessimento dei cromosomi).

Nella gonade degli individui che si trovano in stadi di transizione verso la fase femminile, con ovari molto sviluppati, si notano fenomeni di degenerazione a carico dei testicoli, che in seguito porteranno alla totale scomparsa di questi organi. Nei testicoli in cui la degenerazione è all'inizio ho osservato che le cellule follicolari non secernono più RNA. Le cellule germinali maschili degenerano con modalità diverse, a seconda dello stadio in cui si trovano, modalità che descriverò nel lavoro in esteso.

È evidente l'analogia che questi fenomeni presentano con quanto descritto in *Asellus*. Alcune lievi differenze nella corrispondenza degli stadi, mi sembrano di secondaria importanza, e mi riservo di discuterle nel prossimo lavoro.

Anche in *Anilocra*, come in *Asellus*, vi è un'abbondante fornitura di RNA all'inizio del processo meiotico, seguita da altri due cicli secretori, che presentano i rispettivi massimi al leptotene ed al pachitene. Ritengo pertanto di poter confermare il nesso tra l'attività delle cellule follicolari e lo svolgimento del processo meiotico, descritto in *Asellus* da Montalenti, Vitagliano, De Nicola.

Biologia. — *Azione indiretta della temperatura sull'ipofisi nel Tritone crestato.* Nota^(*) di VALDO MAZZI, presentata^(**) dal Socio N. BECCARI.

In precedenti ricerche (Mazzi, 1949⁽¹⁾; Mazzi e Pieri, 1949⁽²⁾) riuscii a dare una dimostrazione sperimentale che la temperatura agisce sull'ipofisi del Tritone crestato, modificando il tasso di elaborazione e di immissione in circolo degli ormoni gonadotropi. Infatti una temperatura di serra durante i mesi più freddi dell'anno indusse, sia nei ♂♂ che nelle ♀♀, la comparsa di quadri citologici ipofisari di tipo

(9) J. BRACHET, «Bull. Soc. Chim. Biol.», vol. 18, pp. 305-317 (1936); «Arch. de Biol.», vol. 48, pp. 529-548 (1937); «Growth», vol. 11, pp. 309-324 (1947).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

(1) «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 6, 523 (1949).

(2) «Riv. Biol.», 41, 271 (1949).

estivo, parallelamente alla regressione dei C. S. s. e alla riattivazione della spermatogenesi nei ♂♂ e della 1^a e 2^a fase dell'ovogenesi nelle ♀♀⁽³⁾. Restava però da dimostrare se la temperatura agiva sulle cellule preipofisarie direttamente, cioè senza l'interposizione di particolari meccanismi, oppure indirettamente attraverso il sistema nervoso centrale, come altri stimoli esterni.

Una esperienza condotta su di un lotto di Tritoni crestatati ha permesso di chiarire, sia pure in via preliminare, questo punto.

Diciotto ♂♂ di Tritone crestato furono lesionati in corrispondenza o in vicinanza di quella regione del pavimento infundibolare da me chiamata cercine endimale (Mazzi e Pieri, 1949)⁽⁴⁾ e che, secondo Green (1947)⁽⁵⁾ corrisponderebbe alla eminenza mediale dell'ipotalamo dei Mammiferi. L'operazione fu eseguita fra il 18 e il 20 aprile di quest'anno e gli animali operati, insieme ad otto controlli, furono allevati in serra calda a 21°,1 (temperatura media) dal giorno dell'operazione fino al 3 giugno, giorno in cui furono sacrificati.

Le condizioni dei testicoli e delle ipofisi degli animali operati sono state già descritte in una precedente comunicazione (Mazzi, 1950)⁽⁶⁾, nella quale i dati raccolti sono stati utilizzati ai fini del problema delle correlazioni pituitario - sessuali. In breve ricordo che la spermatogenesi si è riattivata nel 100 % dei controlli (in quattro con caratteri di subnormalità), mentre nel 16,6 % degli animali operati la spermatogenesi non si è riattivata, essendo presenti nei testicoli, di aspetto atrofico, solamente protogoni e spermatogoni. Il quadro citologico ipofisario degli animali operati, nei quali la spermatogenesi si è riattivata, e naturalmente anche dei controlli, pure in serra, è paragonabile a quello proprio dell'ipofisi di animali in natura in luglio, e viene assunto in gran parte indipendentemente dal grado raggiunto dalla spermatogenesi. Invece l'ipofisi degli animali operati con spermatogenesi inattiva è contraddistinta da un quadro di spiccata cromofobia, dipendente dalla accentuata degranulazione dei tipi cellulari acidofili, più che dei tipi basofili, che ho interpretato come indizio di inattività funzionale della ghiandola.

Questa esperienza, che ha un carattere preliminare per il numero relativamente piccolo degli animali operati, per la tecnica operatoria adottata, non perfettamente soddisfacente, e infine perchè in molti casi non è stato possibile accertare l'entità della lesione provocata, dimostra pur tuttavia in modo abbastanza convincente che la temperatura non agisce direttamente sulle cellule preipofisarie.

(3) In queste stesse esperienze è stato osservato inoltre che in due gruppi di ♀♀ la serra non ha fatto regredire i C. S. s. interni ed esterni. Questo fatto è importante in quanto metterebbe in evidenza un determinismo differente da individuo a individuo di uno stesso carattere e in quanto avrebbe permesso di cogliere nel momento della sua formazione il tipo a regolazione mista (MAZZI e GALGANO, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 6, 518 (1949)). La mancata regressione si accompagna alla assunzione del quadro invernale da parte di un tipo cellulare della preipofisi (le cellule acidofile del I tipo). Fatto questo che starebbe ad indicare la possibilità della presenza di un ritmo interno che regola l'attività della pituitaria indipendentemente dal fattore temperatura.

(4) «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 6, 365 (1949).

(5) «Anat. Rec.», 99, 21 (1947).

(6) «Boll. Zool.» (in corso di stampa).

Se così fosse infatti in tutti gli animali operati la spermatogenesi si sarebbe dovuta riattivare indipendentemente dalla gravità e dalla localizzazione delle lesioni.

È assai verosimile quindi che la temperatura agisca sull'ipofisi indirettamente, comunque interferendo sui meccanismi di regolazione interna della ghiandola, ai quali, secondo moderne ricerche, presiederebbe l'ipotalamo attraverso un complesso giuoco di correlazioni neuromorali (7).

L'esperienze attuali non permettono deduzioni di sorta circa la localizzazione del centro o dei centri ipotalamici deputati alla regolazione della funzione gonadotropa ipofisaria. In base alle conoscenze attuali si può ritenere che a questa funzione non sia estranea l'area preottica. Questa supposizione sembra essere avvalorata dalla circostanza, emersa nelle presenti ricerche, che lo stato di inattività funzionale dell'ipofisi è contraddistinto non solo da cromofobia del lobo anteriore, ma anche da una spiccata atrofia del lobo nervoso. Orbene, è noto che nei vertebrati superiori l'atrofia del lobo nervoso segue di norma alla degenerazione del f. preottico-ipofisario. Onde si potrebbe supporre che nelle presenti esperienze la lesione - anche se poco profonda, come sembra essere in ogni caso - abbia provocata l'interruzione del f. preottico-ipofisario che, negli Anfibi, corre molto superficiale nel pavimento dell'ipotalamo. I metodi di colorazione eseguiti (metodo I di Galgano e emallume-orange) non hanno consentito di dare una base a questa supposizione, onde rimando ad esperienze in corso la risposta a quei problemi che qui ho voluto semplicemente prospettare.

Biologia. — *Il comportamento della cellula di Mauthner di raganella nella metamorfosi accelerata con somministrazione di tiroide* (*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI e di G. CATTE, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Le cellule di Mauthner (CdM) sono una coppia di elementi tegmentali caratteristici degli Ittiopsidi e che risaltano per le loro notevoli dimensioni e per la loro peculiare forma; ciò, collegato con la costanza di rapporti e di sede, fa sì che esse siano facilmente reperibili sin nei più precoci stadi embrionali. Dobbiamo a Szepsenwol (1935) ed a Leghissa (1941) la descrizione di tali elementi nello sviluppo larvale in rapporto alle prime attività motorie dell'animale. Per le loro peculiari caratteristiche, Stefanelli (1945-50) ha considerato i neuroni di Mauthner un utilissimo materiale per lo studio sperimentale sulla determinazione istogenetica della cellula nervosa, sul suo differenziamento e sui fattori causali dello sviluppo e dell'orientamento dei suoi prolungamenti; su quest'ultimo problema vanno ricordati anche alcuni lavori fatti in America da Oppenheimer (1941-44)

(7) I meccanismi per mezzo dei quali la luce e la temperatura regolano i cicli sessuali fotoperiodici sono stati analizzati in una rivista di GALGANO e MAZZI, attualmente in corso di stampa nella « Rivista di Biologia ».

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

e Piatt (1943-49); quest'ultimo, di recente (1947), si è anche occupato della determinazione dell'elemento mauthneriano ⁽¹⁾.

La funzione delle cellule di M. è stata oggi messa in chiara evidenza con osservazioni comparative morfo-ecologiche: essa è precisamente quella di coordinare il movimento della coda nella natazione (attributo già ammesso da Tagliani (1905) e da Beccari (1907)) con gli eccitamenti provenienti dai centri vestibolari, ma soprattutto con quelli della linea laterale (Stefanelli 1949-50) ⁽²⁾; all'esame istologico, infatti, la CdM degli Anfibi anuri (limitandomi agli animali di cui è oggetto il presente lavoro) sono caratterizzate da un voluminoso dendrite, connesso con l'area della linea laterale, e da un lungo e grosso neurite che, seguendo il fascicolo longitudinale mediale, decorre lungo il midollo spinale; dal punto di vista ecologico inoltre, esse difettano negli Ittiopsidi sprovvisti di linea laterale (Anfibi urodeli adulti a vita terrestre quali *Geotriton* e *Salamandra*) o di coda (*Orthogoriscus* tra i Teleostei ed Anfibi anuri adulti); va notato in proposito, come ha messo in risalto Stefanelli (1950) ⁽²⁾, che in alcuni Anfibi urodeli adulti esse presentano periodiche variazioni di volume in rapporto all'alternanza tra i periodi a vita acquatica e quelli a vita terrestre (quando i bottoni della linea laterale si approfondano nella cute); particolarmente significativo, infine, il caso (illustrato da Stefanelli) di *Xenopus laevis*, Anuro in cui, per quanto si conservino gli organi della linea laterale, l'apparato di M. scompare in seguito all'atrofia della coda: dopo due mesi e mezzo dalla metamorfosi i due tipici elementi nervosi possono ancora rinvenirsi, ma sono estremamente ridotti, privi di dendriti e riconoscibili solo per la loro forma affusolata e per la peculiare sede che occupano.

Con questa Nota illustriamo alcuni risultati riguardanti l'involuzione della CdM provocata sperimentalmente nell'*Hyla arborea savignyi*, accelerandone la metamorfosi mediante somministrazione di tiroide; questo studio si inquadra nel campo di ricerche sulla evoluzione dei neuroni che si stanno compiendo in questo Istituto e rappresenta un aspetto del problema affrontato da uno di noi riguardante il metabolismo della cellula nervosa nei fenomeni di reattività e di atrofia, provocati sperimentalmente, quali sono desumibili dal comportamento della tigreide (Baffoni 1950) ⁽³⁾.

Studiando l'evoluzione morfologica della CdM in questi Anfibi, in cui vi è un adattamento alla vita terrestre nella condizione adulta, onde compararla con quella descritta da Stefanelli (1950) ⁽⁴⁾ in *Xenopus laevis*, anuro adattato esclusivamente alla vita acquatica, abbiamo voluto comparare il comportamento di questi neuroni nella normale metamorfosi con quello nella metamorfosi provocata precocemente; è noto, infatti, da ricerche iniziate da Gudernatsch (1912), ma svilup-

(1) Per tutti questi problemi sperimentali e per quelli di morfologia e di fisiologia della CdM rimando alla Memoria di STEFANELLI: *The Mauthnerians apparatus in Ichthyopsida: its nature and function, problems of the neurogenesis* (in corso di stampa in «Quart. Rev. Biol.»).

(2) AL. STEFANELLI, «Riv. di Biol.», vol. 41, pp. 249-69 (1949); «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. 8°, pp. 59-64 (1950).

(3) G. M. BAFFONI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. 8°, pp. 389-93.

(4) AL. STEFANELLI, «Boll. di Zool.», vol. 16, pp. 139-44; «Ric. Sci.», vol. 20, pp. 609-23 (1950).

pate principalmente da Cotronei (1913-1921)⁽⁵⁾ e continuate da numerosi Autori (Giacomini, Romaeis, Abderhalden, Swingle, Gunthorp, Aron, Clements, Allen, Schneider, ecc.) che estratti di ormone tiroideo accelerano i processi metabolici delle larve di Anfibi affrettandone la metamorfosi.

Sono stati perciò allestiti i seguenti lotti di esperimento:

| N. | n. di girini | Conc. gr. /100 cc. H ₂ O | Temp. max-min. | Morti nei primi tre giorni | morti dopo trattamento | Superstiti |
|----|--------------|---|-------------------|----------------------------------|---------------------------|------------|
| 1° | 25 | 0,25 | 11°-18° | 7 | 14 | 4 |
| 2° | 25 | 0,25 | 11°-18° | 6 | 15 | 4 |
| 3° | 25 | 0,05 | 18°-25° | 8 | 12 | 5 |
| 4° | 25 | 0,05 | 18°-35° | 6 | 11 | 8 |

I girini (di 15 gg. dalla deposizione delle uova) furono trattati con estratti di tiroide fresca di vitello per una durata di dieci giorni consecutivi, e nutriti con alghe (*Spirogyra*) e tuorlo d'uovo. La notevole mortalità riscontrata dopo il trattamento va messa in rapporto, come è stato dimostrato da Cotronei (1913), con le alterazioni dell'equilibrio morfogenetico della metamorfosi, e quindi con le disarmonie che l'azione ormonale provoca negli organi dei girini; al termine del trattamento, infatti, gli animali presentavano dimensioni ridotte: rispetto ai controlli, la loro testa era molto ingrossata, appiattita e più differenziata; le zampe posteriori erano già sviluppate; entro quattro giorni sono comparse le zampe anteriori ed è iniziata l'atrofia della coda; gli arti, rispetto ai controlli in metamorfosi (che è avvenuta dopo un mese), sono di dimensioni ridotte (fig. 1).

I cervelli dei girini del 1° e 2° lotto, fissati in Bouin, sono stati colorati con il metodo di Bodian (sezioni di 12 μ); quelli del 3° e 4° lotto, fissati in Helly (sezioni di 8 μ) e colorati con bleu di toluidina.

Gli effetti più caratteristici si riscontrano nei girini dei primi due lotti sacrificati quattro giorni dopo l'inizio della metamorfosi: il midollo allungato si presenta ispessito e con alcuni caratteri morfologici più evoluti che nei controlli al termine della metamorfosi; l'area della linea laterale è notevolmente atrofizzata; le CdM a volte difettano del tutto (due casi), altrove se ne è rinvenuta solo quella di un lato (due casi) o quelle di ambedue (quattro casi): questi elementi, però, si presentano notevolmente ridotti in volume, con nucleo non ben distinguibile e con l'unico dendrite ed il neurite assottigliatissimi (fig. 2); la loro identificazione è ancora possibile data la forma allungata e la caratteristica sede che occupano.

Nei lotti 2° e 3°, in cui è stata usata una concentrazione cinque volte minore che nei primi due lotti (questa infatti, a temperatura di 18-25° C, comprometteva la vitalità dei girini), l'effetto dell'ormone tiroideo è più lieve: le CdM conservano

(5) G. COTRONEI, «Bios», vol. 2, pp. 27-46 (1913); «Arch. It. Biol.», vol. 61, pp. 305-24 (1914); «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», vol. 25 (V), pp. 48-54 (1916).

la loro forma ed il loro aspetto morfologico, sono però meno voluminose; le zolle di tigroide (che nella CdM dei controlli si presentano come grossi filamenti, particolarmente numerosi in prossimità del nucleo) sono in minor numero, più sottili e mancano del tutto lungo il dendrite laterale ed alla periferia del pirenoforo, come avviene nel tipico quadro della cromatolisi periferica; il fenomeno si inizia con la disgregazione pulverulenta che in breve si propaga dalle estremità a tutta la zolla risolvendosi in un alone e che quindi si diffonde con quella delle

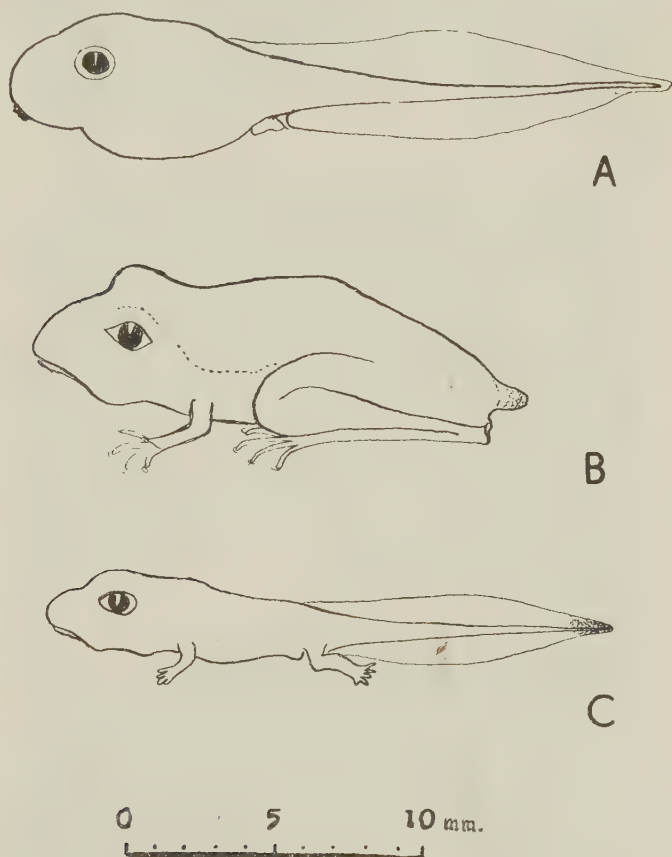


Fig. 1.

A, girino normale di 28 giorni di *Hyla arborea Savignyi*; B, controllo normale appena metamorfosato (dopo 60 giorni); C, girino nutrito con tiroide dopo 28 giorni.

zolle vicine conferendo al citoplasma un'aspetto di cromatofilia diffusa; le zolle, però, non scompaiono completamente: infatti, nei casi in cui i granuli si sono dissolti, esse si rinvergono ancora, benchè molto più rade, irregolari ed assottigliate in lunghezza e spessore. L'inizio delle alterazioni descritte si accenna già nei primi giorni del trattamento (dopo tre giorni).

Le modificazioni strutturali della tigroide assumono una particolare importanza tenendo conto che nella CdM dei controlli si ha lo stesso quadro citologico dopo venti giorni della metamorfosi: in un nostro lavoro in corso in cui è

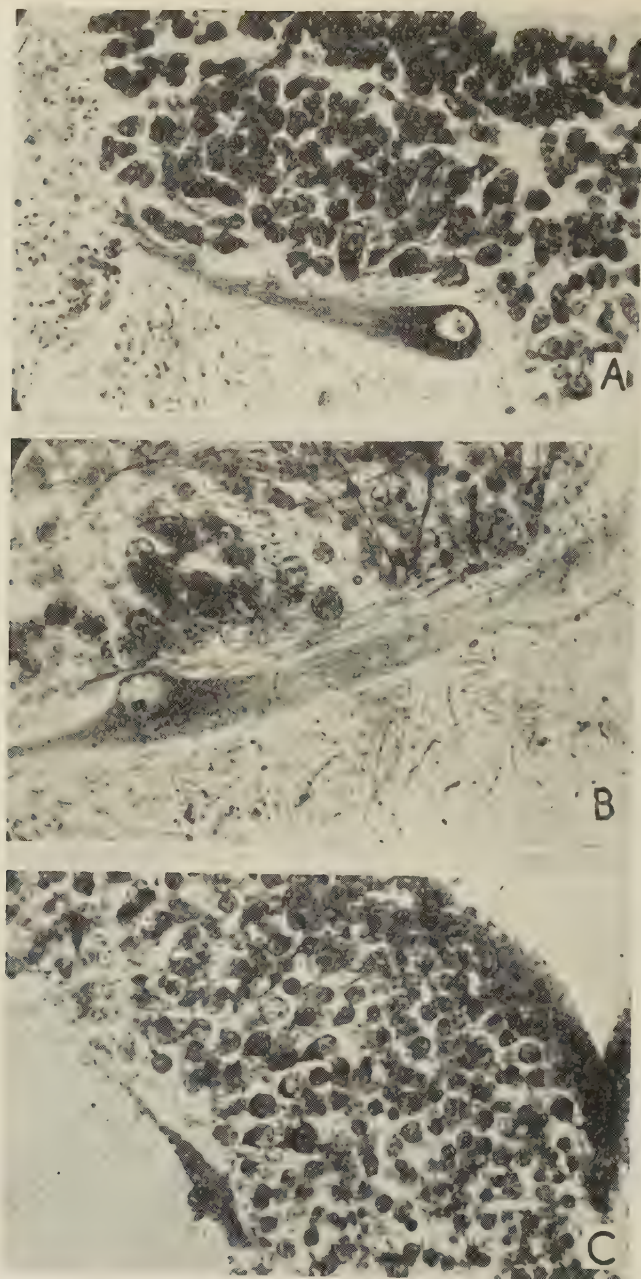


Fig. 2.

A, cellula di Mauthner di girino normale dopo 28 giorni; B, cellula di Mauthner di controllo appena metamorfosato (dopo 60 giorni); C, cellula di Mauthner di girino di 28 giorni metamorfosato precocemente in seguito a nutrizione con tiroide. Metodo Bodian al protargolo.

stata presa in esame tutta la serie delle trasformazioni della tigre della CdM di *Hyla*, si è potuto constatare che la cromatolisi periferica è l'aspetto morfologico normale del tipico processo d'involutione degli elementi mauthneriani;

nei casi di metamorfosi accelerata, pur conservandosi lo stesso quadro di cromatolisi, il fenomeno è anticipato e notevolmente accelerato, tanto che in brevissimo tempo (prima ancora che la coda sia completamente atrofizzata) la CdM scompare addirittura.

Le ricerche di Cotronei (o. c.)⁽¹⁾ sul sistema digerente e sullo sviluppo degli arti di Anfibi anuri trattati con tiroide, hanno messo in evidenza che lo sviluppo non procede nei vari organi seguendo il ritmo normale: l'ormone tiroideo, agendo simultaneamente su tutti i componenti cellulari dell'organismo, altera la normale successione dei fenomeni della metamorfosi dando luogo a disarmonie. Anche per i centri del sistema nervoso che ho esaminato, valgono le deduzioni di Cotronei: i fenomeni di involuzione o di evoluzione di essi, infatti, non seguono la normale successione; per esempio: l'atrofia dei centri della linea laterale è molto più accentuata; relativamente al differenziamento dei centri del facciale: questi negli animali trattati si presentano ad uno stadio analogo a quello dei controlli al termine della metamorfosi, quelli (come pure, di conseguenza, le CdM), invece, sono simili a quei dei controlli di un mese dopo la metamorfosi; ne conseguono disarmonie e modificazioni morfologiche che rendono impossibile ogni diretto riferimento dei cervelli di animali trattati a quelli della serie di sviluppo normale.

Concludendo: la metamorfosi accelerata dall'azione degli estratti tiroidei, anticipando i processi morfogenetici, agisce sul sistema nervoso evolvendolo verso la forma adulta, sebbene con evidenti disarmonie. È stato osservato che alla rapida atrofia dei centri della linea laterale si accompagna una precoce involuzione della CdM. Le disarmonie del sistema nervoso, prodotte dall'ormone tiroideo, sono dovute ad una maggiore anticipazione delle modificazioni, evolutive od involutive, di quei centri nervosi che hanno uno specifico valore per la vita larvale o per quella adulta, rispetto allo sviluppo di quelli che invece non sono specificamente collegati con le attività delle due diverse condizioni di vita dell'animale (acquatica e terrestre).

Biologia. — *Sindrome mortale caratterizzata da manifestazioni a carico del sistema nervoso nel ratto alimentato con una dieta altamente purificata contenente solfonamidoguanidina*^(*). Nota II di LEONARDO TENTORI e GIROLAMO VIVALDI, presentata^(**) dal Socio D. MAROTTA.

In una Nota precedente⁽¹⁾, abbiamo riferito di una sindrome che insorge nei ratti albinici alimentati con una dieta sintetica altamente purificata contenente il 2% di solfonamidoguanidina ed addizionata con tutti i fattori del gruppo B ad eccezione dell'acido folico. Nella presente Nota riferiamo i risultati di esperimenti condotti allo scopo di prevenire la insorgenza di tale sindrome.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

(1) L. TENTORI, G. VIVALDI, «Atti Accad. Naz. Lincei», vol. VIII, 1, 74 (1950).

Le diete basali adoperate sono state le seguenti:

| Dieta I | | Dieta II | |
|---|--------|---|--------|
| Caseina ⁽²⁾ | p. 18 | Caseina ⁽²⁾ | p. 18 |
| Saccarosio | p. 67 | Saccarosio | p. 67 |
| Miscela salina ⁽³⁾ | p. 4 | Miscela salina ⁽³⁾ | p. 4 |
| Burro | p. 9 | Burro | p. 9 |
| Olio di fegato di merluzzo | p. 2 | Olio di fegato di merluzzo | p. 2 |
| Streptomicina ⁽⁴⁾ | g. 1 ‰ | Solfonamidoguanidina ⁽⁵⁾ | g. 2 ‰ |

Ad ogni Kg. delle diete suddette venivano aggiunte le seguenti sostanze ad attività vitaminica:

| | |
|-------------------------------------|---------|
| Tiamina | mg. 10 |
| Riboflavina | mg. 20 |
| Piridoxina | mg. 10 |
| Acido nicotinico | mg. 100 |
| Pantotenato di calcio | mg. 100 |
| Acido p-aminobenzoico | mg. 100 |
| Acido ascorbico | mg. 100 |
| Colina cloridrato | mg. 200 |
| Inositolo | mg. 200 |
| Menadione sodio bisolfito | mg. 50 |
| Alfa-tocoferolo | mg. 100 |
| Linoleato di etile | g. 10 |

Un gruppo di 44 ratti albinì di sesso maschile del peso iniziale di circa 40 grammi, dopo aver ricevuto per 30 giorni la dieta I, è stato passato alla dieta II. Abbiamo seguito questa modalità sperimentale perchè, nel precedente esperimento, avevamo osservato che nei ratti che avevano ricevuto fin dall'inizio la dieta contenente streptomicina e che poi erano stati passati a quella contenente solfonamidoguanidina, la sindrome a carico del sistema nervoso insorgeva in un periodo di tempo più breve che non in quelli che fin dall'inizio ricevevano la dieta II. Dopo 60 giorni dall'inizio dell'esperimento abbiamo suddiviso gli animali in tre gruppi seguendo il metodo di sorteggio.

I gruppo: 20 animali alimentati con la dieta II.

II gruppo: 4 animali alimentati con la dieta II; ad essi veniva somministrato, per iniezione intramuscolare, una soluzione acquosa di complesso vitaminico B e di frazioni antianemiche di fegato ⁽⁶⁾ alla dose di cc. 0,2 ogni terzo giorno ⁽⁷⁾.

(2) Caseina priva dei fattori idrosolubili della Ditta Piccioni-Brescia.

(3) Miscela salina secondo Osborne e Mendel.

(4) Diidrostreptomicina Abbott.

(5) Guanicil Cilag.

(6) B-complexo con estratto epatico Squibb.

(7) Questo gruppo è stato istituito allo scopo di controllare i risultati già riferiti nella precedente Nota.

III gruppo: 20 animali alimentati con la dieta II alla quale veniva mescolato il 5% di feci di ratti ad alimentazione normale essiccate a bassa temperatura e polverizzate. Allo scopo di non alterare la percentuale di solfonamidoguanidina contenuta nella dieta, questa veniva preparata sottraendo in peso il 5% di saccarosio.

Nella fig. 1 sono rappresentate le curve di accrescimento dei tre gruppi di animali.

In tutti gli animali del I gruppo è insorta, a distanza di 80 giorni in media (da 63 a 87 giorni) dell'inizio dell'esperimento, la sindrome mortale caratteriz-

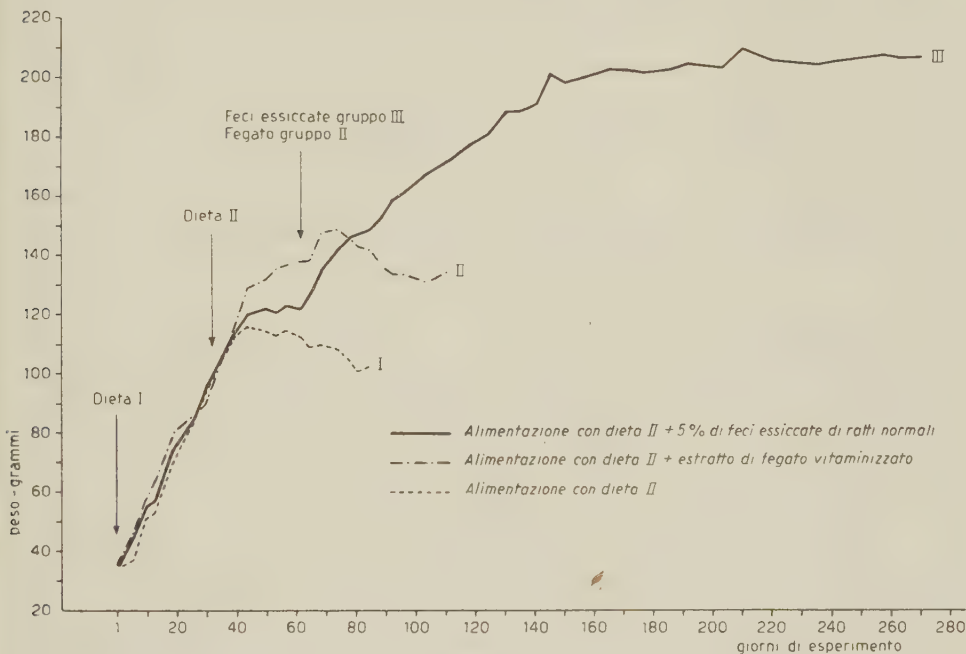


Fig. 1.

zata da manifestazioni a carico del sistema nervoso con lo stesso decorso e gli stessi sintomi che abbiamo descritto nella Nota precedente.

Dopo un breve periodo prodromico in cui l'animale presenta inappetenza, arruffamento del pelo, scarsa cura della propria pulizia, diminuzione graduale del peso ed una certa astenia, insorgono vari deficit motori e tremori a carico degli arti del treno anteriore e posteriore, con ipertonia, ipotermia, torpore marcato e, periodicamente, specie in seguito a forti stimoli consecutivi a lunghi periodi di riposo, crisi di tipo tetanico della durata di 1-2 minuti primi con estensione degli arti anteriori e posteriori e della coda, arresto completo del respiro, notevole opistotono o pleurototono, crisi che si risolvono lentamente con la graduale scomparsa dei sintomi; gli animali venivano a morte dopo 48-72 ore dall'inizio di questi sintomi.

Gli animali del II gruppo sono anch'essi venuti a morte in media dopo 106 giorni (da 100 a 112 giorni) con la stessa caratteristica sindrome.

Degli animali del III gruppo, invece, a distanza di 300 giorni dall'inizio dell'esperimento sono viventi l'80%; i restanti 20% sono morti a seguito di malattie intercorrenti, accertate all'autopsia e, comunque, senza mai presentare i segni caratteristici e inconfondibili della sindrome che abbiamo descritta⁽⁸⁾. Dall'inizio della somministrazione delle feci la curva di accrescimento degli animali trattati ha preso un andamento nuovamente ascendente, e la media dei pesi ha attualmente raggiunto i 210 g.; questi dati sono praticamente sovrapponibili a quelli rilevati dall'esame di un gruppo di ratti alimentati con una dieta standard non sintetica (Mc Collum) contenente il 2% di solfonamidoguanidina⁽⁹⁾.

Dai risultati che abbiamo esposto appare evidente che la somministrazione di feci di ratti ad alimentazione normale nell'ammontare del 5% nella dieta sintetica è capace di prevenire fino al 300° giorno di esperimento l'insorgere della sindrome caratteristica che negli animali non trattati dello stesso gruppo, tenuti nelle stesse condizioni sperimentali, si manifesta dopo circa 70-100 giorni dall'inizio dell'esperimento.

La somministrazione di un estratto di fegato non è invece capace di prevenire questa sindrome; il prolungamento della sopravvivenza degli animali così trattati fino a 106 giorni in media non può essere considerato un dato significativo.

Poichè gli animali alimentati con la dieta contenente il 5% di feci di ratti normali, pur seguitando a ricevere la stessa quantità di solfonamidoguanidina, hanno sopravvissuto circa 200 giorni a quelli che ricevevano la sola dieta sintetica, possiamo dedurre le seguenti conclusioni:

I) Viene confermato che la sindrome da noi descritta non è dovuta alla azione tossica della solfonamidoguanidina assorbita.

II) La somministrazione, a ratti alimentati con una dieta purificata contenente solfonamidoguanidina, di feci essiccate di animali normali nell'ammontare del 5% del peso della dieta, è capace di prevenire questa sindrome.

III) Probabilmente questa attività è legata all'apporto, per mezzo delle feci di ratto normale, di un quid sconosciuto nella sua natura e nel suo meccanismo di azione.

IV) Le cause della sindrome di cui ci stiamo occupando sono presumibilmente da riportarsi alle modificazioni qualitative e quantitative della flora intestinale provocate dalla azione che la solfonamidoguanidina esercita su di essa.

(8) In un gruppo di ratti alimentati con la dieta di Mc Collum contenente il 2% di solfonamidoguanidina, la mortalità per cause intercorrenti dopo 200 giorni dall'inizio della somministrazione è anch'essa del 20% (dati personali non ancora pubblicati).

(9) Dati personali non ancora pubblicati.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente, inviato il suo cordiale saluto a tutti i Soci e, in particolare, ai nuovi eletti, comunica che hanno ringraziato per la nomina i Soci Nazionali Proff. Francesco Paolo Cantelli, Biagio Longo, Egidio Meneghetti, Mario Tenani e i Soci Corrispondenti Proff. Giuseppe Amantea, Antonio Cavinato, Giuseppe Colosi, Edigio Feruglio, Giuseppe P. S. Occhialini, Francesco Pentimalli, Antonio Rostagni e Angelo Tonolo.

Quindi il Presidente dà alla Classe la dolorosa notizia della scomparsa del Socio Nazionale GIOVANNI GIORGI e del Socio Straniero COSTANTINO CARATHÉODORY, con le seguenti commosse parole:

« Durante l'estate l'Accademia ha perduto uno dei suoi Soci più cari, più assidui e più attivi. È morto improvvisamente a Livorno il 19 agosto Giovanni Giorgi. Lo conoscevo da quasi sessant'anni. Quando venni a insegnare a Roma Egli stava laureandosi in ingegneria. Entrammo subito in rapporti cordiali ed io mi accorsi fin d'allora della vastità della sua cultura, della profondità del suo ingegno e del suo acuto spirito critico. Due questioni particolarmente lo interessavano in quell'epoca: i principî della geometria e i postulati della dinamica. Quando Einstein pubblicò i primi lavori sulla relatività ristretta, il Giorgi era particolarmente dotato per apprezzarne l'alto valore e divulgarla tra noi. So che egli ben presto entrò in corrispondenza epistolare con Einstein, corrispondenza che sarebbe utile poter ricostruire anche per vedere quale influenza ebbero le idee del Giorgi sugli sviluppi ulteriori della teoria.

Ma l'ingegno eclettico del Giorgi si occupava nello stesso tempo di molti altri argomenti. Una buona parte dei suoi lavori è dedicata a questioni di elettrotecnica; altri trattano problemi spiccatamente tecnici ispirati dalla carica che Egli tenne dal 1906 al 1921 di Direttore dell'Ufficio Tecnologico del Comune di Roma. E tutti questi scritti si alternano con pubblicazioni di matematica pura: equazioni differenziali e integrali, calcolo funzionale, teoria delle funzioni.

I lavori che hanno reso noto in tutto il mondo il nome del Giorgi riguardano il sistema razionalizzato di misure, del quale egli cominciò ad occuparsi fino dal 1901, ottenendo nel 1935 che il « sistema Giorgi » fosse ufficialmente adottato dalla Commissione Elettrotecnica Internazionale.

Le sue numerose pubblicazioni (oltre 300), il sistema di misure, la partecipazione del Giorgi a molti Congressi internazionali, resero chiaro dovunque il suo nome. Dalla conoscenza, dal ricordo che ho di Lui, oso dire che Egli valeva anche più della sua fama. Alla Sua memoria inviamo un mesto saluto ».

Un'altra grave perdita ha subito la Classe, anzi la Categoria di Matematica e Meccanica, nel gruppo dei Soci Stranieri. È morto nel mese di febbraio di quest'anno Costantino Carathéodory, ma la notizia della sventura ci è pervenuta soltanto nell'agosto. Era un insigne matematico; di origine

greca, apparteneva alla scuola tedesca ed aveva insegnato quasi sempre in Università tedesche, ultimamente a Monaco, salvo qualche anno passato ad Atene e Smirne. È classico un suo trattato sulle funzioni reali che ha già avuto varie edizioni. Altri libri riguardano l'ottica geometrica e la rappresentazione conforme. Oltre questi argomenti Egli ha trattato in Memorie importanti questioni sul calcolo delle variazioni, sulle funzioni analitiche e armoniche e sui fondamenti della termodinamica.

Il Socio Armellini, riferendosi alle parole pronunciate dal Presidente per la morte di Giovanni Giorgi, ricorda che anch'egli era legato con il compianto Collega da un'amicizia che datava da più di 40 anni. Aggiunge che il Giorgi conservava molti appunti scientifici manoscritti indubbiamente preziosi e chiede al Presidente se l'Accademia potrebbe assumersi il compito di farli esaminare ed eventualmente pubblicare.

Il Presidente risponde che la proposta del Collega Armellini merita senz'altro di essere presa in considerazione, ma che per attuarla è necessario chiedere il permesso alla famiglia del compianto Socio. Questi aveva già perduto la moglie, e non aveva figli; e il Presidente ignora quali siano i più prossimi parenti; promette comunque che l'Accademia svolgerà delle ricerche in tal senso.

Il Socio Pierantoni ricorda che il Collega Giorgi fu anche un valoroso studioso di zoologia e un appassionato raccoglitore di conchiglie, delle quali possedeva una preziosa raccolta. A nome della Sezione di Zoologia, si associa al cordoglio per la scomparsa dell'illustre Scienziato.

PLICHI SUGGELLATI

Vengono quindi presentati i seguenti plichi suggellati: una Memoria scientifica del Dott. Prof. Oreste Gasparri dal titolo: «Dall'elettricità alla materia e viceversa»; due Memorie del Dott. Mario Bianco; una Memoria del Signor Tommaso Martini dal titolo «Natura chimica e attività terapeutiche del *Composto M.*»; una Nota dell'Ing. Beniamino Midulla che l'autore ha dichiarato essere una nota esplicativa del 5° periodo scritto a destra della figura nella pagina quarta della Memoria già inviata in plico suggellato dall'Ingegnere stesso all'Accademia e presentata alla Classe nella seduta ordinaria dell'11 febbraio 1950.

La Classe, preso atto dell'integrità dei sigilli, dispone che i sopra citati plichi suggellati siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è uscito durante le ferie il fascicolo 1-2 (luglio-agosto 1950) dei «Rendiconti» e che il successivo 3-4 (settembre-ottobre 1950) è già impaginato.

Il Senatore Castelnuovo ricorda poi che il Segretario Accademico prof. De Blasi è stato malato e che le sue condizioni quantunque ora migliorate, non gli hanno tuttavia permesso di assistere alla seduta. Formula per il predetto Collega i migliori auguri.

Il Socio Bompiani riferisce sulla conferenza per l'Unione Matematica Internazionale e sul Congresso Internazionale dei Matematici, che hanno avuto luogo negli Stati Uniti d'America nei mesi di agosto e settembre.

Il Socio Perucca riferisce sulle manifestazioni tenute a Parigi nello scorso mese di luglio per il cinquantenario della scoperta del Radio.

Il Socio Sergi riferisce sul Congresso di Scienze Preistoriche e Protostoriche svoltosi nello scorso agosto a Zurigo.

Il Presidente assicura che le relazioni dei predetti Soci saranno pubblicate nei «Rendiconti» e ringrazia i Soci stessi e tutti i Colleghi che hanno rappresentato l'Accademia a importanti manifestazioni scientifiche internazionali e nazionali.

Il Socio Beccari ricorda di aver rappresentato l'Accademia, unitamente al Collega Giuseppe Levi, al Congresso Internazionale di Anatomia di Oxford e si dichiara disposto a riferire, d'intesa con il citato Collega, sul Congresso stesso.

Il Presidente prega il Socio Beccari di accordarsi in tal senso con il Socio Levi e di riferire in una prossima seduta.

Il Socio Sergi dà notizia della recente scoperta di una mandibola di paleantropo al Monte Circeo, nella breccia ossifera situata subito all'esterno della Grotta Guattari, nell'interno della quale nel 1939 sono stati rinvenuti i resti di due paleantropi neandertaliani: un cranio (Circeo I) ed una mandibola frammentaria (Circeo II). La scoperta è avvenuta casualmente il 30 agosto 1950 per opera del dott. Antonio Ascenzi dell'Istituto di Anatomia Patologica di Roma e dell'insegnante Giovanni Lacchei che si erano recati sul luogo per diporto. Essi in un primo tempo estrassero la parte maggiore del corpo del lato sinistro della mandibola che consegnarono il 31 agosto al prof. Sergi. Questi, insieme con il prof. A. C. Blanc ed i due scopritori, procedette il 1° settembre al recupero della parte ancora racchiusa nella breccia e costituita di tutto il lato destro.

Il Presidente ringrazia il Collega Sergi per l'interessante comunicazione.

Il Socio Giordani presenta il seguente ordine del giorno:

«La Classe delle Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei ha preso in esame la situazione nella quale si trova la ricerca scientifica in Italia e la inderogabile necessità di provvedere oramai alla sua riorganizzazione ed al suo potenziamento nel quadro della ricostruzione delle attività nazionali ed in misura sufficiente ad assicurarne quello sviluppo che permetta ai nostri studiosi di mantenere le posizioni che loro competono nel campo del sapere, dove la genialità italiana seppe conquistare sempre primati ambiziosissimi, quando sola arma di competizione era l'ingegno, dovendo invece rassegnarsi a cedere il passo quando i poderosi mezzi sperimentali e la costosa organizzazione sistematica prendevano il sopravvento;

considerato poi che il modesto grado di sviluppo, nel quale si trova oggi la nostra organizzazione e la esiguità dei mezzi disponibili non consentono ancora di assicurare, come pur sarebbe necessario, la vita di numerosi istituti specializzati, aventi solo funzioni di ricerca, e considerato che ciò porta come conseguenza la necessità di utilizzare nel modo più razionale i laboratori universitari nei quali si esercitano anche le funzioni didattiche, tanto importanti ai fini della formazione della classe dirigente italiana; l'Accademia crede di dover segnalare che il problema prospettato acquista una generale importanza educativa, dovendosi in questi ambienti — dove tanti giovani italiani trascorrono il periodo più caratteristicamente formativo della loro esistenza — mantenere viva l'atmosfera di fede e di entusiasmo e bandire il senso di amarezza e di scoramento, provocati dalla deficienza dei mezzi di lavoro;

tenuto conto della necessità che, da un lato, i laboratori delle Università e degli Istituti Superiori siano tutti mantenuti ad un alto livello di efficienza per opera dell'amministrazione da cui dipendono e che, dall'altro lato, il Consiglio Nazionale delle Ricerche sia messo in grado di integrarne la funzionalità scientifica — così come avviene nei paesi più progrediti — svolgendo un'opera di selezione tecnica, volta a volta adeguata alle mutevoli necessità del lavoro scientifico, preparando la via per i maggiori sviluppi futuri;

fa voti

che il Governo voglia dedicare le sue più vigili cure affinché queste gravi esigenze siano soddisfatte in breve tempo con un programma organico di azione, che tenga conto anche delle necessità di vita degli studiosi, di cui si continua a lamentare un esodo preoccupante, e che, in tale attesa, si voglia dare una prima prova di sollecitudine e di interessamento concreto inscrivendo, nel bilancio dell'esercizio 1951-52, che sarà prossimamente discusso dal Parlamento:

1° un fondo adeguato a disposizione del Ministro della Pubblica Istruzione perchè sia *tassativamente* ed *esclusivamente* destinato ad incrementare le dotazioni dei laboratori;

2° un fondo a disposizione del Consiglio Nazionale delle Ricerche che ne riporti i mezzi per le meno alla parità con il potere di acquisto che essi avevano raggiunto prima dell'ultimo conflitto ».

Il suddetto ordine del giorno viene approvato per acclamazione e il Presidente ricorda brevemente ai Colleghi di essersi, nella sua qualità di Senatore, già attivamente occupato dell'importante questione in sede parlamentare e in colloqui con autorità e auspica un sollecito intervento del Governo.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Presidente prende quindi atto dell'elenco delle Note pervenute durante le ferie e, successivamente, presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci: Meneghetti, Pensa, Brunelli, Beccari, Vernoni, Carobbi,

Pupilli, Cotronei, Vardabasso, Bonino, Picone, Carrelli, Bargellini, Semerano e Marotta (quest'ultimo per mezzo del Segretario Accademico aggiunto Socio U. Amaldi).

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

VARDABASSO S. – Il problema stratigrafico del Cambrico Sardo.

BENIGNO P. e BERTI T. – Indagini quantitative sul meccanismo d'azione antibatterica dei detergenti (pres. dal Corrisp. E. MENEGHETTI).

BONATTI S. e GOTTARDI G. – Perrierite, nuovo minerale ritrovato nella sabbia di Nettuno (Roma). Nota preliminare (pres. dal Socio G. CAROBBI).

CAVALLINI D. e DE MARCO C. – Aminazione biologica dei chetoacidi aromatici (pres. dal Socio G. VERNONI).

CAVANNA R. e STÄLLBERG-STENHAGEN S. – Ricerche su composti alifatici superiori otticamente attivi in rapporto con la struttura dell'acido fitomonico (pres. dal Socio G. BARGELLINI).

CENNAME F. – Diffrazione dei Raggi X nei miscugli alcool stilicobenzolo (pres. dal Socio A. CARRELLI).

FOFFANI A. e VECCHI E. – Ricerche polarografiche sulla dipendenza del coefficiente di diffusione dell'ossigeno, in soluzione acquosa, dalla viscosità del mezzo e dalla temperatura (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

LEONARDI P. – Segnalazioni di resti di Antracoterio nelle lignite dei dintorni di Chiuppano (Vicenza) (pres. dal Corrisp. G. DAL PIAZ).

RAUNICH L. – Osservazioni sopra la localizzazione dell'abbozzo del telencefalo nella neurula degli Anfibi (pres. dal Corrisp. G. BRUNELLI).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Colonnetti offre in omaggio e illustra brevemente un volumetto di Barbara Allason dal titolo: « U. N. R. A. – C. A. S. A. S. Contributo alla ricostruzione », nel quale è esposta l'opera assistenziale svolta dal C. A. S. A. S. (Comitato Amministrativo Soccorsi ai Senzatetto), costituito nel gennaio 1946 e presieduto dal Presidente del Consiglio Nazionale delle Ricerche Socio Colonnetti.

Il Presidente Castelnuovo ringrazia il Collega Colonnetti.

Vengono quindi presentate le opere inviate in omaggio all'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'11 novembre 1950

- ALLASON Barbara. — *Unrra-Casas*. Contributo alla ricostruzione. Roma, Istit. Grafico Tiberino, 1950. Pp. 81, in-4°, con tavv.
- BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F. — *Progress Report, Seismological Laboratory, California Institute of Technology, 1949*. Estr. da « Transactions of the American Geophysical Union », vol. XXXI, 1950, n. 3.
- BRANDIMARTE Enzo. — *Guida per l'esecuzione delle prove pratiche e delle analisi sugli esplosivi*. Roma, Ministero Difesa - Marina, 1950. Pp. 157, in-8°, con tavv.
- CANDIOLI Primo. — *Evoluzione dell'agricoltura valeggiana...* Verona, Albarelli, 1950. Pp. 16, in-8°, con figg.
- *Orientamenti della peschicoltura veneta*. Estr. da « Atti dell'Accademia di Agricoltura, Scienze e Lettere di Verona », s. 5ª, vol. XXXV, a. 1948-49.
- CIPOLLA Francesco. — *Commemorazione del prof. Giuseppe Checchia Rispoli*. Estr. da « Giornale di Scienze Naturali ed Economiche », vol. XLV, sez. 1ª.
- *La Conca d'Oro e i suoi monti durante il Quaternario*. Estr. da « Atti dell'Accademia di Scienze Lettere e Arti di Palermo », vol. VIII, 1947-'48, p. 1ª.
- *Nuovi contributi alla conoscenza del Quaternario della Sicilia*. Estr. da « Giornale di Scienze Naturali ed Economiche », vol. XLVII, sez. 1ª.
- *Ragni nostrani predatori della formica argentina*. Estr. da « Giornale di Scienze Naturali ed Economiche », vol. XLV, sez. 1ª.
- Commemorazione di Ottavio Munerati nel primo anniversario della morte*. Rovigo, Istituto Padano di Arti Grafiche, 1950. Pp. 24, in-8°. (Stazione sperimentale di Bieticoltura, Rovigo).
- D'ANCONA Umberto. — *L'opera di Giovanni Canestrini nella zoologia del suo tempo*. Trento, 1950. Pp. 20, in-8°.
- DE MENEZES CORRÊA ACCIAIUOLI Luís. — *Bibliografia hidrológica do Imperio Português*. Vol. I. Lisboa, 1949. Pp. xv-445, in 8°.
- FELLGETT P. B. — *On the Ultimate Sensitivity and Practical Performance of Radiation Detectors*. Estr. da « Journal of the Optical Society of America », vol. XXXIX, 1949, n. 11.
- GUTENBERG B. — *Earthquakes in North America*. Estr. da « Science », vol. III, 1950.
- GUTENBERG B. - Vedi: BENIOFF H., GUTENBERG B. und RICHTER C. F.
- HADJINICOLAOU John. — *Comparative effectiveness of DDT chlordane aldrin and dieldrin residues against the olive fruit fly (Dacus oleae Rossi)*. Estr. da « Archives of the Malaria Division of Athens School of Hygiene », n. 351.
- HAMAKER H. C. — *Random Sampling frequencies: an implement for rapidly constructing large-size artificial samples*. Estr. dai « Proceedings » della K. Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, vol. LII, 1949, n. 4.
- *A simple Technique for producing random sampling numbers*. Estr. dai « Proceedings » della K. Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, vol. LII, 1949, n. 2.
- JANNONE Giuseppe. — *Vita di scienziato (Biografia di Filippo Silvestri)*. Pisa, Istituto di Entomologia Agraria dell'Università, 1950. Pp. 199, in-8°, con figg. e tavv.
- LARDÉ DE VENTURINO Alice. — *Fórmulas Gráficas Prácticas del Vitaoculiscopio y Oculisvita*. Montevideo, Imp. Central, 1950. Pp. 28, in-8, con figg.
- LINFOOT E. H. and WOLF E. — *On the Corrector Plates of Schmidt Cameras*. Estr. da « Journal of the Optical Society of America », vol. XXXIX, 1949, n. 9.
- LONA Fausto. — *Contributi alla storia della vegetazione e del clima nella Val Padana. - Analisi pollinica del giacimento villafranchiano di Lefte (Bergamo)*. Estr. da « Atti della Società Italiana di Scienze Naturali », vol. LXXXIX, 1950.
- LONGO Biagio. — *Acclimatazione di piante medicinali esotiche in Italia*. Estr. da « Rivista Italiana Firenze, Profumi, Piante

- Officinali, Olii Vegetali, Saponi », maggio 1949.
- LONGO Biagio. — *Comportamento di un individuo della seconda generazione del Melo « senza fiori »*. (*Pyrus apetala Münchh.*). Estr. da « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli », vol. LII, a. 1942.
- *Relazione riassuntiva dal 1° gennaio 1943 al 30 aprile 1947 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Officinali annessa all'Orto Botanico di Napoli*. Estr. da « Bullettino dell'Orto Botanico della Università di Napoli », t. XVII, 1947.
- *Sedici anni di sperimentazione su la canapa indiana (Cannabis Indica Lam.)*. Estr. da « Le piante officinali », 1947, n. 12.
- *Sulla fioritura dell'Araucaria Bidwilli Hook*. Estr. da « Bullettino dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli », t. XVI.
- LORIA Gino. — *Storia delle Matematiche dall'alba della civiltà al secolo XIX*. 2ª ed. Milano, Hoepli, 1950. Pp. xxxv-975, in-8°.
- LUGEON Maurice. — *La brèche et la colline d'Aigremont (Préalpes vaudoises)*. Un erreur et un énigme. Estr. da « Eglogae Geologicae Helveticae », vol. XLII, 1949, n. 2.
- LYCHNOS Nicos D. — *L'olivier et sa culture*. Athènes, Ministère de l'Agriculture, 1948-1949. Voll. 2, in-8°.
- MARTIN Ettore L. — *Ernesto Laura (1879-1949)*. Estr. da « Tecnica Italiana. Rivista d'Ingegneria e Scienze. Trieste », n. s., a. V, 1950, n. 1.
- MESSI Clara. — *P. M. Vincenzo Coronelli dei Frati Minori Conventuali (1650-1950)*. Padova, Tip. della Provincia Patavina dei Frati Minori Conventuali, 1950. Pp. 40, in-8°, con figg.
- Notes et publications scientifiques de Maurice Lugeon*. 6^{me} éd. Lausanne, Imprimerie La Concorde, 1950. Pp. 38, in-8°.
- RICHTER C. F. — Vedi: BENIOFF H., GUTENBERG B. and RICHTER C. F.
- SANSONE Giovanni. — *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*. Vol. I. 3ª ed. Padova, CEDAM, 1950. Pp. xi-322, in-8°. (Università di Firenze).
- SNEDEKER London. — *Health Services for Massachusetts Children*. Lancaster (Pennsylvania), The Intelligencer Printing Comp., 1949. Pp. 132, in-8°.
- R. Sociedad Española de Historia Natural. — Tomo Extraordinario publicado con motivo del LXXV aniversario de su fundación. Madrid, 1949. Pp. 506, in-8, con figg. e tavv. (Consejo Superior de Investigaciones Científicas).
- UNIVERSITÉ DE GENÈVE. — *Le 70^{me} anniversaire de la fondation de la Faculté de Médecine*. Allocutions et discours... Genève, Librairie de l'Université, 1948. Pp. 51, in-8°.
- VENZO Sergio. — *Rinvenimento di Anancus Arvernensis nel Villafranchiano dell'Adda di Paderno, di Archidiskodon Meridionalis e Cervus a Leffe. Stratigrafia e clima del Villafranchiano bergamasco*. Estr. da « Atti della Società Italiana di Scienze Naturali », vol. LXXXIX, 1950.
- VIGNEBON Guy. — *Étude microscopique, thermique et par fluorescence d'une terre prélevée au Congo Belge par la mission G. Waegemans*. Estr. da « Science et Technique », 1950, nn. 1-2.
- WOLF E. — Vedi: LINFOOT E. H. and WOLF E.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 dicembre 1950

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo.* — I. *Rilievi e precisazioni.* Nota (*) del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

1. È opinione molto diffusa che lo studio critico sull'opera di Galileo abbia oramai portato a conclusioni definitive tanto dal punto di vista scientifico che da quello storico e che ogni ulteriore discussione sulla materia non possa avere altro scopo che divulgativo o celebrativo. Sta però il fatto che — per quanto concerne la famosa disputa cosmologica alla quale in particolare intendo qui riferirmi — una valutazione critica approfondita e conclusiva degli argomenti trattati nei famosi « Dialoghi » si può dire mancata. Gli uomini di scienza — in special modo quelli dei tempi più recenti — si sono dispensati dall'impegnarsi a fondo in una discussione che essi giudicavano superflua ritenendo la questione « superata » coll'avvento della dinamica e si sono pertanto indotti ad intervenire solo quando sono stati mossi da un interesse prevalentemente storico, mentre gli storici e i filosofi si sono trovati generalmente, per mancanza di un orientamento specifico, nell'impossibilità di veder ben chiaro in ciò che è elemento di importanza essenziale per ogni tentativo di risoluzione e anche di netta definizione della controversia. La critica che così è nata risente pertanto ancora fortemente l'influsso dei gravi malintesi sui quali è sorta, ciò che non poteva, naturalmente, che determinare confusione e incomprensione di ancora maggiore gravità presso il vasto pubblico degli studiosi non specializzati a cui gli autori si rivolgevano. Ma più ancora è da deplorarsi che gli storici e i commentatori, nella loro quasi totalità, dopo di

(*) Presentata nella seduta del 9 dicembre 1950.

aver attribuito a Galileo alcune illusioni geometriche e fisiche che egli non ebbe o che in breve abbandonò mentre mai le abbandonarono i suoi esegeti, gli abbiano fatto colpa di non aver difeso ad oltranza le illusioni stesse che essi scambiavano con la realtà assoluta e abbiano spiegato questa « colpa » e quindi la finale rinunzia a sostenere la tesi copernicana con considerazioni e ipotesi con le quali si esce dal campo dei fatti scientifici e si è portati a prospettare in modo sfavorevole quanto falso la figura di Galileo come uomo.

La situazione così accennata mostra la necessità di una chiarificazione completa della materia controversa. E tanto più appare improrogabile l'adempimento di tale compito che s'impone alla scienza dei nostri tempi in quanto che i predetti infondati giudizi, ripetuti ininterrottamente per tre secoli senza che abbiano dato luogo ad esplicite rettifiche nè a dubbj o riserve, hanno finito col determinare, anche negli studiosi della nostra epoca meglio qualificati per un esame *ex-novo* delle tesi contrapposte, uno stato d'animo poco propizio per una revisione rigorosamente obbiettiva. Sotto l'influsso del preconetto che nulla di sostanziale fosse da mutare o correggere nel giudizio così a lungo elaborato dai predecessori su quel complesso di idee e problemi e che solo si trattasse di convalidare le concezioni copernicane con nuove *prove di fatto*, questi autori hanno talvolta tentato la ricerca di tali prove fondando le loro speranze sul contributo di dati e scoperte astronomiche posteriori all'epoca di Galileo. È questo un atteggiamento più recente della critica, ma occorre chiarire — ed è questa una delle avvertenze più essenziali ai fini di una esatta valutazione critico-storica — che col perseguire quelle speranze e, più in generale, coll'intraprendere un qualsiasi tentativo per ottenere *dalle osservazioni* una diretta e immediata testimonianza a favore di un copernicanismo integrale (ossia di quello che raffigura nell'assetto copernicano e in quello tolemaico rispettivamente *la verità e l'errore*) non si può pervenire che a conclusioni del tutto illusorie, in quanto che le osservazioni su posizioni e movimenti dei corpi celesti, *quali che questi siano*, non valgono che a constatare moti relativi, mentre per una soluzione vera e propria dei problemi galileiani occorre un passo decisivo verso l'assoluto.

Una netta formulazione di tale concetto, mai esplicitamente fatta in passato, porta a stabilire la completa vacuità di ogni discussione comparativa fra i due sistemi nella quale o si parli di *moto* e di *quiete* dei corpi considerati senza una preliminare e precisa definizione del riferimento che deve intervenire per dare un senso a quegli attributi (ed è appena necessario far parola di questo che è il caso più grave di disorientamento), oppure si assuma bensì un riferimento ma si ometta di indagare se questo presenti quei caratteri speciali che deve avere perchè la nozione di immobilità non si riduca ad una pura *convenzione*.

Avvertenze e precisazioni di tal natura, mentre valgono ad assicurare una enunciazione dei grandi problemi in questione che basti ad escludere ogni equivoco su ciò che debba intendersi per *soluzione* di essi, danno adito anche a rilievi altamente interessanti, pei loro riflessi storici, su quello che dovette essere l'intimo pensiero di Galileo, in quanto portano a riconoscere come le dichiarazioni da lui fatte ripetutamente nei « Dialoghi » sull'essenza del problema generale colà affrontato e sulle difficoltà che egli vi scorgeva siano da ritenersi più rispondenti alla

realtà, più meditate e soprattutto più *sincere* di quanto gli storici del memorabile periodo si mostrino disposti ad ammettere. Apparirà ben chiaro, dopo quanto sarà qui appresso rilevato, che gli ostacoli i quali impedirono a Galileo di proclamare, come egli avrebbe desiderato, il trionfo della tesi copernicana avevano una ben reale consistenza; essi erano di tale entità, come vedremo, da fare a buon diritto dubitare della possibilità non solo di *risolvere* coi mezzi dell'epoca i problemi proposti ma anche di concludere se, posti in quei termini, abbiano un senso. Galileo non poteva porli in termini diversi perchè le concezioni nuove necessarie per trasformarli e quindi risolverli nascono in seguito ad un processo di grandioso sviluppo delle scienze sussidiarie e del pensiero speculativo compiutosi durante un periodo che è tutto posteriore all'epoca in questione. Ma l'essersi egli accontentato di trattarli coi limitati mezzi a sua disposizione *non deve far pensare che tali mezzi egli li credesse sufficienti*, e che le reali difficoltà esistenti siano state da lui ignorate o credute superabili con argomenti forniti dai soli fatti osservati, perchè, come si è innanzi notato ed è impossibile che la mente di Galileo non lo abbia avvertito, non esistono contrassegni caratteristici pei quali un riferimento definito *fisso* possa rivelarsi tale alla osservazione diretta.

Emerge dunque la necessità di ben precisare quali siano gli errati o mal definiti concetti iniziali che hanno impresso alla critica galileiana dei tempi trascorsi quei caratteri di confusionismo e di superficialità che dobbiamo lamentare e che hanno condotto non pochi autori a deduzioni scientificamente e storicamente inammissibili. Su tale revisione sarà da me riferito in una pubblicazione prossima che avrà l'ampiezza che si conviene pel più vasto pubblico cui è destinata: intanto desidero anticipare in forma concisa e in termini appropriati alla natura del periodico la notizia di alcune conclusioni le quali possono presentare per alcuni studiosi un immediato interesse.

2. I problemi dibattuti nei « Dialoghi sui massimi sistemi » sono sostanzialmente due e questi, in una enunciazione che presupponga dati di osservazione effettivamente conseguibili all'epoca della disputa e che indichi quelli che erano i reali obbiettivi delle due parti antagoniste, possono precisarsi come segue:

I) Un osservatore terrestre è in grado di eseguire determinazioni complete⁽¹⁾ delle coordinate dei varî pianeti e del Sole in un riferimento rispetto al quale si intendono invariabili le direzioni stellari. Riconoscere se, in base ad elementi dedotti da siffatte osservazioni, sia possibile di decidere sullo stato di *quiete* o di *moto* di un altro qualsiasi corpo del sistema (la Terra stessa, il Sole o un pianeta);

(1) In realtà con questa espressione si intende inclusa nel compito dell'osservatore anche la misura delle distanze della Terra dal Sole e dai pianeti. Sulla possibilità di valutare tali distanze, nell'epoca considerata, colla precisione che occorrerebbe di fronte a problemi come (I) è però inutile fermarsi perchè il nostro scopo è quello di analizzare gli elementi logicamente necessari per potere affrontare il problema in questione e questa analisi non interessa soltanto, come si è già notato, l'epoca galileiana. Pertanto, poichè i detti elementi, anche accresciuti con altri acquistati successivamente, risultano insufficienti, non ha importanza il fatto che si sia largheggiato nelle ipotesi fatte al riguardo.

II) Decidere se il moto relativo di rotazione fra la Terra e il sistema delle stelle (moto diurno) sia dovuto alla Terra o all'insieme degli altri corpi.

È evidente intanto che la questione contenuta nell'enunciato (I) equivale all'altra di sapere se (come suol dirsi comunemente) sia da ritenersi *vera* la rappresentazione copernicana dei movimenti ovvero quella tolemaica, perchè con la qualifica di *vero* s'intende appunto indicare un movimento rispetto ad un riferimento *fisso*. (Il punto fisso sarebbe poi ciò che, colla medesima imprecisa terminologia, si indica come « centro di moto » dei pianeti).

Ora quelle rappresentazioni sono niente altro ⁽²⁾ che descrizioni dei movimenti *relativi* dei corpi del sistema planetario rispetto a due triedri \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 aventi rispettivamente le origini nel centro del Sole e in quello della Terra e orientati in modo invariabile rispetto alle direzioni stellari; pertanto non si può opinare a favore di una *realtà* copernicana o tolemaica senza affermare con ciò la immobilità, in senso *assoluto*, del Sole o della Terra, oppure, rispettivamente, lo stato di moto — anche assoluto — della Terra o del Sole.

Ma giudizi di tal natura non sono ammissibili senza una chiara indicazione preliminare del riferimento in base al quale sono formulati e tale definizione *non deve ridursi ad una convenzione*. Se la definizione manca la questione (I) *cessa di esistere*; se poi lo stato di *moto* che si tratta di riconoscere per uno dei due corpi (poniamo che sia la Terra) si intende che sia da desumersi da un confronto *effettivo* con un ben determinato riferimento, un tal moto assumerà *ipso facto* un significato *relativo*, qualunque sia il riferimento, in quanto che, come si è innanzi avvertito, altro carattere non può avere ogni movimento o stato di quiete che sia rivelato da *osservazioni*. Ad ogni dichiarazione di immobilità o di moto che si voglia giustificare con risultati di misure e porre a sostegno di una delle due tesi corrisponde dunque inevitabilmente una argomentazione opposta che è impossibile confutare e che rimane in accordo con l'altra tesi.

Queste ovvie considerazioni dominano di necessità la materia in esame e portano, riguardo al problema (I), ad una necessaria distinzione. Quel problema assume due aspetti diversi secondo che si supponga ottenuta oppur no dalle osservazioni la conferma degli effetti parallattici a periodo annuo preconizzati da Galileo e questi aspetti corrispondono ai due differenti *gradi di insufficienza* nella determinazione dei riferimenti che si riscontrano tanto nella trattazione dell'argomento da parte dei protagonisti della famosa disputa quanto nelle considerazioni illustrative fatte da critici e commentatori nelle epoche posteriori.

Nella prima maniera di formulare il predetto problema (quella che più esattamente corrisponde alla forma qui tenuta nell'enunciarlo) gli effetti parallattici si ritengono nulli, ciò che equivale, agli effetti geometrici, a considerare le stelle come punti all'infinito. Nessuno spostamento dell'osservatore è pertanto deducibile dagli aspetti stellari e neppure *definibile*; i due triedri \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 precedentemente introdotti hanno un movimento relativo di pura traslazione che è perfettamente

(2) Naturalmente si prescinde qui dal meccanismo delle « sfere » tolemaiche, che è del tutto inessenziale nella questione.

noto ma rappresenta l'unica realtà conoscibile. Ogni tentativo di conoscere movimenti assoluti è vano e la questione, a quest'ultima strettamente connessa, di decidere se debba considerarsi vero l'assetto copernicano nei confronti dell'altro che sarebbe falso o viceversa è, in questo caso—limite, priva di senso e riterremo quindi chiusa su questo punto ogni discussione. La scelta fra i due sistemi è, in tal caso, del tutto indifferente e rimane solo subordinata a considerazioni di *convenienza pratica*, le quali portano bensì a riconoscere i vantaggi di un riferimento eliocentrico, date le particolari caratteristiche del sistema solare, ma tale conclusione non è da considerarsi come risposta al quesito (I) perchè una risposta, nelle predette condizioni, non può esistere.

La questione muta, come si è detto, di aspetto quando si suppongano riconoscibili effetti parallattici a periodo annuo; le distanze stellari debbono considerarsi allora *finite* e fra loro diverse e viene in luce un movimento della Terra rispetto all'insieme delle stelle come causa degli apparenti spostamenti relativi fra queste. Ma tale movimento Terra-stelle (nel quale la cosmologia copernicana vede la prova che è la Terra a «muoversi» e che pertanto il moto orbitale Sole-Terra è dovuto a questa ultima mentre il Sole dovrebbe considerarsi *fisso*) è esso stesso un fatto essenzialmente *relativo* e basta a stabilirlo, in conformità di quanto si è innanzi avvertito, il semplice fatto che è *rivelato dalla osservazione diretta*. È sicuro allora, per la stessa ragione, che deve esistere una spiegazione anti-copernicana degli effetti parallattici che faccia risultare tali effetti da un moto rigido dell'insieme delle stelle (comprendente il Sole) rispetto alla Terra considerata come *fissa*. Gli aristotelici, i quali ammettevano già senza difficoltà movimenti del genere (per esempio quello diurno e quello precessionale) avrebbero subito provveduto alle nuove necessità coll'idearne un altro puramente traslatorio in cui tutte le stelle descrivessero intorno alla Terra, fissa per definizione, traiettorie identiche a quella del Sole e collocate in piani paralleli.

Si vede immediatamente che tali movimenti delle stelle, supposti così *reali* e determinati dal predetto meccanismo, non potrebbero dar luogo ad apparenze diverse da quelle che la cosmologia copernicana fa dipendere da un moto orbitale della Terra intorno al Sole, *perchè il moto relativo fra la Terra e le stelle, da cui gli effetti parallattici unicamente dipendono, è lo stesso nei due casi*. (Così anche il cammino annuo del Sole sulla sfera celeste, segnato dall'eclittica, può farsi rientrare in ogni caso fra gli «effetti parallattici» e su questo punto copernicisti e avversari possono trovarsi d'accordo).

Viene così a perdere ogni validità l'argomento delle parallassi, addotto in appoggio alla tesi copernicana, ma è ancora più interessante vedere che anche il fenomeno della aberrazione annua trova una spiegazione anti-copernicana estremamente semplice e pertanto non avrebbe potuto in alcun modo portar luce ai fini di una risoluzione della questione dibattuta, anche se si volesse immaginare noto ai contendenti.

Per una chiara e rapida verifica di tale situazione, ricorderò che in una mia Nota del 1923⁽³⁾ ebbi a mostrare come la correzione per l'aberrazione che io

(3) «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. XXXI, fasc. 12 e vol. XXXII, fasc. 1.

chiamavo colà *bradleyana* per distinguerla da altro effetto geometricamente analogo, potesse vantaggiosamente esprimersi con la formoletta

$$(1) \quad V \delta \sigma = (\mathbf{v}_0 \wedge \sigma) \wedge \sigma$$

dove σ rappresenta il versore della direzione *osservata* della stella, $\delta \sigma$ il vettore da sommare a σ per avere quello s relativo alla direzione *reale* (esente da aberrazione), \mathbf{v}_0 il vettore della velocità dell'osservatore e V la velocità (scalare) della luce. (Queste velocità si intendono relative ad uno spazio nel quale la propagazione della luce possa ritenersi rettilinea). La formola (1) mostra che col cambiare del verso di \mathbf{v}_0 s'inverte quello del vettore correttivo $\delta \sigma$ e quindi l'effetto, a periodo annuo, si rende chiaramente percettibile all'osservatore. La medesima (1) racchiude tutta la teoria dell'aberrazione *bradleyana*.

Per un astronomo aristotelico è $\mathbf{v}_0 = 0$; egli rigetterà pertanto la concezione *bradleyana*, per quanto si riferisce all'origine del fenomeno. Ma non potendo negare il fenomeno stesso (spostamento annuo delle stelle sulle *ellissi di aberrazione*) nè potendo confonderlo con effetti parallattici, egli si porrà alla ricerca di *altra* spiegazione e questa è ben facile trovarla. L'aristotelico, che si suppone abbia già spiegato, nel modo detto innanzi, gli effetti parallattici in accordo con la propria tesi, e che ha già introdotto a tal fine un nuovo movimento traslatorio intorno alla Terra, comune a tutte le stelle, penserà subito di attribuire l'effetto *bradleyano* ad una deviazione angolare del raggio luminoso che abbia luogo non *all'arrivo* della luce all'osservatore (come nella teoria da lui respinta per la quale l'angolo di deviazione è quello fra le direzioni delle velocità della luce assoluta e relativa all'osservatore), ma *alla partenza*, per effetto della composizione della velocità della luce con quella della sorgente (stella). Ora è facile vedere ⁽⁴⁾ che

(4) Se ha luogo la supposta composizione, giunge al tempo t all'osservatore il raggio luminoso a cui corrisponde la velocità della luce di vettore $\mathbf{V} + \mathbf{v}$. L'osservatore vedrà allora la stella nella direzione e verso del versore $\sigma = -(\mathbf{V} + \mathbf{v}) / \text{mod}(\mathbf{V} + \mathbf{v})$, mentre vedrebbe la medesima stella, se la predetta composizione non si verificasse, nella direzione e verso del versore $s = -\mathbf{V} / V$ che si deduce dal primo col porre $\mathbf{v} = 0$. La correzione $\delta \sigma = s - \sigma$ da applicare a σ si può calcolare facilmente quando si supponga di poter trascurare il quadrato del rapporto v/V fra la velocità (scalare) della sorgente e quella analoga della luce. Si ha, in tale intesa, con approssimazione sufficiente

$$(\mathbf{V} + \mathbf{v})^2 = V^2 \left(1 + 2 \frac{\mathbf{V}}{V} \times \frac{\mathbf{v}}{V} \right) \quad , \quad \text{mod}(\mathbf{V} + \mathbf{v}) = V \left(1 + \frac{\mathbf{V}}{V} \times \frac{\mathbf{v}}{V} \right)$$

donde, date le nostre definizioni di σ e di s ,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} + \mathbf{v} &= -V \left(1 + \frac{\mathbf{V}}{V} \times \frac{\mathbf{v}}{V} \right) \sigma \\ \mathbf{V} &= -Vs \end{aligned}$$

e quindi

$$(a) \quad \mathbf{v} = V \delta \sigma + s \times \mathbf{v} \cdot \sigma,$$

da cui:

$$\delta \sigma = \frac{\mathbf{v}}{V} - s \times \frac{\mathbf{v}}{V} \cdot \sigma.$$

E notando che nella espressione di $\delta \sigma$ i numeri

$$s \times \frac{\mathbf{v}}{V} = (\sigma + \delta \sigma) \times \frac{\mathbf{v}}{V} \quad \text{e} \quad \sigma \times \frac{\mathbf{v}}{V}$$

accettando questa ipotesi, conservando le notazioni precedenti e introducendo di necessità il vettore \mathbf{v} della velocità della stella nel nuovo moto postulato dagli aristotelici, si è condotti ad esprimere la correzione $\delta\sigma$ dovuta al nuovo tipo di aberrazione colla formola

$$(2) \quad V\delta\sigma = (\sigma \wedge \mathbf{v}) \wedge \sigma.$$

E poichè il vettore \mathbf{v} è necessariamente differente *solo nel verso* da quello assegnato dal copernicista alla Terra nel suo moto orbitale, si vede che ponendo $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_0$ nella formola ultima si ricade sulla (1), ciò che porta *ad uno sviluppo matematico della teoria formalmente identico a quello classico della teoria bradleyana* e quindi alla deduzione di apparenze geometriche identiche pei due casi.

Una «risoluzione» del problema (I) rimane dunque, nell'epoca galileiana, in ogni modo irraggiungibile, perchè nel primo caso (cioè quando si suppongano ignorati i fenomeni parallattici) viene meno il significato stesso del problema e nel secondo *manca alla scienza pre-newtoniana ogni argomento concreto per attribuire ad un riferimento stellare per movimenti un carattere privilegiato* (assoluto) e poter così a buon diritto escludere la interpretazione anti-copernicana, altrimenti inevitabile e inconfutabile, secondo cui il movimento relativo Terra-stelle, rivelato dalle parallassi, indicherebbe un moto di tutto il sistema delle stelle intorno alla Terra «fissa». È, come innanzi si è premesso e come si rende ora pienamente manifesto, il problema della determinazione rigorosa e legittima di riferimenti privilegiati (assoluti) che bisogna necessariamente risolvere per poter rispondere alla questione (I), o, per meglio dire, a quella che alla predetta per necessità logica si sostituisce.

3. La questione (II), relativa al moto rotatorio, porta in maniera anche più diretta di fronte al problema dell'assoluto.

Il moto diurno è un fenomeno il cui carattere relativo è di evidenza immediata e non può più pensarsi in tal caso, come pel problema (I), ad un riferimento di paragone che possa servire di controllo per decidere quale delle due parti in esame «si muova» (salvo poi ad esaminare se il riferimento abbia i requisiti necessari per mettere in evidenza moti assoluti). Qui una della due parti è il sistema delle stelle, cioè quel sistema che nel problema (I) forniva il riferimento di paragone e questo viene pertanto a mancare del tutto. Bisogna dunque rinunciare all'idea di istituire una verifica materiale — la quale, del resto, per quanto si è detto, non sarebbe esauriente — e ciò implica rinuncia ad affrontare il problema con mezzi di indagine idonei e rigorosi, finchè manchi una *teoria* del moto, che risalga alle cause e introduca postulati nuovi. Solo rimane aperta la via ad ovvie e sensate congetture (sono in sostanza quelle di Galileo), ma queste non possono equivalere ad una soluzione del problema, la quale doveva necessariamente sfuggire a mezzi

differiscono per una quantità di secondo ordine, si vede che si potrà scrivere la (a), nel nostro ordine di approssimazione,

$$V\delta\sigma = \mathbf{v} - \sigma \times \mathbf{v} \cdot \sigma = (\sigma \wedge \mathbf{v}) \wedge \sigma,$$

coincidente con la (2).

di indagine teorica così rudimentali come quelli sui quali si poteva a quell'epoca fare assegnamento.

Per porre le considerazioni galileiane sotto forma chiara e concisa e poter così mettere in luce i concetti e le ipotesi che esse implicano, supporremo che esista un riferimento assoluto per le rotazioni e indicheremo: con ω il vettore della rotazione assoluta della Terra, con ω_r quello della rotazione relativa dell'insieme delle stelle rispetto alla Terra, con v_a la velocità (vettore) di una stella S rispetto al riferimento predetto, con ρ la distanza di S da un punto O dell'asse di rotazione terrestre e con s il versore di S — O. Sarà allora

$$(3) \quad v_a = \rho s \wedge (\omega + \omega_r).$$

Un aristotelico porrà in questa formola $\omega = 0$, in conformità della sua tesi, e la v_a assumerà per lui il significato di velocità di S rispetto alla Terra (fissa per definizione) e sarà determinata da $\rho s \wedge \omega_r$. Il modulo di tale vettore, potendo la distanza ρ diventare grandissima, assumerebbe valori paradossali. È questo sostanzialmente l'argomento di cui si avvale Galileo per dedurre che la Terra non può esser priva di moto rotatorio.

Colla ipotesi copernicana ω non è nulla, ma non potrà allora, per ragioni identiche a quelle indicate pel caso precedente, esser diversa da zero la somma $\omega + \omega_r$ che figura nella (3). Ciò equivale a dire che la rotazione relativa del sistema stellare rispetto alla Terra *deve interpretarsi come una apparenza dovuta ad una reale rotazione assoluta ω della Terra, eguale e opposta alla ω_r medesima*. Segue allora dalla (3) $v_a = 0$ e ciò va interpretato nel senso che risulta nulla quella parte della velocità di S che contribuisce a determinare le apparenze del moto diurno ⁽⁵⁾.

Si vede ora subito che le argomentazioni galileiane sul problema (II) si fondano sulla tacita premessa che sia possibile concepire e definire spazi (triedri) a rotazione nulla. Questo concetto è logicamente necessario pel procedimento di riduzione all'assurdo della tesi anti-copernicana che è seguito da Galileo e implica la nozione di *rotazione assoluta*, alla quale non si può legittimamente pervenire senza considerazioni di pertinenza della dinamica, ossia senza uscire dal dominio dei fatti geometrici e cinematici nel quale in quell'epoca Galileo si trovava necessariamente ristretto.

Un esame ben semplice della situazione che risulta dalle considerazioni qui espresse sarà oggetto di una successiva breve Nota.

(5) Nella espressione completa di v_a dovrebbero figurare due altri termini esclusi dalla (3) perchè corrispondenti ad effetti di parallasse e moto proprio che non entrano in considerazione nel problema qui trattato.

Geodesia. — *Sugli errori da cui sono affette le livellazioni di precisione.* Nota (*) del Socio PAOLO DORE.

La livellazione geometrica, che, nel più comune ambito tecnico, apparrebbe operazione di schema estremamente semplice e di attuazione notevolmente facile, considerata nel suo compiuto aspetto di procedimento di indagine geodetica presenta problemi complessi che, pur posti in luce al primo attuarsi delle grandi reti europee, nell'ultimo trentennio del secolo scorso, non sono ancora oggi tutti, o del tutto, chiariti.

Particolare rilievo presentano, tra tali problemi, quelli che si riferiscono alla distribuzione e alla valutazione degli errori di osservazione, i quali sono, tra l'altro, determinanti ai fini della definizione stessa di una livellazione di precisione.

L'Associazione Geodetica Internazionale, infatti, che già dal 1867, dai primissimi anni cioè dalla sua costituzione, aveva sancito alcune norme cui, in ogni caso, dovevano soddisfare le operazioni e i risultati di una livellazione perchè questa potesse dirsi di precisione, ha modificato e precisato tali norme man mano che le ricerche intorno agli errori delle livellazioni andavano evolvendosi; e questo processo di modificazione e di precisazione è tutt'ora in atto nella ricerca di un sistema di formule che permetta la miglior possibile valutazione della precisione di una livellazione.

Nell'ipotesi di una distribuzione puramente accidentale degli errori una tale valutazione dovrebbe essere fatta con i procedimenti consueti che utilizzano le discordanze tra i dislivelli di successivi caposaldi ottenuti in andata e in ritorno o, comunque, in una doppia livellazione a componenti indipendenti, ridotti all'unità di lunghezza e affetti da peso proporzionale alla distanza tra i caposaldi stessi ⁽¹⁾.

Se non che fin dalle prime elaborazioni dei risultati delle grandi reti europee apparvero nella distribuzione degli errori degli andamenti di tipo, in qualche modo, sistematico rivelati da quello che il Lallemand chiamò diagramma delle discordanze cumulate, costruito portando in ascisse le lunghezze L , progressive, delle linee livellate e in ordinata la somma algebrica delle discordanze tra i dislivelli in duplice maniera determinati fra successivi capisaldi.

Si fatti diagrammi che, nell'ipotesi di una distribuzione puramente aleatoria degli errori e quindi delle discordanze, dovrebbero dare, una spezzata irregolarmente oscillante intorno all'asse dell'ascisse, mostrano per interi tronchi di linee o per importanti porzioni di essi, di lunghezza dell'ordine di qualche decina di chilometri, un netto andamento ascendente o discendente che appare riferirsi ad una influenza sistematica per quel tronco o per quella porzione di tronco. Su di un complesso vasto di linee quale quello di una intiera rete la ripartizione dei rami ascendenti o discendenti del diagramma appare tuttavia ancora nettamente aleatoria.

(*) Presentata nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) Cfr. LALLEMAND in «C. R. de la XVII Conference Générale de L'Association Géodésique Internationale». Berlin 1914, p. 241.

G. A. RUNE, *Die definition nebst formeln der int. Erdmessungs Konferenz 1912 ecc.* «Zeitschr. für Vermessungswesen», LIX (1930) e «C. R. de la VII séance de la Comm. Géod. Baltique», Helsinki 1935; DORE, *Sulla valutazione degli errori accidentali di una livellazione di precisione.* «Rend. Acc. Sc.», Bologna 1940.

Segue che l'errore medio kilometrico accidentale calcolato con il procedimento sopra accennato assume valori diversi a seconda che le discordanze prese in considerazione si riferiscono ai dislivelli tra caposaldo e caposaldo immediatamente consecutivo, o tra estremi di lunghi tronchi o se il calcolo ne vien fatto, come è lecito nello stesso ordine di posizioni che stanno a base del precedente procedimento, in funzione degli errori di chiusura dei poligoni. L'errore medio calcolato in funzione delle discordanze dei dislivelli tra caposaldo e caposaldo consecutivo, data la piccola lunghezza dei tratti in gioco, risente in piccolissima misura delle influenze di tipo sistematico.

Il Lallemand ⁽²⁾ cui si deve fondamentalmente il merito di aver posto in chiara evidenza i dati di fatto sopra accennati, ritenne poterli interpretare ammettendo che la livellazione sia affetta da due categorie di errori tra loro indipendenti, accidentali gli uni e soddisfacenti a legge di ripartizione normale, sistematici gli altri e tali che la loro influenza, trascurabile su piccole distanze, dà luogo ad andamenti in senso positivo o negativo per tronchi di linea di qualche diecina di kilometri, pur variando tali andamenti da tronco a tronco in maniera aleatoria quando un certo limite di lunghezza delle linee sia sorpassato. Non fu tuttavia possibile al Lallemand individuare in alcun modo le cause di tali presunti errori sistematici, nè alcuna delle varie ipotesi successivamente emesse in proposito ha avuto conferma sì da consentire, in qualche modo, la costruzione di un modello della maniera di agire delle cause stesse.

La precisione di una livellazione secondo Lallemand dovrebbe pertanto essere caratterizzata da due coefficienti riferentesi l'uno, η , all'errore accidentale tal che su di una linea livellata di lunghezza L l'errore stesso abbia ad essere $\eta\sqrt{L}$, l'altro, σ , caratterizzante l'errore sistematico tale che questo sia $\sigma \cdot L$ per la stessa linea di lunghezza L . E a tale scopo il Lallemand propose nel 1895 e poi, in forma modificata, nel 1912 un sistema di formule volte a valutare, a posteriori, tali coefficienti. Egli si propose cioè di determinare un errore probabile accidentale depurato, come egli pensava, da influenze sistematiche, e, in ordine a queste ultime, un valore probabile del coefficiente σ desunto dalle differenze S tra le ordinate degli estremi di segmenti di retta media tracciate attraverso i diagrammi delle discordanze cumulate in corrispondenza di tronchi continui successivi. A tal fine egli introdusse un « error probabile sistematico » ottenuto direttamente dalla media quadratica dei rapporti S/L , o indirettamente dal confronto tra i due valori dell'error probabile accidentale dedotti l'uno dalle discordanze tra caposaldi consecutivi, l'altro dagli errori di chiusura dei poligoni. Le formule proposte dal Lallemand nel 1912 furono adottate dalla Associazione Geodetica Internazionale fino al 1936. Esse dettero tuttavia luogo a critiche e a conseguenti proposte di modifiche di G. A. Rune ⁽³⁾ e di J. Vignal ⁽⁴⁾, che non è possibile qui riportare. J. Vignal

(2) Cfr. di tale autore oltre l'opera già citata: *Sur le rôle des erreurs systématiques dans les nivellements de précision* in « C. R. A. S. », Parigi, tom. 123, 1896, p. 410 e il volume *Nivellement de haute précision* « Enciclop. des Travaux publics », 1912.

(3) Loc. cit.

(4) Si vedano di questo autore oltre che i rapporti alle conferenze generali della Associazione Geodetica Internazionale, *Caractères des erreurs affectant les nivellements* in « C. R. A. S. », Parigi, *Evaluation de la précision d'une méthode de nivellement* in « Bulletin Géodésique », n. 49, 1936.

sulla base di tali sue critiche modificò il sistema di ipotesi di Lallemand svincolandosi in qualche modo dalla sistematicità (almeno formalmente) supponendo tuttavia ancora due categorie di errori (i cui effetti si sommano con la legge pitagorica), che egli chiamò pantofani ed apofani, i primi (corrispondenti agli errori accidentali di Lallemand) dovuti a cause agenti indipendentemente su tratti successivi di livellazione, i secondi (corrispondenti agli errori sistematici) dovuti a cause agenti in maniera analoga su tratti successivi o vicini di livellazione. Con un procedimento che qui non si analizza si ritenne dimostrare che, il quadrato σ^2 del coefficiente d'error kilometrico — detto dal Lallemand sistematico — varia in maniera inversamente proporzionale alla lunghezza media L_m dei tronchi cui si riferisce, mentre se L_m supera un certo valore limite Z , che sarebbe di alcune decine di kilometri, la distribuzione degli errori apofani diviene aleatoria e la si considera addirittura come normale. Sulla base dei punti di vista di Vignal l'Associazione Geodetica Internazionale ha modificati i criterii di valutazione della precisione di una livellazione, conservando tuttavia la distinzione tra errori accidentali ed errori sistematici, caratterizzando ancora i primi con un coefficiente η , error probabile accidentale per kilometro, ed i secondi con un coefficiente ξ , detto « valore probabile accidentale limite per Km. dell'error sistematico » tale che « l'error probabile sistematico » su una linea livellata di lunghezza L valga $\xi \cdot \sqrt{L}$ se $L \geq Z$ o $\xi_L \sqrt{L}$ con $0 < \xi_L < \xi$ se $L < Z$, essendo Z il sopra accennato valore limite che dovrebbe essere empiricamente determinato.

« L'error probabile totale limite » ottenuto combinando con legge pitagorica gli errori η e ξ se $L \geq Z$, dovrebbe essere nel caso di $L < Z$ un valore τ_L crescente da η a τ — tale che l'errore probabile totale sulla linea di lunghezza L valga $\tau_L \cdot \sqrt{L}$.

I coefficienti sopra definiti sono da calcolarsi a posteriori in funzione dei dati di rilievo (discordanze) con un sistema di formule che ripetono in parte la loro origine da quelle di Lallemand: la questione della giustificazione di tali formule è ancora aperta. Se non che preliminarmente ad ogni esame della struttura di tali formule specifiche e della loro legittimità sembra opportuno e conveniente un ulteriore esame critico delle ipotesi e delle posizioni su cui esse sono basate e dei criterii, in qualche misura empirici, con cui esse sono state dedotte cercando di indagare alla luce di una interpretazione il più possibile ortodossa dal punto di vista probabilistico i dati di fatto che di quelle ipotesi e di quelle posizioni stanno a base. Tutti i procedimenti volti alla valutazione della precisione di una livellazione sono dominati — continuamente — da una sorte di « contaminatio » tra errori accidentali ed errori sistematici che rischia di ingenerare dubbi o malintesi sul significato preciso delle grandezze utilizzate. Ciò anche a prescindere da formali contraddizioni in termini come quella della locuzione « error probabile sistematico » (non si può invero parlare di probabilità se non in presenza di fatti in qualche misura aleatorii) locuzione che, in se, potrebbe essere sostituita con quella di valor probabile del coefficiente di error sistematico.

Dal punto di vista della teoria degli errori l'elaborazione di materiale di osservazione ai fini di determinare valori più plausibili ed errori medii o probabili viene sempre effettuata nell'ipotesi che il materiale stesso sia spoglio di errori di

natura sistematica e che gli errori con cui si ha a che fare costituiscano un insieme di determinazioni di una variabile aleatoria soddisfacente alla legge di distribuzione di Gauss: il che si ottiene, in genere, con un accurato esame delle possibili cause di error sistematico e conseguente adozione di procedimenti di osservazione che eliminino tali cause e la loro influenza.

Nel caso delle livellazioni per ridursi a queste condizioni, pur non conoscendosi le cause di ipotetici errori sistematici e, tanto meno, la legge con cui esse agiscono, si è postulata l'esistenza di due categorie di errori, di cui gli uni puramente accidentali e gli altri sistematici o apofani, e la loro indipendenza.

Può nascere un primo dubbio sulla legittimità, o quanto meno sulla necessità di una tale posizione: l'unico dato di fatto da cui si induce l'esistenza di due categorie di errori tra loro indipendenti sono i diagrammi delle discordanze cumulate e questi non sembra portino - per lo meno in maniera necessaria - a tale asserzione. Da essi sembra si possa dedurre soltanto il fatto che la variabile errore non è una variabile normale (al senso dello schema bernoulliano delle prove ripetute) senza dar ragione del tipo di influenza che modifica la pura aleatorietà dei fenomeni: ulteriori precisazioni, tuttavia che si possano fare sul comportamento degli errori, fuori da ogni ipotetica sovrastruttura e prima di ogni ipotesi di lavoro, non possono dedursi che dalla analisi dei dati stessi di osservazione e tra l'altro quindi, del diagramma delle discordanze cumulate.

Sembra utile intanto iniziare tale analisi dal punto vista ⁽⁵⁾ delle proprietà di ordine della successione delle discordanze. Per rendersi conto nella maniera più schematica di ciò che in ordine a tali proprietà può essere dedotto, si pensi di ridurre la successione delle discordanze (che valgono la differenza tra gli errori veri dei dislivelli componenti) ad una successione alternante mediante una sorte di contrazione di indici: si distinguano cioè le discordanze con due diversi contrasegni, ad esempio A e \bar{A} a seconda del segno positivo o negativo da cui sono affette qualunque sia il loro valore assoluto.

L'ordine in cui si susseguono gli elementi A e \bar{A} in una successione alternante è carattere essenziale inerente alla variabile aleatoria a tale successione legata (nel nostro caso il segno della discordanza), e il tipo di ordine è determinato dalla struttura del campo delle possibili scelte di successioni parziali che lasciano invariato il limite della frequenza di A , praticamente, cioè, il valore centrale intorno a cui, nella successione completa, oscillano le frequenze. La caratterizzazione sotto questo aspetto di una variabile aleatoria e quindi del tipo d'ordine di una successione aleatoria estensionalmente assegnata non può essere fatta che in via empirica e deve in genere limitarsi a stabilire un minimo di condizioni per il dominio di invarianza. La stessa determinazione di una variabile normale - che dovrebbe rispondere alla pura aleatorietà dello schema bernoulliano delle prove ripetute - non può farsi, sotto questo punto di vista, che convenzionalmente: essa importa - oltre che l'assenza di azione residua di un termine sui successivi - l'apparte-

(5) Mi riferisco qui alla teoria dell'ordine delle successioni aleatorie svolta da REICHEMBACH. Cfr. *Wahrscheinlichkeitslehre*, Leiden 1935 o l'edizione inglese *The Theory of Probability*, Univ. of California Press, 1949.

nenza al suo dominio di invarianza di tutte le successioni parziali ottenute per divisioni regolari. Se la discordanza tra i dislivelli – e quindi l'errore da cui proviene – fosse una variabile normale la successione sopra costruita dovrebbe rispondere a tali condizioni. Gli andamenti dei diagrammi delle discordanze cumulate mostrano che di fatto la successione completa se pur nell'insieme di una rete sufficientemente vasta dà per le A e le \bar{A} gli stessi valori centrali per le frequenze che darebbe una successione normale, presenta tuttavia delle sequenze di valori positivi o negativi evidentemente anormali: il campo di scelte di successioni parziali invariante apparrebbe genericamente diverso da quello di una successione normale. La ricerca della determinazione delle fondamentali condizioni cui esso soddisfa, nei limiti in cui possa esser fatto, dovrebbe portare a qualche interessante conclusione sulla struttura dell'errore.

La presenza di sequenze anormali di termini positivi o negativi può mettere in più semplice maniera in evidenza l'anormalità della successione presa in esame se accanto ad essa si consideri la successione delle frequenze ai suoi elementi (A o \bar{A}) coordinate.

La dispersione della successione delle frequenze – legata al grado di convergenza di questa e perciò al tipo d'ordine – dà ancora un criterio di normalità più semplice seppure men dettagliato e preciso del precedente; la presenza di lunghe sequenze di termini dello stesso segno dovrebbe dar luogo a valori maggiori del normale della dispersione e quindi a una successione sopra-normale.

Ben più complesse, evidentemente, le questioni inerenti alla caratterizzazione della variabile aleatoria se dalla successione alternante cui ci eravamo ridotti si passa ad esaminare l'insieme completo delle discordanze: nè io voglio qui occuparmene. Quanto si è osservato in base alla successione alternante illustra già sufficientemente alcune conclusioni che possono trarsi dall'esame dei diagrammi delle discordanze cumulate, interpretati indipendentemente da qualsiasi ipotesi posta a priori. Sembra infatti che da essi si possa dedurre soltanto che l'errore caratterizzante il grado di fiducia da attribuirsi alla classe di grandezze « dislivelli tra caposaldo e caposaldo » si comporta come una variabile aleatoria non normale: occorrerebbe determinarne la distribuzione per potere stabilire il preciso significato che in ordine ad esso assume la dispersione media quadratica, comunemente usata a designare il grado di fiducia da attribuirsi ad una classe di misure i cui errori siano da considerarsi come variabili aleatorie normali.

La distinzione tra errori puramente accidentali ed errori sistematici, comunemente fatta, o tra errori pantofani e apofani – nell'impossibilità in cui si è di assegnarle una determinata ragione d'essere nei procedimenti di misura o nelle circostanze ambientali – risponde ad una ipotesi, che potremmo dire di lavoro, volta a dare in qualche modo conto del comportamento anomalo degli errori della livellazione nei confronti di quelli che formano oggetto della teoria degli errori: non è possibile tuttavia utilizzare tale teoria per una rigorosa giustificazione di procedimenti e formule cui tale distinzione conduce e cui non può non essere riconosciuto un certo grado di arbitrarietà.

Geologia. — *Il problema stratigrafico del Cambrico Sardo.*
Nota (*) del Corrisp. SILVIO VARDABASSO.

La formazione cambrica della Sardegna, unica in Italia, ha talune caratteristiche particolari, che la differenziano alquanto dalle formazioni coeve delle regioni europee ed africane circummediterranee. Anche per ciò l'Iglesiente, dove notoriamente affiora il Cambrico, sta attraendo da molti decenni l'attenzione oltre che di nostri geologi e minerari pure quella di parecchi stranieri, specialmente stratigrafi e paleontologi. Tuttora però dalla ricca letteratura sull'argomento risulta una profonda disparità di vedute.

D'altra parte l'interesse scientifico alla risoluzione di questo annoso problema stratigrafico non può andare, a mio giudizio, disgiunto da quello economico. Si tratta infatti di una formazione geologica, nella quale sono inclusi — come tutti sanno — alcuni fra i più importanti giacimenti metalliferi d'Italia, coltivati da tempi remoti ed ora, a quanto pare, in via di esaurimento, per lo meno limitatamente ai minerali finora estratti.

Ritengo pertanto utile con questa Nota fare il punto della situazione; mentre in altre successive mi propongo di illustrare singoli profili a contributo della tettonica regionale.

Nel Cambrico Sardo vengono distinti generalmente tre complessi litologici: uno calcareo-dolomitico (circa 500 m. di spessore), che di regola ha maggiore risalto sul terreno e forma aspre montagne carsiche, per quanto inferiori ai mille metri, nelle quali si trovano appunto i giacimenti PbZn. Queste masse calcareo-dolomitiche sono comprese fra due altri complessi, uno schistoso, relativamente monotono, l'altro a composizione più varia, in prevalenza arenaceo con alternanze di schisti ed intercalazioni subordinate di banchi calcarei. Una valutazione esatta delle potenze è resa difficile dalle complicazioni tettoniche, di cui si dirà poi; ma tanto per le arenarie che per gli schisti pare sia superiore ai 500 metri. Al Cambrico Sardo si può quindi attribuire uno spessore medio di circa 1500 metri, per quanto si possa avere l'impressione che localmente sia anche inferiore a tale cifra.

Per comodità del lettore riporto uno schizzo geologico [13], sul quale figurano gli affioramenti cambrici dell'Iglesiente e del Sulcis (poco meno di 750 Kmq.) nonchè i contatti con le altre formazioni paleozoiche, in primo luogo col Silurico, che circonda ed in parte copre in discordanza il Cambrico, e col granito ercinico che ha iniettato, metamorfosato e mineralizzato l'uno e l'altro, in parte sostituendosi agli stessi, in parte saldandoli assieme.

Per rendere più chiara la rappresentazione di tali rapporti, essendo il disegno già abbastanza complicato, le coperture mesozoica, terziaria e quaternaria sono state lasciate in bianco.

(*) Presentata nella seduta dell'11 novembre 1950.

Per un oggettivo apprezzamento poi delle difficoltà incontrate da tanti valenti ricercatori, che si sono occupati della questione, sarà bene ricordare che questo appartato settore della Sardegna è stato coinvolto in tre cicli orogenetici (caledonico, ercinico, alpino); i primi due a carattere plicativo, il terzo disgiuntivo con relativi cicli magmatici, intervallati da discordanze e lacune, ricorrenti pressochè in ogni periodo geologico. Davvero un primato di complicazioni.

Quando si è trattato di pubblicare la Carta Geologico-Mineraria dell'Iglesiente, rilevata sotto la direzione del compianto ing. V. Novarese, autorevole socio della nostra Accademia, è stato necessario affrontare il difficile problema stratigrafico del profilo normale del Cambrico in presenza di una serie intensamente dislocata, il basamento prepaleozoico della quale – a differenza del Cambrico di altri paesi mediterranei – non affiora in Sardegna.

Fortunatamente alla scoperta delle faune a trilobiti (*Olenopsis*, ecc.) nelle arenarie se ne aggiunse una anche negli schisti (*Paradoxides*, ecc.). Ora specialmente in base alle conclusioni paleontologiche di J. F. Pompecky (1901), uno specialista in materia, sulla Carta dell'Iglesiente il Cambrico venne attribuito tutto al piano medio (Acadiano) con gli schisti in basso, le masse calcareo-dolomitiche nel mezzo ed il complesso arenaceo in alto.

Senonchè la fauna ad *Archaeocyathidae*, conosciuta da molto tempo nei banchi calcarei intercalati entro le arenarie, rappresenta un orizzonte caratteristico del Cambrico inferiore (Georgiano), come pare definitivamente accertato in molte regioni della terra ed è attualmente accolto dai trattatisti. Dovrebbe farvi un'eccezione la Sardegna?

D'altra parte l'attribuzione di forme trovate in altre regioni al genere *Olenopsis*, istituito sopra fossili sardi non sempre bene conservati, non è ritenuta valida da qualcuno. Per i particolari in proposito rimando a V. Novarese [7]; ultimamente la questione paleontologica è stata riassunta anche dal mio aiuto I. Caria Comaschi [1].

Stando così le cose, visto che le ricerche paleontologiche potevano lasciare nell'incertezza, era da attendersi che qualcuno tentasse di risolvere il problema dell'età relativa per vie meno battute di quella tradizionale.

È noto che negli ultimi anni, specialmente in America, sono stati raccolti elementi ed elaborati metodi per stabilire il verso della stratificazione. Distinguendo così la parte inferiore da quella superiore di un sedimento, è possibile costruire buoni profili anche per settori tettonicamente molto disturbati. Da noi il metodo lo si sta attualmente applicando nello studio tettonico dell'Appennino Settentrionale, e di ciò abbiamo avuto una istruttiva illustrazione al Congresso Geologico di Firenze (1949) soprattutto per merito dei colleghi Merla e Migliorini.

Tornando alla Sardegna, ai vecchi autori non era sfuggito che, localmente, le arenarie dell'Iglesiente hanno una stratificazione incrociata, indizio di terra emersa poco lontana. Da osservazioni fatte ultimamente da altri [8] e che io ho controllato ed anche fatto rilevare da poco in una escursione dell'Associazione Mineraria Sarda [15], risulta che il verso della stratificazione nelle arenarie sta

ad indicare che il complesso calcareo-dolomitico si è depositato sopra e quindi dopo delle stesse.

Notoriamente in questo complesso incontriamo due specie di dolomia: quella primaria, cioè di diagenesi originaria per lo più uniformemente cristallina, grigio perla od anche più scura, formatasi in un ambiente poco profondo in prossimità delle arenarie, ed una dolomia secondaria, concrezionata, per lo più gialla, sviluppata molto dopo per metasomatismo soprattutto al posto del calcare ceroide in prossimità degli schisti impermeabili ed in relazione con l'arresto della circolazione delle soluzioni metallifere del ciclo magmatico ercinico.

Purtroppo nella Carta Geologico-Mineraria le due dolomie non sono tenute distinte l'una dall'altra. Data la loro profonda diversità genetica, ci auguriamo che in una auspicata futura edizione della Carta si provveda a farlo. La distinzione richiederà indubbiamente molto tempo.

Ora, nei banchi della dolomia primaria, più vicini alle arenarie, si osserva spesso una minutissima stratificazione. Questa risalta molto per il contrasto fra tenui letti a cristallini più scuri con altri più chiari. Una tale facies, veramente caratteristica, è conosciuta nell'ambiente minerario col nome di «dolomia rigata».

In singoli straterelli di questa dolomia non è infrequente una ondulazione, la quale non può essere attribuita a deformazioni tettoniche, ma ad un assestamento originario, di poco susseguente alla loro sedimentazione; tanto è vero che questi straterelli si alternano con altri perfettamente orizzontali. In qualche caso si notano anche saccature più pronunciate, cioè dell'ordine di grandezza di dieci millimetri o poco più, riempite dal deposito che ha formato lo straterello successivo, per cui si può parlare di microdiscordanze stratigrafiche entro una serie concordante nell'insieme.

Anche questo particolare, scartati i casi dubbi che si presterebbero all'una o all'altra interpretazione, permette di stabilire il verso della stratificazione. Ora, in concreto, si constata che la superficie superiore di questi straterelli discordanti è dalla parte della massa calcareo-dolomitica e non da quella del complesso arenaceo.

L'esame strutturale dei sedimenti dimostra quindi che in realtà il deposito delle arenarie ha preceduto quello delle dolomie.

A proposito poi delle intercalazioni calcaree nelle arenarie con la fauna ad archeociatine, importante per il valore cronologico attribuito a questi fossili, bisogna aggiungere che anche il loro modo di presentarsi può essere un indizio utilizzabile - sia pure con le dovute cautele - per la soluzione del problema della giacitura e dell'età relativa.

Queste forme primitive, ben presto estinte, tanto discusse dal punto di vista sistematico, sappiamo che appartenevano ad organismi sessili. I loro calici cioè stavano piantati sul fondo marino, posizione però non sempre conservata *post mortem*. Tuttavia accanto a singoli calici coricati o disposti alla rinfusa molti altri sono tuttora perpendicolari al piano di stratificazione. Evidentemente in questo caso la punta dei calici sta ad indicare la faccia superiore dello strato, nel quale erano conficcati, e così si può riconoscere se il complesso arenaceo, che include queste intercalazioni calcaree fossilifere, è in giacitura normale o capovolto.

Per quanto le ricerche in tal senso siano limitate finora solo a qualche profilo [8], la posizione originaria delle archeociatine, così interpretata, indica una successione della serie, che conferma quella dedotta dalla stratificazione incrociata e dalle microdiscordanze, di cui si è detto.

Ma un controllo dell'ordine di sedimentazione della serie cambrica, oltre che con l'esame strutturale di singoli termini della stessa, particolarmente adatti per questo genere di ricerche, può esser fatto attraverso i rapporti fra il Cambrico e la successiva formazione silurica discordante. Questa discordanza è un dato molto importante, definitivamente acquisito per merito di V. Novarese ⁽¹⁾.

L'emersione che l'ha preceduta durante il Cambrico superiore (Potsdamiano), piano assente in Sardegna (lacuna stratigrafica) a differenza degli altri paesi circummediterranei, a sua volta è stata determinata da un piegamento.

H. Stille in uno studio analitico fondamentale sui cicli orogenetici di tutti i continenti ha distinto il corrugamento del nostro Cambrico come « fase sarda » iniziale del ciclo caledonico in senso lato, svoltosi notoriamente molto più tardi altrove.

Ora, pare ovvio ammettere una concordanza tra rilievo e struttura in un settore a pieghe recenti, come doveva essere allora la primordiale terra sarda. Con altre parole, il detrito costituente la puddinga o conglomerato basale del Silurico inferiore (impropriamente « anagenite » nella vecchia letteratura) doveva provenire dalla degradazione e progressiva demolizione di quelle montagne, coincidenti con le anticlinali; dalle quali saranno stati erosi ed asportati innanzi tutto gli strati superiori, più recenti.

Nelle depressioni vallive, specialmente in quelle marginali, corrispondenti alle sinclinali, invece anche gli strati più recenti saranno stati allora, almeno in parte, risparmiati dall'erosione ed eventualmente anche protetti e coperti dal detrito accumulatosi e proveniente dalle anticlinali.

Consideriamo con questo criterio morfotettonico-paleogeografico la Cartina allegata.

A Sud di Fluminimaggiore la puddinga ordoviciana (punteggiato) copre di regola per vasta estensione gli schisti cambrici, fasciando le masse calcareo-dolomitiche e talvolta spingendosi anche a ricoprirle per brevi tratti. Altrettanto si constata a nord di Domusnovas, ad est di Nebida, a sud-est di Villamassargia. È un fatto comune a tutta la zona marginale degli affioramenti cambrici. A nord-est di Narcao, poi, una stretta lingua di puddinghe si insinua sopra gli schisti cambrici, ora molto tormentati per il successivo corrugamento ercinico ma allora formanti – a mio avviso – una valle in sinclinale invasa dal mare silurico: una specie di rias fossile o meglio ancora un canale di tipo dalmato. Le eccezioni alla regola sono ben poche; la più chiara è quella presso Gonnese, dove per brevissimo tratto le puddinghe basali del Silurico sono discordanti non solo

(1) Come ho già da tempo rilevato [11], anche per non aver – fra l'altro – tenuto conto di questo caposaldo della stratigrafia sarda, la costruzione tettonica di A. Zabelli [16] non può reggersi.

sugli schisti e sui calcari (Miniera di S. Giovanni), ma anche sulle arenarie. Si può pensare che in questo punto la montagna cambrica sia stata più profondamente dislocata ed erosa fino ad essere scoperto ed intaccato il nucleo dell'anticlinale.

Per quanto riguarda la composizione petrografica delle puddinghe ordoviciane, è accertata la prevalenza del detrito di schisto, come era da attendersi solo se questa roccia rappresenta i termini più alti della serie cambrica. Il detrito arenaceo e quello calcareo-dolomitico invece sono alquanto subordinati, appunto perchè i relativi complessi sottostanti sono stati molto meno intaccati. La presenza anche di massi calcarei nella puddinga può essere spiegata con frane dai ripidi versanti battuti dal mare silurico, che penetrava nella terra cambrica. In qualche caso le zolle calcaree maggiori andrebbero interpretate come originarie scogliere, radicate, che il mare ha circondato ed infine più o meno sepolto sotto il detrito accumulato. La loro esumazione attuale ha rimesso a giorno la più antica costa fossile d'Italia. Sono dettagli paleogeografici, che mi riprometto di illustrare in altra sede.

Anche dall'esame dei rapporti fra Cambrico e Silurico pare dunque di poter dedurre che la sedimentazione del primo è incominciata con le arenarie e terminata con gli schisti; cioè il contrario di quanto indicato nella leggenda della Carta Geologico-Mineraria dell'Iglesiente.

Dallo studio del conglomerato basale del Silurico è emerso inoltre un particolare notevole, sul quale è stata richiamata l'attenzione specialmente da R. Teichmüller (1931): la presenza cioè di frammenti e ciottoli di quarzo. Per la loro grandezza, questi non possono essere considerati un residuo di rimaneggiamento di nessuno dei tre complessi litologici cambrici, originari (arenaceo, calcareo-dolomitico, schistoso), più precisamente di quello arenaceo a costituenti quarzosi molto minuti. Bisogna cercare un'altra provenienza.

Ritengo verosimile che il detrito grossolano di quarzo entro la puddinga ordoviciana derivi da filoni di quarzo magmatico iniettati nella serie cambrica durante il suo piegamento, come - sia pure in forma dubitativa - lo ho rappresentato anche nella mia Carta Geologica della Sardegna [14].

Qualcuno ha espresso delle riserve su questa interpretazione. Sta il fatto però che un vulcanismo cambrico nello spazio del Mediterraneo occidentale e regioni adiacenti è stato documentato in modo inequivocabile. Non mi sembra perciò tanto azzardato l'ammettere che, anche se in fase attenuata, questo fenomeno magmatico possa avere interessato pure l'area del Cambrico Sardo, allora più disturbata delle altre corrispondenti. Va da sé che sarà quanto mai difficile riconoscere oggi questi ipotetici filoni cambrici, dal momento che di quarzo filoniano del successivo ciclo ercinico è, per così dire, lardellato il Paleozoico Sardo. Ma forse col progresso e l'affinamento dei metodi, attraverso minuziose ricerche microchimiche o spettrografiche, si riuscirà un giorno a distinguere qui entro la formazione cambrica i prodotti di più cicli magmatici. Basti pensare che in questi ultimi anni sono già venute ad aggiungersi le testimonianze di almeno un altro ciclo preercinico.

Per non essere fraintesi su questo oscuro problema, che si inquadra nella infrastruttura geologica del Mediterraneo occidentale, sarà bene prospettare ancora qualche altro aspetto del Cambrico Sardo.

Dallo studio petrografico delle arenarie è emerso chiaramente che queste rappresentano il detrito di terreni cristallini precambrici con estesi affioramenti granitici. Oggi non sussiste più dubbio che questi sono da ricercarsi oltre i limiti dell'attuale Isola di Sardegna e non possono essere confusi con il suo granito, sicuramente ercinico. D'altra parte che quest'ultimo possa essere eventualmente un prodotto palingenetico di preesistenti graniti o derivato per granitizzazione di complessi precambrici e cambrici, è una questione che non riguarda il problema stratigrafico. Qui basterà affacciare solo l'idea che la serie cambrica lascia intravedere l'esistenza di due cicli magmatici preercinici: uno genericamente arcaico, dal quale proviene il detrito che ha costituito le arenarie, l'altro del Cambrico, manifestatosi presumibilmente in Sardegna attraverso iniezioni di quarzo anteriori alla trasgressione silurica.

Che poi nel Paleozoico si siano avute altre manifestazioni endogene (Silurico, Carbonifero, Permico) può interessare il nostro problema solo indirettamente. E mi spiego.

È pacifico che i metamorfismi, i metasomatismi e le mineralizzazioni entro la formazione cambrica sono da attribuirsi al ciclo ercinico, come si è già accennato a proposito della « dolomia secondaria ». È pure acquisito che l'assetto tettonico di questa formazione con tutte le sue complicazioni di dettaglio (riduzioni meccaniche o ispessimenti della serie, suoi capovolgimenti locali, contorsioni assiali, ecc.) ha preceduto la venuta del granito ercinico e del suo seguito filoniano.

La giacitura e la composizione litologica del Cambrico, così dislocato, però può avere indirizzato, favorito od ostacolato anche se non proprio l'ascesa dell'ingente massa magmatica ercinica almeno qualche frazione minore, tardiva, della stessa, in particolar modo la circolazione delle soluzioni metallifere. Ritengo pertanto che la conoscenza della tettonica sia utile anche nella ricerca e valorizzazione dei giacimenti, per cui la risoluzione del problema stratigrafico del nostro Cambrico non è priva di interesse nel campo minerario. Si può concedere però che, in singoli casi particolari, sia indifferente sapere se il « metallifero » — ora raddrizzato — stava in origine sopra o sotto gli schisti; siccome però non tutti i giacimenti si trovano in queste condizioni, mi pare poco plausibile un agnosticismo al riguardo. Senza contare che i depositi PbZn rappresentano — in funzione della termalità — sono una parte, sia pure la più cospicua, del complesso fenomeno della mineralizzazione ercinica.

Del resto le direttive informate al criterio della serie cambrica con gli schisti quale tetto impermeabile del complesso calcareo-dolomitico metallifero ha già dato buoni risultati nella ricerca e coltivazione di parecchi giacimenti. Ed è notorio che molte concentrazioni utili si incontrano di preferenza ai contatti fra calcare sotto e schisto sopra.

Dall'esame dei rapporti fra il magmatismo ercinico e la formazione cambrica dislocata risulta una maggiore frequenza di filoni acidi e basici entro gli affioramenti attuali del complesso arenaceo rispetto a quello schistoso, dove al contrario sono estremamente rari.

Anche questa ineguale distribuzione dei filoni potrebbe forse accennare, indirettamente, all'originaria successione stratigrafica nel senso che le arenarie in anticlinale sono state investite dai filoni porfirici, lamprofirici e quarzosi di preferenza che non gli schisti in sinclinale.

D'altra parte, ammesso che nel caso specifico questa giacitura non sia ancora dimostrabile direttamente e sicuramente col metodo paleontologico classico, si potrebbe dedurla forse anche da considerazioni geomorfologiche sulla evoluzione del penepiano.

Dalla prima emersione del Cambrico ad oggi sono passati oltre 400 milioni di anni. Durante questo enorme lasso di tempo le originarie montagne cambriche sono state demolite, spianate, ridotte a torsi, poi spostati e variamente modellati tanto da formare l'accidentato rilievo attuale.

Quello che conta qui però è che di regola nei torsi delle antiche montagne a pieghe sono risparmiati e tramandati in prevalenza i termini inferiori della serie. Ora, sulla Carta allegata si rileva che gli affioramenti delle arenarie sono più estesi che non quelli degli schisti; circostanza meglio comprensibile se i primi rappresentano nuclei di anticlinale.

D'altra parte sarebbe strano che dopo tanta distruzione le anticlinali, ammesso che queste fossero rappresentate dagli schisti, affiorino ancora oggi in aree così ristrette come lo sono quelle schistose. Si veda ad esempio la stretta zona di Cabitza (sulla Carta circa fra Iglesias e Gonnesa) o quella di Malacalzetta (a mezza strada fra Domusnovas e Fluminimaggiore) o l'altra un po' più grande e sinuosa di Rosas (fra Narcao e Villamassargia). Se invece questi affioramenti schistosi vengono attribuiti a nuclei di sinclinali, la loro limitata estensione attuale è più facilmente comprensibile in rapporto con l'antica peneplanazione, scesa fino nei nuclei arenacei delle anticlinali, come quello veramente notevole del Sulcis fra Teulada e Santadi o l'altro, ancor più interessante, fra Iglesias e Flumini, costituente l'area centrale del cosiddetto « anello metallifero » calcareo-dolomitico, alquanto deformato.

Ma sul tanto dibattuto problema tettonico, la cui risoluzione evidentemente dipende dal riconoscimento del profilo normale del Cambrico, torneremo in seguito; così pure sul significato del clivaggio, della pseudostratificazione e della schistosità trasversale connessi con le deformazioni tettoniche.

Prima di chiudere, voglio accennare solo brevemente al tentativo di P. Montaldo [4] di controllare - per mio suggerimento - la giacitura del Cambrico attraverso la circolazione delle acque sotterranee.

Il complesso calcareo-dolomitico dell'Iglesiente ha da antica data un carattere carsico molto accentuato da crepacci, caverne, grotte, foibe, poderose sorgenti, ecc. Si sa come il fenomeno geoidrologico abbia ostacolato molto e renda tuttora difficile - nonostante i progressi tecnici e le coraggiose innovazioni - la valorizzazione di parecchi giacimenti, classico il caso di Monteponi [5].



Ora dalla elaborazione di una lunga serie di dati (precipitazioni, portate, immissione di acque marine nelle zone di eduazione, ecc.), dal regime delle sorgenti, dai rapporti fra le stesse, dalle considerazioni sugli accidenti strutturali scrupolosamente vagliati, pare di poter concludere che la configurazione dei bacini idrogeologici, supposti per spiegare la circolazione sotterranea, si armonizzi meglio ammettendo le arenarie in anticlinali funzionanti da displuvi sotterranei ⁽²⁾. Senza dubbio siamo in un campo molto delicato, nel quale bisogna procedere con cautela, ed in qualche caso l'interpretazione potrebbe anche non essere univoca. Tuttavia, considerato il fenomeno idrogeologico iglesiente nel suo insieme, pare che questo trovi una spiegazione meno forzata se le arenarie sono veramente il termine basale della serie cambrica.

BIBLIOGRAFIA.

Gli scritti dei vecchi autori sono passati in rassegna nel lavoro fondamentale di V. NOVARESE [6] sotto citato; quelli più recenti da S. VARDABASSO [10] ed ancora da V. NOVARESE [7]. Si veda inoltre C. MAXIA, *Bibliografia mineraria della Sardegna*. «Istituto per gli Studi Sardi», Cagliari 1941. Basterà perciò dare qui un elenco abbreviato, integrativo, con particolare riguardo alle ultime pubblicazioni.

- [1] CARIA COMASCHI I., *I fossili della Sardegna (Cenni storici e stratigrafici)*. «Istituto per gli Studi Sardi», Cagliari 1949.
- [2] CAVINATO A., *Lezioni di giacimenti minerali*. Fasc. 2°. Torino 1942.
- [3] CAVINATO A., *Il profilo del Cambriano e le Mineralizzazioni*. «Atti Congresso Min. Ital.» (Ass. Min. Sarda, Iglesias 1948), Milano 1950.
- [4] MONTALDO P., *Idrogeologia del Cambrico Sardo*. «Giornale del Genio Civile», Roma 1947.
- [5] MUSIO E., *La ripresa dell'eduazione delle acque nella Miniera di Monteponi*. «Atti Congr. Min. Ital.» (Ass. Min. Sarda, Iglesias 1948), Milano 1950.
- [6] NOVARESE V., *Contributo alla Geologia dell'Iglesiente. La serie paleozoica*. «Boll. Uff. Geol. d'Italia», 49, Roma 1924.
- [7] NOVARESE V., *Sul Cambriano della Sardegna*. «Boll. Uff. Geol. d'Italia», 57, Roma 1942.
- [8] SCHWARZBACH M., *Das Normalprofil des sardischen Cambriums. Nach Beobachtungen übernormale und überkippte Schichtlagerung*. «Zbl. f. Min. Geol. u. Pal.» Abt. B., Stuttgart 1939. Traduzione italiana di G. APRILE in «Res. Ass. Min. Sarda», 44, Iglesias 1939.
- [9] VARDABASSO S., *La formazione Cambrica in Sardegna ed il rilevamento geologico dei fogli «Iglesias» e «Teulada-S. Efisio»*. «Rend. Sem. Fac. Scienze», 9, Cagliari 1939.
- [10] VARDABASSO S., *Quale è il profilo normale del Cambrico Sardo?* «Res. Ass. Min. Sarda», 45, Iglesias 1940.
- [11] VARDABASSO S., *Osservazioni sulla tettonica dell'Iglesiente* (verbale della seduta del 18 maggio 1941). «Res. Ass. Min. Sarda», 46, Iglesias 1941.
- [12] VARDABASSO S., *Escursione sociale alla grotta di Domusnovas ecc.* «Res. Ass. Min. Sarda», 46, Iglesias 1941.
- [13] VARDABASSO S., *Geologia dei giacimenti ercinici PbZn della Sardegna*. «XVIII Inter. Geol. Congr.» (1948), London 1950.
- [14] VARDABASSO S., *Carta Geologica della Sardegna*. «Soc. Elettrica Sarda», Roma 1949.
- [15] VARDABASSO S., *Osservazioni geologiche sul Cambrico del Fluminese*. «Res. Ass. Min. Sarda», Iglesias 1950 (in corso di stampa).
- [16] ZABELLI A., *Studio sul Cambriano Sardo. (Tettonica e giaciture metallifere dell'Iglesiente)*. «Atti Congr. Min. Ital.» (Ass. Min. Sarda, Iglesias 1948), Milano 1950.

(2) La recente controversia sull'intorbidamento delle sorgenti di Domusnovas e di Gutturu Pala (Fluminimaggiore), imputabile alle acque di scarico delle laverie di alcune miniere, ha servito ad accertare che i limiti dei bacini segnati da Montaldo sono validi.

Mineralogia. — *I minerali del gruppo dell'Ortler.* — I. *Actinolite e biotite di Val Madriccio.* Nota di CIRO ANDREATTA e di ROSSANA PIRANI, presentata (*) dal Corrisp. C. ANDREATTA.

Nel 1930 uno di noi (Andreatta) iniziava il rilevamento geologico dell'imponente gruppo dell'Ortler. Il lavoro, condotto durante le campagne estive di venti anni, vede una parziale conclusione con la pubblicazione del foglio geologico al 100.000 «M. Cevedale», attualmente in corso di stampa.

Numerosi lavori sono già stati pubblicati sopra argomenti petrografici e geologici, dato il grande interesse che in questi campi offrono le formazioni del gruppo; invece furono finora trascurati l'illustrazione e lo studio dei minerali ben cristallizzati che si trovano in queste stesse formazioni, minerali che però sono stati raccolti sistematicamente dal rilevatore. Con la presente Nota si intende dare inizio ad una serie di lavori che colmino questa lacuna. Si potrà così dimostrare come il gruppo dell'Ortler offra un notevole interesse anche dal punto di vista esclusivamente mineralogico, tanto più che il gruppo è quasi completamente sconosciuto in tale senso, come può dimostrare il noto libro di Gasser (bibl. 1) e la bibliografia successiva.

Per inquadrare i giacimenti dei diversi minerali che saranno via via studiati nella serie di fenomeni che caratterizzano la storia geologica del complesso che costituisce il gruppo dell'Ortler, si rimanda alla Nota di C. Andreatta (bibl. 2) sopra il metamorfismo delle formazioni del gruppo dell'Ortler, che riporta schematicamente, compendiate nella cartina annessa, il tipo e il grado di metamorfismo delle diverse rocce che costituiscono il gruppo. Nella cartina sono state distinte zone formate da rocce aventi gradi attuali di metamorfismo abbastanza uniformi e linee di dislocazione con produzione di miloniti.

Considerazioni conclusive sopra le diverse fasi minerogenetiche che si possono riscontrare nel gruppo dell'Ortler, soprattutto in relazione con le fasi di metamorfismo e di cristallizzazione in generale, saranno possibili solo dopo molti studi sui minerali e sulle rocce e dopo l'esauriente chiarificazione dei vari problemi geologici e tettonici ancora insoluti. Ciò vuol dire che tali considerazioni genetiche conclusive saranno eseguite nel futuro come parte finale dello studio mineralogico del gruppo stesso.

In questo lavoro sono studiate una actinolite ed una biotite che si trovano nella fascia di rocce a metamorfismo di epizona, cioè nella formazione delle filladi quarzifere, entro una intercalazione di serpentino. Questo affiora nell'alta Val Madriccio (Madritschthal), a circa metà del costone che dalla Punta Peder di Dentro (Hintere Pederspitz) si prolunga verso S-E fino alla Croda del Sole (Sonnenwand). Si tratta di una grossa lente serpentinoso concordante con le filladi quarzifere, accompagnata verso nord da ortogneis occhiadini, che forma alcuni roccioni nerastri che s'innalzano circa un centinaio di metri oltre i 3000 poco a N-W di una piccola sella che ha le seguenti coordinate geografiche:

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

46°30' N e 1°48'20" Ovest M. Mario. Verso ovest la lente si prolunga verso il solco dell'alta Val Madriccio a formare alcuni spuntoni rocciosi che emergono dal cumulo di detriti di falda poco a oriente del torrentello; verso E-N-E invece la lente scompare presto sotto i detriti della conca dell'alta Valle Peder (Peder Tal).

La roccia più diffusa che costituisce la grossa lente è un tipico serpentino verde-scuro fino a nerastro, con superfici di alterazione rosso-ruggine, compatto e poco scistoso, che si sgretola in grossi detriti poliedrici. Tale massa serpentinoso presenta vene e chiazze di un serpentino più chiaro, fibroso, spesso contenente cristalli di siderite. Verso il limite meridionale dell'intercalazione si notano lenti, aventi potenza massima di diversi decimetri nelle zone centrali e che si assottigliano lateralmente fino a formare vene dello spessore di pochi centimetri, costituite da aggregati elegantemente raggiati di grossi cristalli prismatici di actinolite assolutamente prevalente, talora misti a lamelle di biotite scolorita e trasformata evidentemente per idratazione.

Al limite meridionale la roccia ad actinolite diventa a cristalli gradualmente più piccoli tanto da potersi classificare come una normale anfibolite actinolitica. Questa viene a stare a contatto con le miloniti di una importante linea di dislocazione che si prolunga verso oriente e che sarà trattata in altro lavoro più adatto.

L'actinolite è quasi sempre in aggregati raggiati di colore dal verde intenso al grigio-verde chiaro, in bei cristalli prismatici raramente terminati da facce e spesso fratturati trasversalmente. Isolati, si presentano macroscopicamente come prismi a base rombica piuttosto tozzi. Si possono notare alcuni individui associati a due, reciprocamente inclinati rispetto all'allungamento come due travi di tetto: essi sembrano geminati, ma in realtà non dimostrano alcun piano definito di geminazione. Il colore è vario: verde chiarissimo o grigio biancastro se i cristalli sono piccoli, verde-chiaro, se di maggiori dimensioni. A volte nei cristalli si può notare una zonatura. La lunghezza media dei cristalli è di circa 5 cm e la loro grossezza di 2-3 mm di diametro.

Al microscopio si osservano frequenti fratture che intersecano i cristalli in varie direzioni riempite da magnetite; la lucentezza è vitrea o anche madreperlacea, più vivace nelle fratture e negli individui più freschi. L'abito è prismatico alquanto allungato, secondo {110}. Il pleocroismo è evidente: in alcuni individui si è potuto determinare:

α = incolore o grigio,

β = verde pallidissimo,

γ = verde pallido.

L'estinzione è obliqua con angolo di estinzione massimo $\alpha - \gamma = 18^\circ$. Sebbene non perfetta, si è riscontrata molto spesso nelle sezioni (010) un'estinzione a clessidra caratteristica degli anfiboli e pirosseni.

Per la determinazione degli indici di rifrazione si è seguito il metodo di immersione della linea di Becke, usando una mescolanza di α — monobromonafталina e iodobenzolo, e luce gialla monocromatica ottenuta con filtro Lifa n. 395 per la linea D = 586. I risultati ottenuti sono i seguenti:

$$\alpha = 1,623 \pm 0,002$$

$$\beta = 1,629 \pm 0,002$$

$$\gamma = 1,642 \pm 0,002.$$

La potenza birifrattiva del minerale, calcolata, è dunque:

$$\gamma - \alpha = 0,019.$$

Al tavolino di Fedoroff, l'angolo tra gli assi ottici, su una media di cinque individui misurati, è risultato:

$$2V = 79^\circ -.$$

Con una porzione di materiale scelto accuratamente al microscopio binoculare è stato determinato il peso specifico usando il metodo del picnometro: i risultati ottenuti su tre determinazioni variano sulla terza cifra decimale. La media ottenuta è

$$p. s. = 3,17.$$

Su di un'altra porzione di materiale puro è stata condotta l'analisi chimica. I risultati ottenuti sono i seguenti:

| % in peso | | quoz. atom. | | |
|--------------------------------|-------|----------------|--------|---------|
| SiO ₂ | 55,56 | Si | 0,9249 | 7,411 |
| Al ₂ O ₃ | 5,24 | Al | 0,1028 | 0,589 |
| TiO ₂ | 0,04 | Ti | 0,0006 | 0,2347 |
| Cr ₂ O ₃ | 0,18 | Cr | 0,0024 | 0,0048 |
| Fe ₂ O ₃ | tr. | | | 0,0192 |
| FeO | 0,28 | Fe'' | 0,0039 | 0,0312 |
| MnO | 0,19 | Mn | 0,0025 | 0,0200 |
| MgO | 21,97 | Mg | 0,5449 | 4,3663 |
| CaO | 13,18 | Ca | 0,2350 | 1,8830 |
| Na ₂ O | 0,89 | Na | 0,0288 | 0,2307 |
| K ₂ O | 0,46 | K | 0,0098 | 0,0785 |
| H ₂ O+ | 1,24 | OH | 0,1376 | 1,1026 |
| H ₂ O— | 0,56 | O | 2,7456 | 22,0000 |
| 99,79 | | | | |

$z = 8,000$

$y = 4,676$

$x = 2,192$

Nell'ultima colonna sono riportati i rapporti fra i quozienti atomici, posto come base il quoziente dell'ossigeno $O = 22,000$.

Osservando i pesi percentuali, la posizione di questo minerale negli anfiboli monoclini è ben definita dall'alto tenore in calcio e magnesio: è inoltre da rilevare un alto contenuto in alluminio, mentre scarsissimo è il ferro, contrariamente a quanto appare in molte analisi di actinoliti riportate dal Doelter (bibl. 3).

Per la determinazione della formula in base al termine puro teorico: $Ca_2Mg_5(OH)_2Si_8O_{22}$ sono stati riuniti i diversi cationi in tre aggruppamenti, tenendo conto delle vicariabilità possibili tra i diversi elementi, seguendo i sistemi attualmente in uso (bibl. 4) e cioè:

$x = Ca + Na + K$ (cationi con numero di coordinazione 8)

$y = Mg + Fe'' + Fe''' + Mn + Ti + Al + Cr$ (cationi con numero di coordinazione 6)

$z = Si + Al$ (cationi con numero di coordinazione 4).

In tal modo la formula dell'actinolite di Val Madriccio è:



L'eccesso che si nota nell'aggruppamento x compensa la sostituzione del silicio da parte dell'alluminio; mentre il valore inferiore a 5 dell'aggruppamento y è compensato dalla sostituzione di elementi trivalenti (Al''' , Cr''') e tetravalenti (Ti^{IV}) a elementi bivalenti come Fe'' e Mg'' .

La biotite costituisce normalmente dei piccoli noduletti sparsi fra i prismi di actinolite, di colore nerastro o verdastro scuro. Tali noduletti risultano costituiti anche da cristalli granulari di magnetite.

La biotite si presenta alquanto scolorita, in toni verde-scuri, talora trasformata addirittura in un termine della serie delle cloriti (clinocloro); la lucentezza sericea passa fino a madreperlacea. Osservata al microscopio, si mostra in cristalli a contorni non netti, quasi priva di pleocroismo, di colore giallo-verdastro o leggermente bruno. La birifrazione è bassa, i colori di interferenza, in parte mascherati dalla colorazione stessa del minerale, spesso appaiono anomali come nelle cloriti, in rapporto al vario grado di trasformazione. Angolo degli assi ottici in generale molto piccolo: in alcuni cristalli al tavolino di Fedoroff si è ottenuto:

$$2V = \text{circa } 2^\circ \text{ —.}$$

L'analisi chimica su materiale puro separato al bincolare ha dato i seguenti risultati:

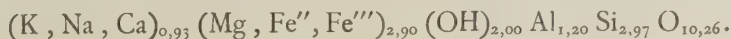
| % in peso | | quoz. atom. | |
|--|--------|-----------------|----------------|
| SiO ₂ | 41,83 | Si | 0,6965 2,9730 |
| TiO ₂ | tr. | | |
| Al ₂ O ₃ | 14,36 | Al | 0,2818 1,2025 |
| Fe ₂ O ₃ | 2,49 | Fe''' | 0,0312 0,1331 |
| Cr ₂ O ₃ | — | | |
| MnO | tr. | | |
| FeO | 0,32 | Fe'' | 0,0045 0,0192 |
| MgO | 25,92 | Mg | 0,6429 2,7441 |
| CaO | 2,22 | Ca | 0,0396 0,1690 |
| K ₂ O | 5,35 | K | 0,1136 0,4849 |
| Na ₂ O | 1,99 | Na | 0,0642 0,2741 |
| H ₂ O+ | 4,21 | OH | 0,4674 1,9950 |
| H ₂ O— | 1,48 | O | 2,4047 10,2640 |
| | 100,17 | | |

2,896

0,928

Nell'ultima colonna sono riportati i rapporti tra i quozienti atomici, posta la somma dei quozienti dei cationi $K + Mg_3 + Si_3 + Al = 8,000$, in base alla formula $KMg_3(OH)_2 Si_3 AlO_{10}$.

La composizione di questa biotite risulta perciò la seguente:



Come si vede, il valore del numero degli atomi a coordinazione 12 è alquanto inferiore al teorico, ma questa mancanza è compensata dalla presenza del Ca; altrettanto si può dire per gli atomi a coordinazione 6, nei quali la compensazione è operata dal Fe⁺⁺⁺. L'eccesso di Al di fronte al difetto di Si è altrettanto spiegabile. Le somme totali delle valenze cationiche e anioniche ci sono risultate perfettamente eguali.

La clorite infine si trova in due tipi di diversa derivazione. Una prima si presenta associata alla biotite in forma di lamelle e contorno poligonale, di colore verdastro, lucentezza sericea; sono frequenti fra le singole lamelle le inclusioni di ossidi e idrossidi di ferro. Mostra un debole rilievo e colori di interferenza bassi, spesso con le caratteristiche anomalie.

La seconda varietà invece, perfettamente sfaldabile, pur essendo otticamente simile alla prima, salvo una scolorazione più intensa, sia macroscopicamente che microscopicamente si presenta con molta evidenza in aggregati a forma prismatica allungata propria dei cristalli di actinolite.

Si tratta in ambedue i casi di clinocloro, derivato per trasformazione rispettivamente di biotite e di actinolite.

BIBLIOGRAFIA.

1. G. GASSER, *Die Mineralien Tirols*, Innsbruck, 1913.
2. C. ANDREATTA, *Il metamorfismo delle formazioni del gruppo dell' Ortler*. «La Ricerca Scientifica», A. 21°, Roma 1951.
3. DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*. Band. II, 1° Teil, Dresden 1914.
4. JOHN C. RABBITT, *A new study of the anthophyllite series*. «The American Mineralogist», vol. 33, pp. 263-323, May-June 1948.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Topologia). — *Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico*. Nota II (*) di ALBERTO ROSELLI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

In questa seconda Nota esamino, come detto nella I, il caso del cono cubico a due falde.

§ 3. — CONO CUBICO A DUE FALDE.

1. Un cono cubico a due falde si ottiene come proiezione di una cubica bipartita (ved. Nota I, n. 3). Per i circuiti giacenti sulla falda dispari si ritrovano gli stessi risultati ottenuti al n. 5. I circuiti pari di una curva algebrica (priva di singolarità) situati sulla falda pari non passano per il vertice⁽¹⁾ e sono di due specie a seconda che intersecano le generatrici della falda pari in un numero pari o dispari di punti reali (distinzione già fatta per i coni quadrici). Se sono

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1950.

(1) Se così non fosse dovrebbero passare almeno due volte per il vertice che sarebbe multiplo per la curva contro l'ipotesi.

dispari passano necessariamente per il vertice segnando tutte le generatrici della falda pari o in un numero pari (≥ 0) o in un numero dispari (≥ 1) di punti reali ⁽²⁾.

È ovvio poi che un circuito privo di singolarità nel vertice non può giacere su entrambe le falde del cono.

2. Vediamo ora come si intersecano due circuiti del nostro cono cubico. Se sono entrambi situati sulla falda pari i risultati sono analoghi a quelli noti per i coni quadrici e possono brevemente riassumersi come segue:

Due circuiti pari si segano in un numero pari (≥ 0) di punti;

Un circuito pari di 1^a specie ed uno dispari in un numero pari (≥ 0) di punti;

Un circuito pari di 2^a specie ed uno dispari in un numero dispari ≥ 1 di punti;

Due circuiti dispari dello stesso sistema in un numero dispari ≥ 1 di punti (compreso il vertice);

Due circuiti dispari di sistemi diversi in un numero pari ≥ 2 di punti (compreso il vertice).

Per poter considerare l'analogo comportamento per i circuiti situati sulla falda dispari, proiettiamo da un punto O situato sopra una generatrice della falda pari i punti P della falda dispari, su di un piano π , in P'. Si ottiene così una corrispondenza biunivoca senza eccezioni tra i punti della falda dispari ed il piano perchè la retta P'O sega la falda pari ulteriormente in uno ed uno solo punto Q (eventualmente coincidente con O se P' sta sulla traccia del piano tangente alla falda pari lungo OV ⁽³⁾) e quindi la falda dispari in uno ed un solo punto P.

Quindi i punti comuni a due circuiti sono pure comuni alle loro proiezioni e viceversa.

Allora si può dire che per i circuiti situati sulla falda dispari si ha:

Due circuiti di cui uno almeno pari, si segano in un numero pari ≥ 0 di punti;

Due circuiti dispari si segano in un numero dispari ≥ 1 di punti.

3. *Curve prive di singolarità sul cono cubico a due falde.* — Poichè due circuiti dispari di una stessa falda (pari o dispari) del cono cubico hanno almeno un punto reale in comune (vedi n. 2) una curva algebrica priva di singolarità (situata sul cono) può avere al massimo due circuiti dispari, uno sulla falda pari (e necessariamente passante per il vertice) l'altro sulla falda dispari e non passante per il vertice. Quindi: *Una curva algebrica (sghemba) d'ordine n pari può avere o tutti circuiti pari o due circuiti dispari (più eventuali circuiti pari) situati i primi uno sull'una falda e l'altro sull'altra come detto sopra.* In quest'ultimo caso la falda pari non contiene circuiti monocentrici e quella dispari non può avere circuiti pari del 3° tipo (ved. Nota I, n. 5). *Una curva algebrica (sghemba) d'ordine n dispari ha uno ed un solo circuito dispari (più eventuali circuiti pari); se esso è situato sulla falda pari mancano i circuiti monocentrici sulla falda stessa ed i circuiti pari di 3° tipo sulla falda dispari.*

(2) Un piano generico passante per il vertice sega la falda pari secondo due generatrici g_1, g_2 ; il circuito dispari deve segare queste, fuori del vertice V, in un numero pari di punti reali, onde g_1, g_2 hanno la stessa parità. Variando il piano per g_1 si vede che ciò vale per ogni generatrice della falda pari.

(3) Se P' coincide con la traccia di VO su π , P coincide col vertice V.

4. Abbiamo visto nel n. precedente che una curva d'ordine n pari può avere al massimo due circuiti dispari (e questo solo per $n = 6\nu + 4$ perchè soltanto in tal caso la curva passa per il vertice, ved. Nota I, n. 2). Dimostriamo che esistono effettivamente curve di questo tipo costruendo una quartica ($\nu = 0$) con due circuiti dispari situati come si è detto. Perciò sia $\pi_1 = 0$ l'equazione di un piano non passante per il vertice, segante la falda pari secondo un circuito monocentrico m e quella dispari secondo un circuito dispari δ , e $\pi_2 = 0$ un piano passante per una generatrice g della falda pari e segante ulteriormente questa secondo la generatrice g_1 e la falda dispari secondo g_2 (ved. fig. 2). Consideriamo poi un piano

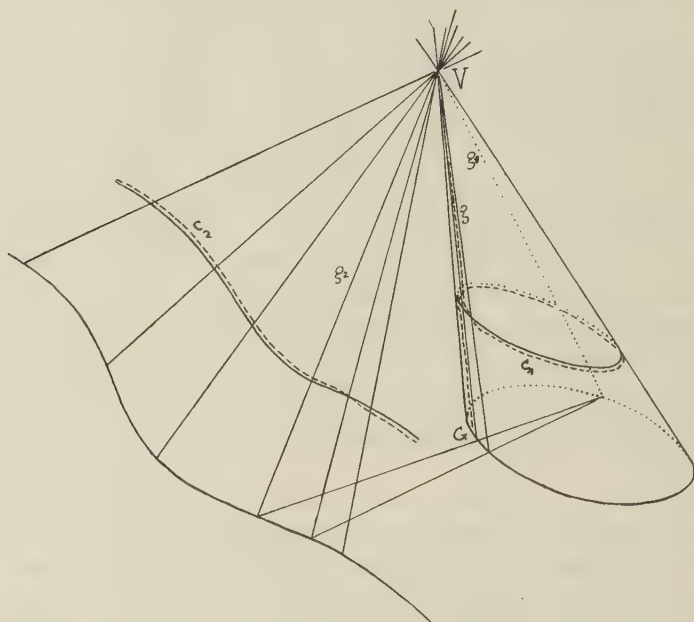


Fig. 2.

passante per g_1 di equazione $\alpha_1 = 0$ ed un piano $\alpha_2 = 0$ per g_2 e non segante ulteriormente il cono secondo generatrici reali. Formiamo la combinazione lineare:

$$(1) \quad \pi_1 \pi_2 + \lambda \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

che rappresenta un fascio di quadriche (passanti per g_1 e g_2) che segano il cono secondo le due generatrici g_1, g_2 ed una quartica sghemba residua. Per λ sufficientemente piccola si ottiene una quartica vicinissima ai circuiti m, δ ed alla generatrice g , composta di due circuiti dispari situati uno c_1 sulla falda dispari e l'altro c_2 sulla falda pari e passante per il vertice (ved. fig. 2).

Che la quartica passi per il vertice semplicemente si vede anche come segue. La (1) rappresenta ∞^1 quadriche aventi in V un punto semplice. L'intersezione completa di queste col cono (cubico) è perciò una curva del 6° ordine con un punto triplo in V; ma da questa si staccano le generatrici g_1, g_2 che passano complessivamente due volte per V e rimane quindi una quartica passante semplicemente per V.

Matematica. — *Su un teorema di Frobenius per le funzioni di Jacobi.* Nota (*) di SALOMON BOCHNER, presentata dal Corrisp. B. SEGRE.

La teoria delle funzioni di Jacobi può essere estesa dall'usuale spazio Euclideo ad una qualsiasi varietà a coordinate locali complesse⁽¹⁾, sul quale sia definito un gruppo di Lie abeliano di omeomorfismi complessi; in questo lavoro viene fatto il primo passo verso questa estensione, discutendo la validità della disuguaglianza fondamentale di Frobenius⁽²⁾

$$(1) \quad i \sum_{\alpha, \beta} k_{\alpha\beta} x^\alpha \bar{x}^\beta \geq 0,$$

e le circostanze nelle quali in essa vale il segno di uguaglianza.

Consideriamo una varietà S arbitraria a coordinate locali complesse, i cui punti indicheremo con t, t' , ecc., ed inoltre, per un certo ρ , lo spazio $E_{2\rho}$ di ρ variabili complesse, il cui punto generico verrà indicato, usando la notazione vettoriale, con:

$$(2) \quad a = (a^1, \dots, a^\rho).$$

In $E_{2\rho}$ consideriamo un numero σ finito di punti

$$(3) \quad a_\alpha = (a_\alpha^1, \dots, a_\alpha^\rho), \quad \alpha = 1, \dots, \sigma,$$

che combiniamo linearmente con coefficienti reali arbitrari ξ^1, \dots, ξ^σ :

$$(4) \quad a(\xi) = a_\alpha \xi^\alpha \quad (\text{si sommi rispetto ad } \alpha),$$

cosicchè ogni vettore (4) rappresenterà un punto

$$(5) \quad (a^1(\xi), \dots, a^\rho(\xi))$$

avente le componenti

$$a^\lambda(\xi) = a_\alpha^\lambda \xi^\alpha, \quad \lambda = 1, \dots, \rho;$$

i punti (3) sono anch'essi esprimibili in tale forma, ove si assuma $\xi^\nu = \delta_\alpha^\nu$.

La totalità dei punti (4) costituisce uno spazio lineare (non caratteristico) subordinato ad $E_{2\rho}$, che sarà indicato con L ; e, poichè non abbiamo supposto che i vettori (3) siano indipendenti rispetto a coefficienti reali, non è escluso che il medesimo punto di L provenga da più serie di coefficienti ξ .

La prima ipotesi importante che noi faremo, è che ad ogni punto (4) sia associato un omeomorfismo olomorfo di S in sè, che rappresenteremo simbolicamente colla

$$(6) \quad t' = a(\xi) t,$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1950.

(1) Riguardo alla definizione di tali varietà, cfr. ad esempio S. BOCHNER e W. T. MARTIN, *Several complex variables* (Princeton, University Press, 1948), p. 54.

(2) G. FROBENIUS, *Ueber die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Functionen.* « Journ. für r. u. a. Math. », 97 (1884), 16-48. Ved. in particolare p. 21.

e che gli omeomorfismi (6) formino un gruppo abeliano nel senso che

$$(7) \quad a(\xi) \cdot [a(\eta) t] = a(\xi + \eta) t = a(\eta) \cdot [a(\xi) t].$$

Consideriamo poi una funzione $f(t) \equiv f$ o olomorfa in S , e facciamo le due ipotesi seguenti:

I) esista una funzione olomorfa $\varphi(t; a)$ in $S \times E_{2q}$ tale che

$$(8) \quad \varphi[t; a(\xi)] \equiv f(a(\xi) t) \equiv f(t');$$

II) per ogni α esista una funzione olomorfa $H_\alpha(t)$ in S , tale che per il punto (3) di L si abbia

$$(9) \quad \varphi(t; a_\alpha) = e^{2\pi i H_\alpha(t)} f(t) \equiv e^{2\pi i H_\alpha(t)} \varphi(t; 0).$$

Poichè dalla (7) segue che

$$(10) \quad \varphi(a_\alpha t; a_\beta) = \varphi(a_\beta t; a_\alpha),$$

si conclude che le quantità

$$(11) \quad k_{\alpha\beta} = [H_\alpha(a_\beta t) - H_\alpha(t)] - [H_\beta(a_\alpha t) - H_\beta(t)],$$

— per le quali evidentemente $k_{\beta\alpha} = -k_{\alpha\beta}$ —, sono degli interi costanti, cosicchè la forma

$$(12) \quad N = i k_{\alpha\beta} x^\alpha \bar{x}^\beta$$

è Hermitiana.

Nel caso classico le funzioni $H_\alpha(t)$ sono lineari nelle variabili t ; per potere adattare tale restrizione alla situazione attuale, noi supporremo che, in corrispondenza ad ogni α , sia data una forma lineare [omogena]

$$(13) \quad L_\alpha[a(\xi)] = \sum_{\lambda=1}^q b_\alpha^\lambda a^\lambda(\xi) = \sum_{\lambda=1}^q b_\alpha^\lambda a_\beta^\lambda \xi^\beta,$$

tale che

$$(14) \quad H_\alpha[a(\xi) t] = H_\alpha(t) + L_\alpha[a(\xi)];$$

e si noti che, mentre le relazioni di periodicità (9) sono state supposte solo per i punti discreti (3), la relazione di linearità (14) si suppone valida per *tutti* i punti di L .

Sostituendo nella (11) il valore di H_α dato dalla (14), otteniamo

$$(15) \quad k_{\alpha\beta} = \sum_\lambda (b_\alpha^\lambda a_\beta^\lambda - b_\beta^\lambda a_\alpha^\lambda);$$

e, se si introduce la funzione

$$(16) \quad \psi(t; \xi) = \varphi[t; a(\xi)] \cdot \text{Exp}[-2\pi i H_\alpha(t) \xi^\alpha - \pi i \sum_\lambda b_\beta^\lambda a_\alpha^\lambda \xi^\alpha \xi^\beta + \pi i \sum_{\lambda, \alpha} b_\alpha^\lambda a_\alpha^\lambda \xi^\alpha],$$

si ha la relazione

$$(17) \quad \psi(t; \xi^1, \dots, \xi^\alpha + 1, \dots, \xi^\sigma) = e^{\pi i k_{\alpha\beta} \xi^\beta} \psi(t; \xi^1, \dots, \xi^\alpha, \dots, \xi^\sigma),$$

esattamente come nel caso di Frobenius, talchè anche ora otteniamo la notevole conseguenza

$$(18) \quad |\psi(t; \xi)| \leq M(t),$$

con $M(t)$ indipendente da ξ .

Procedendo ancora come Frobenius, poniamo:

$$(19) \quad \xi^\alpha = x^\alpha + \bar{x}^\alpha,$$

e facciamo l'ipotesi

$$(20) \quad a_\alpha^\lambda x^\alpha = 0 \quad \lambda = 1, \dots, \rho;$$

se, mediante le (19), introduciamo le nuove quantità

$$(21) \quad r^\lambda = a_\alpha^\lambda \xi^\alpha \equiv a_\alpha^\lambda \bar{x}^\alpha,$$

eseguendo i calcoli otteniamo

$$(22) \quad \psi(t; \xi) = \varphi(t; r) \cdot \text{Exp} [-2\pi i A_\alpha(t)(x^\alpha + \bar{x}^\alpha) - \pi i B_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta - \pi i k_{\alpha\beta} x^\alpha \bar{x}^\beta],$$

avendo posto

$$(23) \quad A_\alpha(t) = H_\alpha(t) - \frac{1}{2} \sum_\lambda b_\alpha^\lambda a_\alpha^\lambda \quad ; \quad B_{\alpha\beta} = \sum_\lambda b_\alpha^\lambda a_\beta^\lambda.$$

Sempre seguendo Frobenius, sostituiamo x^α con $x^\alpha \bar{\chi}$ (e quindi \bar{x}^α con $\bar{x}^\alpha \chi$), ciò che non ha alcuna influenza sulla (20), giacchè questa implica che sia:

$$(24) \quad a_\alpha^\lambda \cdot x^\alpha \bar{\chi} = 0;$$

fatta inoltre la posizione

$$(25) \quad \xi(\chi) = x\bar{\chi} + \bar{x}\chi$$

dalla (22) si deduce la

$$(26) \quad \psi[t; \xi(\chi)] \cdot \text{Exp} [\pi i k_{\alpha\beta} x^\alpha \bar{x}^\beta \chi \bar{\chi} + 2\pi i A_\alpha(t) x^\alpha \bar{\chi} + 2\pi i \overline{A_\alpha(t)} \bar{x}^\alpha \chi] = \\ = \varphi(t; r\chi) \cdot \text{Exp} [-2\pi i A_\alpha(t) \bar{x}^\alpha \chi + 2\pi i \overline{A_\alpha(t)} \bar{x}^\alpha \bar{\chi} - \pi i B_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta \chi^2],$$

da cui si trarranno tutte le conclusioni. Come in Frobenius, il primo membro della (26) ha per valore assoluto

$$(27) \quad |\psi[t; \xi(\chi)]| e^{\pi \cdot N \cdot |\chi|^2},$$

dove N è il numero reale dato dalla (12), e, per la (18), esso risulta

$$\leq M(t) e^{\pi \cdot N \cdot |\chi|^2}.$$

Ma il secondo membro della (26) è una funzione intera della variabile complessa χ , e quindi, per il teorema di Liouville, dev'essere

$$N \geq 0,$$

che è appunto la classica disuguaglianza (1).

Nel caso dell'uguaglianza, se cioè

$$(28) \quad k_{\alpha\beta} x^\alpha \bar{x}^\beta = 0,$$

il secondo membro della (26) dev'essere costante rispetto a χ , per ogni scelta di t ; onde fare un'analisi di questa possibilità, distinguiamo i due casi *a*) $r = 0$ e *b*) $r \neq 0$, che, come vedremo, presentano circostanze ben differenti.

Nel caso *a*), ossia, in base alle (21), se

$$(29) \quad a_\alpha^\lambda \bar{x}^\alpha = 0, \quad \lambda = 1 \dots \rho,$$

od anche

$$(30) \quad \bar{a}_\alpha^\lambda \bar{x}^\alpha = 0, \quad \lambda = 1, \dots, \rho;$$

tenuto conto della (20) e del fatto che ora $\varphi(t; r\bar{\chi}) = \varphi(t; 0)$, l'essere il secondo membro della (26) costante porta alle relazioni

$$(31) \quad \overline{A_\alpha(t)} x^\alpha = 0, \quad A_\alpha(t) x^\alpha = 0,$$

per ogni t , come pure alla

$$(32) \quad B_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta = 0.$$

La (32) è conseguenza della (29), e può essere trascurata; le (31) possono invece essere sfruttate nel modo seguente. Data l'arbitrarietà di t nelle (31), risulta

$$(33) \quad A_\alpha[a(\xi)t] x^\alpha = 0$$

per valori delle ξ reali arbitrari, non aventi alcun legame colle x . Per le (23) e (14) si ha

$$A_\alpha[a(\xi)t] - A_\alpha(t) = H_\alpha[a(\xi)t] - H_\alpha(t) = L_\alpha[a(\xi)],$$

sicchè le (31) e (33) implicano

$$\sum_\lambda b_\alpha^\lambda a_\beta^\lambda x^\alpha \xi^\beta = 0.$$

Se, in particolare, assumiamo $\xi^\beta = \delta_\gamma^\beta$, otteniamo

$$\sum_\lambda b_\alpha^\lambda a_\gamma^\lambda x^\alpha = 0;$$

inoltre, in base alle (20), risulta

$$\sum_\lambda b_\gamma^\lambda a_\alpha^\lambda x^\alpha = 0,$$

sicchè le (15) forniscono $k_{\gamma\alpha} x^\alpha = 0$ per tutti i valori di γ . Dunque, nel caso a), accanto alle relazioni supposte (28), vale il sistema assai più restrittivo di condizioni

$$(34) \quad k_{\alpha\beta} x^\alpha = 0, \quad \beta = 1, \dots, \sigma,$$

come nel caso classico.

Nel caso b), il secondo membro della (26) assume per ogni $\bar{\chi}$ lo stesso valore che per $\bar{\chi} = 0$, e quindi si ha:

$$(35) \quad \varphi(t; r\bar{\chi}) = \varphi(t; 0) \cdot \text{Exp} [2\pi i A_\alpha(t) \bar{x}^\alpha \bar{\chi} - 2\pi i \overline{A_\alpha(t)} \bar{x}^\alpha \bar{\chi} + \pi i B_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta \bar{\chi}^2].$$

In ogni sistema di coordinate $\{t\}$ locali su S , le funzioni $A_\alpha(t)$ sono serie di potenze nelle t , e le $\overline{A_\alpha(t)}$ sono serie di potenze nelle variabili coniugate. Però, se una certa eguaglianza fra serie di potenze nelle variabili t, \bar{t} sussiste quando le \bar{t} assumano valori coniugati alle t , essa continua ad esser valida quando le \bar{t} siano nuove variabili indipendenti; applicando tale osservazione alla (35), si vede che, per ogni valore di $\bar{\chi}$,

$$(36) \quad e^{-2\pi i \overline{A_\alpha(t)} \bar{x}^\alpha \bar{\chi}} \dots$$

risulta costante rispetto alle \bar{t} . Da ciò si conclude senza difficoltà che esistono delle costanti C_α tali che la (36) abbia il valore

$$e^{-2\pi i C_\alpha \bar{x}^\alpha \bar{\chi}},$$

si da poter scrivere la (35) sotto la forma

$$(37) \quad \varphi(t; r\zeta) = e^{2\pi i J_{r\zeta}(t)} \varphi(t; 0),$$

ove

$$(38) \quad J_{r\zeta}(t) = A_\alpha(t) \bar{x}^\alpha \zeta - C_\alpha \bar{x}^\alpha \zeta + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta \zeta^2.$$

Notiamo che la relazione originaria (9) si riduce alla (37), ove si ponga

$$(39) \quad H_\alpha(t) \equiv J_{a_\alpha}(t);$$

ed affermiamo che le nuove quantità (38) soddisfano pure alle relazioni di linearità (14), supposte da principio verificate soltanto dalle particolari quantità (39). Invero, le (33) implicano le

$$J_{r\zeta}[a(\xi)t] - J_{r\zeta}(t) = A_\alpha[a(\xi)t] - A_\alpha(t) = L_\alpha[a(\xi)] \bar{x}^\alpha \zeta,$$

ove in luogo dell'ultimo termine possiamo scrivere

$$L_{r\zeta}[a(\xi)] \equiv \Sigma_{i\lambda}^0 b_{(r\zeta)}^\lambda a^\lambda(\xi),$$

qualora si ponga

$$b_{(r\zeta)}^\lambda = b_\alpha^\lambda \bar{x}^\alpha \zeta.$$

Abbiamo in conclusione che: *L'uguaglianza (28) può sussistere solamente se la funzione $f(t)$ inizialmente considerata ha periodi arbitrariamente piccoli appartenenti ad L (colla conservazione della condizione di linearità di Jacobi), ovvero se sono soddisfatte le relazioni più precise (30) e (34), oltre alle (31).*

Meccanica. — *Sul campo elettromagnetico «ortogonale» nello spazio-tempo.* Nota II^(*) di ALDO M. PRATELLI, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

§ 2. IL LAVORO DEL TENSORE ELETTROMAGNETICO ESPRESSO MEDIANTE LA COPPIA DI FUNZIONI POTENZIALI f e g . — Indichiamo con $R_{(4)}$ la regione quadridimensionale dello spazio-tempo entro la quale è definito il tensore elettromagnetico, ed entro la quale è quindi conosciuta, per effetto della (4') e della (5), la coppia di funzioni f e g . Entro $R_{(4)}$ sia definita una superficie regolare orientata Γ , aperta, tale cioè che le coordinate x^α dei suoi punti (eventi) Π siano funzioni regolari di due parametri ξ e η , in tutto un campo C del piano (ξ, η) ,

$$(6) \quad x^\alpha = x^\alpha(\xi, \eta) \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

in modo che la matrice funzionale (jacobiana) delle x^α rispetto alle ξ e η abbia caratteristica eguale a 2 in tutto C , contorno l compreso; esistono quindi $4 - 2 = 2$ legami funzionali tra le variabili x^α : il che, dal punto di vista geometrico, equivale alla possibilità di definire la superficie Γ come intersezione di due ipersuperfici di equazioni (implicite)

$$(6') \quad F(x^\alpha) = 0, \quad G(x^\alpha) = 0.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1950.

Il bivettore tangente nel punto Π generico, e il bivettore normale nello stesso punto, definiti rispettivamente in base alle (6) (e indicati con $T^{\alpha\beta}$ e $N_{\gamma\delta}$) o alle (6') ($T'^{\alpha\beta}$ e $N'_{\gamma\delta}$) hanno le espressioni:

$$T^{\alpha\beta} = a_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} \frac{\partial x^\nu}{\partial \eta}, \quad N_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} \frac{\partial x^\nu}{\partial \eta}; \quad T'^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\sigma\alpha\beta} F_{/\sigma} G_{/\sigma}, \quad N'_{\gamma\delta} = a_{\gamma\delta}^{\alpha\sigma} F_{/\sigma} G_{/\sigma}.$$

Tra le funzioni x^α (ξ, η) e le funzioni $F(x^\alpha)$ e $G(x^\alpha)$ valgono certe relazioni finite e differenziali: ci basta mettere in rilievo che la $F=0$ e la $G=0$ sono identicamente soddisfatte se le x^α sono espresse in funzione delle ξ e η , mentre le componenti $T^{\alpha\beta}$ sono proporzionali alle $T'^{\alpha\beta}$, e le $N_{\gamma\delta}$ sono proporzionali alle $N'_{\gamma\delta}$; infine l'espressione di tali componenti rende evidente la totale perpendicolarità tra il bivettore tangente e il bivettore normale (i quali individuano due piani, aventi a comune il solo punto Π).

Se i parametri ξ e η sono interpretati come coordinate cartesiane ortogonali dei punti del piano (ξ, η), che denominerò «piano dei parametri»⁽¹⁵⁾, a ogni punto P del campo C corrisponde un punto Π di Γ , e a ogni punto di l corrisponde un punto del contorno λ di Γ : corrispondenza biunivoca, essendosi supposta di caratteristica 2 la matrice funzionale delle x^α rispetto alle ξ e η .

Per lavoro di un tensore doppio emissimetrico $V_{\alpha\beta}$ sulla Γ s'intende l'integrale superficiale:

$$(7) \quad L = \int_{\Gamma} V_{\alpha\beta} [dx^\alpha, dx^\beta] = \frac{1}{2} \int_C V_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} d\xi d\eta.$$

Se il tensore in oggetto è il tensore elettromagnetico (semplice o no) è noto⁽¹⁶⁾ che, in base alla prima delle (4), si può asserire che è nullo il lavoro di $F_{\alpha\beta}$ su qualsiasi superficie chiusa dello spazio-tempo.

Se calcoliamo il lavoro su Γ del bivettore elettromagnetico, cioè del tensore semplice (4'), allora la (7) diventa:

$$(7') \quad L = \frac{1}{2} \int_C (f_{/\alpha} g_{/\beta} - f_{/\beta} g_{/\alpha}) \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial x^\beta}{\partial \eta} - \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta.$$

L'ipotesi che il differenziale $\varphi_\alpha dx^\alpha$ non sia esatto, ma ammetta un fattore integrante, reca come ovvia conseguenza che la matrice funzionale della coppia di scalari potenziali f e g rispetto alle x^α sia di caratteristica 2. Le proprietà dei determinanti funzionali⁽¹⁷⁾ permettono di interpretare l'espressione sotto il

(15) L'ipotesi che le coordinate ξ e η siano cartesiane ortogonali è comoda ma non è essenziale; è essenziale assumere f e g come coordinate cartesiane, ma potrebbero anche essere non ortogonali.

(16) Cfr. B. FINZI, loc. cit. (8), pp. 206-207. Per la definizione di lavoro di un tensore, e per i legami con gli invarianti integrali di Poincaré e le forme differenziali a moltiplicazione esterna di Cartan, cfr. ivi, e inoltre Nota A, form. (8') e (8''), p. 21, Nota C, form. (13) e (13'). La parentesi quadra qui usata nella form. (7) indica prodotto esterno di due distinti vettori elementari tangenti alla Γ .

(17) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loc. cit. (12), pp. 9-21; È. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, Paris (1943) vol. I, pp. 124-129, 308-314. Si debbono naturalmente prendere le cautele consuete (suddivisione in campi parziali, ecc.) relative al segno di D (segno che è legato alle orientazioni dei vari campi C, C', Γ), e alle condizioni di regolarità.

segno integrale (7') come determinante funzionale D della coppia (f, g) rispetto alla coppia (ξ, η) . Se si interpretano gli scalari f e g come coordinate cartesiane ortogonali dei punti di un piano, che possiam chiamare «piano dei potenziali», a ogni punto Π del campo superficiale Γ corrisponde un punto P' di un campo C' del piano (f, g) , e altrettanto può dirsi per la corrispondenza tra i punti dei rispettivi contorni λ e λ' . Il supporre $D \neq 0$ equivale a porre una corrispondenza biunivoca tra i punti P e P' , e possiam scrivere (ricordando le formule di trasformazione degli integrali doppi)

$$(7'') \quad L = \int_C D \, d\xi \, d\eta = \int_{C'} df \, dg \quad \text{ove} \quad D = \frac{d(f, g)}{d(\xi, \eta)}.$$

Risulta così dimostrato che il lavoro del bivettore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ su una Γ aperta eguaglia l'area del campo C' (del piano dei potenziali) i cui punti corrispondono ai punti della superficie Γ .

Una conferma di questa conclusione vien data dalla formula di Stokes ⁽¹⁸⁾

$$(8) \quad L = \int_{\Gamma} F_{\alpha\beta} [dx^\alpha, dx^\beta] = - \oint_{\lambda} \varphi_\alpha dx^\alpha = \oint_{\lambda'} f dg = - \oint_{\lambda'} g df = \frac{1}{2} \oint_{\lambda'} (f dg - g df)$$

da cui risulta evidente, inoltre, che il lavoro L dipende solo dal contorno λ : il lavoro non muta se, al posto di calcolarlo sulla Γ , lo calcoliamo su una $\bar{\Gamma}$ che abbia lo stesso contorno λ .

Osservazione: aggiungere a f e g delle costanti equivale a spostare l'origine degli assi coordinati, e in questo modo non muta l'area di C' ; come in generale non muta il lavoro per tutte le trasformazioni di coordinate che lascino immutata l'area di C' .

È evidente l'analogia tra le proprietà precedenti e quelle, che possiam dire classiche, riguardanti il comportamento di un vettore in $S_{(3)}$: se x^i sono le coordinate di un punto, per lavoro di un vettore posizionale \boldsymbol{v} lungo una linea c si intende l'integrale curvilineo, somma dei lavori elementari $\boldsymbol{v} \times dP$. Se supponiamo il vettore \boldsymbol{v} irrotazionale, esso ammette una funzione potenziale $\psi = \psi(x^i)$ della quale è il gradiente, e il lavoro lungo l'arco c eguaglia la differenza tra i valori della ψ nei punti estremi A_1 e A_0 . Interpretati i valori della ψ come ascisse dei punti di una retta orientata, il lavoro è la lunghezza $\psi_1 - \psi_0$ del segmento $A_1 A_0$; lunghezza che non varia se si sposta l'origine dell'asse delle ascisse, perchè la ψ è definita a meno d'una costante addittiva. Inoltre il lavoro, dipendendo solo dai valori della ψ nei punti estremi A_1 e A_0 , è nullo per qualsiasi curva chiusa, ed è lo stesso per due curve c e \bar{c} aventi i medesimi punti estremi.

(18) Cfr. Nota C, form. (14'); tale legame tra il lavoro del tensore elettromagnetico e la circolazione del vettore potenziale, vale indipendentemente dal verificarsi della condizione che $F_{\alpha\beta}$ sia un bivettore; invece per poter passare dalla form. (7) alla (7') o alla (7'') o agli ultimi membri della (8) è essenziale che il tensore elettromagnetico abbia l'espressione (4').

§ 3. CONDIZIONI AFFINCHÉ SIA Nullo IL LAVORO SU UNA SUPERFICIE APERTA. - La ricerca delle condizioni affinché il lavoro del bivettore $F_{\alpha\beta}$ sia nullo, senza che Γ sia una superficie chiusa, si traduce nella ricerca delle varietà (con meno di quattro dimensioni) sulle quali sia $D = 0$, senza che siano di caratteristica minore di 2 le matrici funzionali delle x^α rispetto a ξ e η , e delle f e g rispetto alle x^α , cioè senza che entro $R_{(4)}$, o entro regioni parziali quadridimensionali di $R_{(4)}$, sia identicamente $D = 0$. È facile rilevare che si soddisfa all'equazione $D = 0$ stabilendo tra f e g un legame funzionale, indipendente da ξ e η . Le Γ su cui $L = 0$ si possono allora definire come intersezioni dell'ipersuperficie

$$(9) \quad F(x^\alpha) \equiv \Phi\{f(x^\alpha), g(x^\alpha)\} = 0$$

ove Φ è funzione regolare, arbitraria, di f e di g , con un'altra ipersuperficie

$$(9') \quad G(x^\alpha) = 0$$

ove G è funzione regolare delle x^α , arbitraria, ma del tutto indipendente dalla f e dalla g (cioè, in sostanza, dal campo elettromagnetico).

Le ipersuperfici $\Phi = 0$ possono ben denominarsi *equipotenziali*: equipotenziali non in quanto su di esse si mantenga costante il vettore φ_α o si mantengano costanti i due scalari f e g , ma perchè esse si comportano, nei riguardi del bivettore (4'), nello stesso modo che le superfici equipotenziali, di equazione $\psi = \text{cost.}$, nei riguardi del vettore $v = \text{grad } \psi$. Le ipersuperfici suddette costituiscono una infinità *non* numerabile, in quanto corrispondono alle curve che si possono arbitrariamente tracciare sul piano (f, g).

Possiamo concludere che *il lavoro del bivettore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ è nullo su ogni superficie aperta interamente contenuta entro una ipersuperficie equipotenziale, d'equazione (9).*

In tali circostanze il campo C' del piano (f, g) degenera in un arco di linea d'equazione (9), e appare ben chiaro che l'area risulta nulla. Se, in particolare, prendiamo una superficie Ω definita dall'intersezione di due diverse ipersuperfici equipotenziali, allora su Ω f e g hanno valori costanti e il campo C' degenera addirittura in un punto: nullo quindi è il lavoro di $F_{\alpha\beta}$.

Dal punto di vista geometrico, bisogna tener presente che le ipersuperfici equipotenziali (9) godono della proprietà che il bivettore $F_{\alpha\beta}$ è *almeno* semiperpendicolare a ogni Γ in esse immersa. Più dettagliatamente, se la superficie Γ è definita come intersezione di una $F \equiv \Phi$ con una G generica, allora il bivettore (4') è semiparallelo al bivettore $N'^{\gamma\delta}$ normale a Γ ; i due bivettori (4') e $T'^{\alpha\beta}$ sono semiperpendicolari perchè, con facili passaggi, si trova $1/2 F_{\alpha\beta} T'^{\alpha\beta} = 0$. Se la superficie è una Ω (intersezione di due ipersuperfici equipotenziali d'equazione (9)), allora si riconosce che il bivettore (4') è totalmente perpendicolare alla stessa, perchè oltre ad esser nullo il prodotto interno $1/2 F_{\alpha\beta} T'^{\alpha\beta}$, si verifica facilmente che son nulli i quattro prodotti interni di ognuno dei fattori di $F_{\alpha\beta}$ con ognuno dei fattori di $T'^{\alpha\beta}$: è questa la proprietà geometrica che caratterizza le Ω , e le distingue tra le Γ . Le Ω sono denominate da E. T. Whittaker *superfici elettropotenziali*, in quanto si riducono alle ordinarie superfici equipotenziali del vettore

spaziale **E** se il campo è elettrostatico ⁽¹⁹⁾. Pur non essendo nulle le componenti del bivettore (4') nel riferimento (1), son nulle le componenti dello stesso sulle superfici Γ e Ω .

Le proprietà del bivettore elettromagnetico, ora dimostrate, sono analoghe alle seguenti, relative ad un vettore posizionale \mathbf{v} irrotazionale in $S_{(3)}$: il lavoro di \mathbf{v} è nullo su una generica curva c giacente su una superficie equipotenziale d'equazione $\psi = \text{cost.}$, o su una curva \bar{c} avente gli estremi su una tale superficie equipotenziale; una curva c su una superficie equipotenziale può esser definita come intersezione della superficie $\psi = \text{cost.}$ con una superficie generica, la cui equazione sia indipendente dalle componenti di \mathbf{v} ; le superfici equipotenziali sono tali che le componenti cartesiane della proiezione di \mathbf{v} su di esse son nulle, pur non essendo nulle le componenti cartesiane del vettore stesso.

C'è però una differenza di rilievo, corrispondente al fatto che in $R_{(4)}$ si può distinguere tra *totale* e *semi*-perpendicolarità, mentre in $S_{(3)}$ due enti geometrici possono essere perpendicolari in un sol modo: in $S_{(3)}$ due superfici equipotenziali non possono avere punti a comune, perchè se ne avessero anche uno solo esse sarebbero due porzioni di una stessa superficie o addirittura verrebbero a coincidere; in $R_{(4)}$ invece due ipersuperfici equipotenziali si possono incontrare, e se si incontrano la loro intersezione è (in generale e, beninteso, in condizioni di regolarità) una superficie elettropotenziale Ω .

Se è nullo L , per effetto della (8) risulta che è nulla la circolazione del vettore φ^α lungo ogni linea λ chiusa costituente il contorno di una superficie Γ immersa in una ipersuperficie equipotenziale, ed è quindi nulla la circolazione del potenziale φ^α lungo ogni linea λ che sia immersa in una ipersuperficie equipotenziale. Risulta anche che il lavoro del bivettore $F_{\alpha\beta}$ è nullo, oltre che su ogni Γ immersa in una ipersuperficie equipotenziale, su ogni $\bar{\Gamma}$ avente il solo contorno su una ipersuperficie equipotenziale (con la differenza che su Γ è nullo ogni lavoro elementare, mentre su $\bar{\Gamma}$ è nulla solo l'espressione integrale (7')).

§ 4. IL CAMPO ELETTROMAGNETICO NEUTRO. — La definizione di coniugio che lega il bivettore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ al magnetoelettrico ${}^*F^{\gamma\delta}$, si presta a un'interpretazione geometrica ($F_{\alpha\beta}$ e ${}^*F^{\gamma\delta}$ giacciono in due piani totalmente perpendicolari), reca come conseguenza un legame differenziale (se $F_{\alpha\beta}$ è irrotazionale, ${}^*F^{\gamma\delta}$ è solenoidale) e un legame integrale (il lavoro di $F_{\alpha\beta}$ coincide col flusso di ${}^*F^{\gamma\delta}$) ⁽²⁰⁾. Possiamo senz'altro concludere che le ipersuperfici equipotenziali per $F_{\alpha\beta}$ sono ipersuperfici di flusso per ${}^*F^{\gamma\delta}$, cioè che attraverso ogni Γ immersa in una ipersuperficie (9) è nullo il flusso di ${}^*F^{\gamma\delta}$.

Il campo elettromagnetico è neutro quando son nulle le quattro componenti J^α del vettore **J**, vale a dire in assenza di correnti e di cariche elettriche. Le (4) vengono allora ad esprimere che il bivettore $F_{\alpha\beta}$, oltre ad essere irrotazionale, è anche solenoidale: da esse si deduce in tal caso che, oltre ad essere

(19) Cfr. E. T. WHITTAKER, loc. cit. (5), p. 6.

(20) Cfr. Nota A, form. (10) a p. 24; Nota C, corollario f). Si potrebbero altrimenti costruire le linee di flusso per un vettore, scelto tra i fattori di ${}^*F^{\gamma\delta}$, e mediante tali linee costruire poi le ipersuperficie, in base all'Osservazione II del n. 5 della Nota C.

nullo il lavoro di $F_{\alpha\beta}$ su qualsiasi superficie chiusa dello spazio-tempo, è nullo anche il flusso di $F_{\alpha\beta}$ attraverso qualsiasi superficie chiusa dello spazio-tempo ⁽²¹⁾.

In tali circostanze, possiamo costruire le ipersuperfici di flusso per $F_{\alpha\beta}$ (che sono le ipersuperfici equipotenziali del suo coniugato $*F_{\gamma\delta}$) ripetendo, per il bivettore irrotazionale magnetoelettrico, considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nei §§ 2 e 3. Tra le superfici contenute nelle ipersuperfici equipotenziali di $*F_{\gamma\delta}$, hanno particolare importanza quelle, $*\Omega$, il cui bivettore $*N_{\gamma\delta}$ è parallelo a $*F_{\gamma\delta}$: sono queste le *superfici magnetopotenziali* di E. T. Whittaker, così chiamate in quanto si riducono alle ordinarie superfici equipotenziali del vettore spaziale \mathbf{H} se il campo è magnetostatico. Dalla totale perpendicolarità tra i due bivettori $F_{\alpha\beta}$ e $*F_{\gamma\delta}$, e dalla semiperpendicolarità di essi con le varie superfici, o dal semiparallelismo, scendono facilmente le proprietà riguardanti gli angoli sotto cui si incontrano le superfici elettropotenziali con le magnetopotenziali, e gli angoli sotto cui si incontrano le ipersuperfici equipotenziali di $F_{\alpha\beta}$ con le equipotenziali di $*F_{\gamma\delta}$ ⁽²²⁾.

Astrofisica. — *Periodo e curva di luce della stella variabile IV Cygni.* Nota di GIUSEPPE MANNINO, presentata ^(*) dal Socio G. SILVA.

La variabile IV Cygni apparve per la prima volta nel n. 10 delle Kleinere Veröffentlichungen der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg (KVBB) come probabile lungo periodica di grandezza fotografica variabile 14^m.0 e 15^m.0. Successivamente, in seguito ad una comunicazione di P. Anher⁽¹⁾, dal 1939 in poi, risulta, nello stesso KVBB e nel recente catalogo di Kukarkin e Parenago, come probabile Cefeide a corto periodo di grandezza fotografica variabile tra 14^m.0 e 15^m.0.

Le osservazioni di cui si dà qui notizia consistono in 109 determinazioni della grandezza fotografica di detta variabile. Per le fotografie, prese dallo scrivente al fuoco newtoniano del riflettore da 120 cm. dell'Osservatorio astrofisico di Asiago, sono state usate lastre Ferrania normali ultra sensibili (etichetta bleu), la cui massima sensibilità cade in prossimità di $\lambda = 4565 \text{ \AA}$.

(21) Per le proprietà del campo neutro cfr. B. FINZI, loc. cit. (8), pp. 210-211; la presente proprietà, relativa all'annullarsi del flusso del tensore elettromagnetico attraverso qualsiasi superficie chiusa, è un semplice corollario del teorema g) della Nota C, in cui si stabiliva il legame tra il flusso di J^a attraverso una ipersuperficie σ e il flusso di $F_{\alpha\beta}$ attraverso il contorno chiuso ω di tale ipersuperficie.

(22) Definiti, come al n. 6 della Nota C, il lavoro di un tensore doppio emisimmetrico lungo una ipersuperficie (lavoro che è dato da un vettore) e il flusso di un tensore doppio emisimmetrico attraverso una ipersuperficie (anch'esso un vettore), è evidente come si possa anche per essi effettuare, sulla traccia di quanto è dimostrato nelle pagine precedenti, la ricerca delle varietà equipotenziali, o di flusso.

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) KVBB n. 24 (1939).

Le stelle di confronto, indicate in fig. 1 con lettere latine minuscole, sono state scelte nelle immediate vicinanze della variabile; le loro grandezze fotografiche sono state determinate mediante tre confronti polari indipendenti, due semplici (stella-polo) ed uno doppio (polo-stella-polo), eseguiti in notti astronomicamente ottime; le tre lastre relative al doppio confronto polare sono state prese da uno stesso pacco ed hanno subito l'identico trattamento di sviluppo e fissaggio; ciascuno dei due confronti polari semplici è stato eseguito su una unica lastra, fotografando su una metà la sequenza polare e sull'altra metà il campo della variabile (di volta in volta la metà non usata è stata occultata mediante una apposita mascherina applicata allo chassis e quasi a contatto della gelatina). Tutte le lastre relative ai confronti sono state misurate al fotometro fotoelettrico di Zeiss.



Fig. 1.

Nel fare la media, per ciascuna stella di confronto, delle tre indipendenti grandezze fotografiche determinate, peso doppio è stato dato alle grandezze provenienti dal doppio confronto polare; le grandezze concluse, con i rispettivi errori medi, sono le seguenti:

$$a = 13.47 \pm 0.05$$

$$b = 13.75 \pm 0.05$$

$$c = 14.24 \pm 0.06$$

$$d = 14.28 \pm 0.06$$

$$e = 14.60 \pm 0.05$$

$$f = 14.78 \pm 0.05$$

$$g = 14.93 \pm 0.08$$

La grandezza fotografica della variabile su ciascuna lastra è stata determinata mediante due stime ad occhio delle quali è stata poi fatta la media. Per eseguire dette stime è stato usato il microscopio del misuratore di lastre « Mioni » con un oculare da 10 ingrandimenti, l'ordine delle lastre è stato completamente sfasato,

TABELLA I.

| n. | lastra | giorno giuliano eliocentrico | fase | mph | n. | lastra | giorno giuliano eliocentrico | fase | mph |
|----|--------|------------------------------------|-------|-------|-----|--------|------------------------------------|-------|-------|
| | | 2433.... | | | | | 2433.... | | |
| 1 | 793 | 118.480 | 0.976 | 14.02 | 56 | 1205 | 479.363 | 0.349 | 14.60 |
| 2 | 794 | .513 | .075 | 13.87 | 57 | 1206 | .376 | .388 | 14.67 |
| 3 | 796 | 119.413 | .767 | 14.82 | 58 | 1207 | .387 | .421 | 14.69 |
| 4 | 797 | .442 | .853 | 14.83 | 59 | 1208 | .401 | .463 | 14.62 |
| 5 | 798 | .472 | .943 | 14.45 | 60 | 1209 | .418 | .514 | 14.61 |
| 6 | 799 | .495 | .012 | 13.57 | 61 | 1215 | .536 | .867 | 14.85 |
| 7 | 800 | .522 | .093 | 13.68 | 62 | 1216 | .545 | .894 | 14.84 |
| 8 | 801 | .588 | .200 | 14.10 | 63 | 1217 | .554 | .920 | 14.53 |
| 9 | 802 | .583 | .275 | 14.27 | 64 | 1218 | .563 | .947 | 14.15 |
| 10 | 806 | 126.492 | .939 | 14.53 | 65 | 1219 | .571 | .971 | 13.91 |
| 11 | 807 | .518 | .017 | 13.78 | 66 | 1220 | .577 | .989 | 13.55 |
| 12 | 808 | .538 | .077 | 13.70 | 67 | 1221 | .585 | .013 | 13.64 |
| 13 | 813 | 129.430 | .727 | 14.77 | 68 | 1222 | .598 | .052 | 13.66 |
| 14 | 814 | .453 | .795 | 14.81 | 69 | 1227 | 484.477 | .645 | 14.76 |
| 15 | 815 | .475 | .861 | 14.83 | 70 | 1228 | .491 | .687 | 14.85 |
| 16 | 816 | .508 | .960 | 14.13 | 71 | 1229 | .501 | .717 | 14.69 |
| 17 | 818 | .575 | 1.60 | 14.06 | 72 | 1230 | .513 | .752 | 14.81 |
| 18 | 833 | 134.579 | .127 | 14.02 | 73 | 1231 | .533 | .812 | 14.82 |
| 19 | 834 | .600 | .190 | 14.06 | 74 | 1232 | .543 | .842 | 14.83 |
| 20 | 856 | 166.357 | .172 | 14.06 | 75 | 1233 | .552 | .869 | 14.85 |
| 21 | 857 | .380 | .241 | 14.19 | 76 | 1234 | .561 | .896 | 14.71 |
| 22 | 858 | .410 | .331 | 14.40 | 77 | 1261 | 496.342 | .132 | 14.02 |
| 23 | 859 | .434 | .403 | 14.65 | 78 | 1262 | .350 | .156 | 14.10 |
| 24 | 860 | .460 | .481 | 14.82 | 79 | 1263 | .358 | .180 | 14.13 |
| 25 | 1161 | 440.409 | .841 | 14.82 | 80 | 1264 | .374 | .228 | 14.22 |
| 26 | 1162 | 443.419 | .843 | 14.83 | 81 | 1269 | 562.424 | .778 | 14.88 |
| 27 | 1163 | .444 | .918 | 14.42 | 82 | 1270 | .432 | .802 | 14.88 |
| 28 | 1164 | .469 | .993 | 13.66 | 83 | 1271 | .442 | .832 | 14.88 |
| 29 | 1165 | .493 | .065 | 13.79 | 84 | 1272 | .450 | .856 | 14.86 |
| 30 | 1166 | .515 | .131 | 14.10 | 85 | 1273 | .465 | .901 | 14.79 |
| 31 | 1167 | .539 | .202 | 14.13 | 86 | 1274 | .472 | .922 | 14.42 |
| 32 | 1171 | 467.389 | .536 | 14.67 | 87 | 1275 | .484 | .958 | 14.06 |
| 33 | 1172 | .413 | .608 | 14.72 | 88 | 1276 | .497 | .997 | 13.66 |
| 34 | 1175 | .480 | .808 | 14.80 | 89 | 1277 | .510 | .035 | 13.69 |
| 35 | 1176 | .505 | .883 | 14.82 | 90 | 1278 | .515 | .050 | 13.69 |
| 36 | 1177 | .530 | .958 | 14.89 | 91 | 1280 | 594.311 | .150 | 14.10 |
| 37 | 1178 | .553 | .026 | 13.70 | 92 | 1282 | 601.221 | .817 | 14.87 |
| 38 | 1179 | .577 | .098 | 13.70 | 93 | 1283 | .228 | .838 | 14.88 |
| 39 | 1180 | 468.442 | .685 | 14.79 | 94 | 1284 | .234 | .856 | 14.88 |
| 40 | 1181 | .461 | .742 | 14.83 | 95 | 1285 | .239 | .871 | 14.83 |
| 41 | 1183 | 471.384 | .485 | 14.68 | 96 | 1286 | .243 | .883 | 14.85 |
| 42 | 1184 | .445 | .667 | 14.81 | 97 | 1287 | .249 | .901 | 14.79 |
| 43 | 1185 | .459 | .709 | 14.75 | 98 | 1288 | .308 | .077 | 14.02 |
| 44 | 1186 | 472.421 | .586 | 14.69 | 99 | 1289 | .314 | .095 | 13.98 |
| 45 | 1187 | .438 | .637 | 14.85 | 100 | 1290 | .318 | .107 | 13.95 |
| 46 | 1188 | .454 | .685 | 14.80 | 101 | 1291 | .323 | .122 | 14.10 |
| 47 | 1189 | .471 | .736 | 14.74 | 102 | 1292 | .329 | .140 | 14.10 |
| 48 | 1190 | .487 | .784 | 14.82 | 103 | 1293 | .340 | .173 | 14.27 |
| 49 | 1191 | .503 | .831 | 14.83 | 104 | 1294 | .353 | .212 | 14.34 |
| 50 | 1192 | .519 | .879 | 14.87 | 105 | 1295 | .362 | .239 | 14.42 |
| 51 | 1193 | .535 | .927 | 14.45 | 106 | 1296 | .369 | .260 | 14.47 |
| 52 | 1194 | .551 | .975 | 13.68 | 107 | 1297 | .378 | .287 | 14.45 |
| 53 | 1195 | .568 | .026 | 13.85 | 108 | 1298 | .386 | .311 | 14.51 |
| 54 | 1196 | .584 | .074 | 13.73 | 109 | 1299 | .395 | 0.337 | 14.63 |
| 55 | 1201 | 478.511 | 0.801 | 14.89 | — | — | — | — | — |

e tra una stima e l'altra sulla medesima lastra è sempre trascorso qualche giorno. Nei pochissimi casi in cui le due stime non concordavano una terza stima è stata effettuata. Le grandezze concluse della variabile sono riportate in tabella I che riporta anche, nelle successive colonne, un numero d'ordine, il numero della lastra, l'epoca eliocentrica espressa in giorni giuliani e la fase in frazioni di periodo.

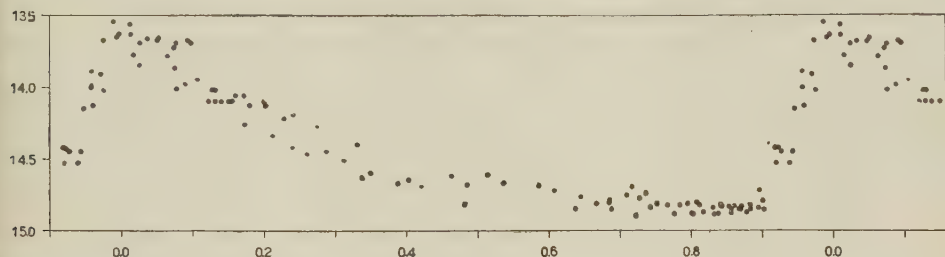


Fig. 2.

Il periodo determinato mediante il metodo suggerito da W. J. Miller⁽²⁾, è risultato di giorni 0.334345. Le epoche dei massimi possono essere calcolate a mezzo della formula $JJ_M = 2433118.488 \pm 0.334345 E$. In fig. 2 sono riportate le singole osservazioni, ridotte alla stessa fase; il grafico ha come ascisse la fase in frazioni di periodo e come ordinata la grandezza fotografica. Si rileva subito che la variazione luminosa è del tipo RR Lyrae ed avviene tra le grandezze fotografiche 13.60 e 14.85.

Fisica. — *Diffrazione dei raggi X nei miscugli alcool etilico-benzolo.* Nota di FRANCESCO CENNAMO, presentata^(*) dal Socio A. CARRELLI.

Utilizzando il metodo classico del pennellino incidente su di una vaschetta si è studiata la diffrazione dei raggi X in liquidi puri ed in miscugli. Le lastre fotografiche sono state tarate in modo che si potesse passare, per ciascun liquido o miscuglio esaminato, dalle curve di distribuzione dell'annerimento a quelle dell'intensità. Il metodo impiegato per tale taratura, che sarà descritto nei suoi dettagli altrove, permette il confronto fra le varie curve d'intensità ottenute per le diverse sostanze. La radiazione usata è la K_α del Cu, e si è ottenuta la monocromatizzazione del fascio incidente mediante filtro di Ni. I liquidi studiati sono il benzolo e l'alcool etilico nonché alcuni loro miscugli, per le seguenti concentrazioni molecolari, in cui f_1 rappresenta la concentrazione del C_6H_6 e f_2 quella del C_2H_5OH

$$f_1 = 100 \div f_2 = 0 \quad ; \quad f_1 = 72,7 \div f_2 = 27,3 \quad ; \quad f_1 = 66,7 \div f_2 = 33,3 ;$$

$$f_1 = 52,7 \div f_2 = 46,3 \quad ; \quad f_1 = 40 \div f_2 = 60 \quad ; \quad f_1 = 38,7 \div f_2 = 61,3 ;$$

$$f_1 = 28,8 \div f_2 = 71,2 \quad ; \quad f_1 = 0 \div f_2 = 100.$$

(2) *Ricerche Astronomiche della Specola Astronomica Vaticana*, vol. I, n. 12 (1946).

(*) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

Fatti i calcoli relativi si sono ottenute per i liquidi anzidetti le distribuzioni d'intensità in funzione di $d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta/2}$ ed alcune di queste curve sono riportate

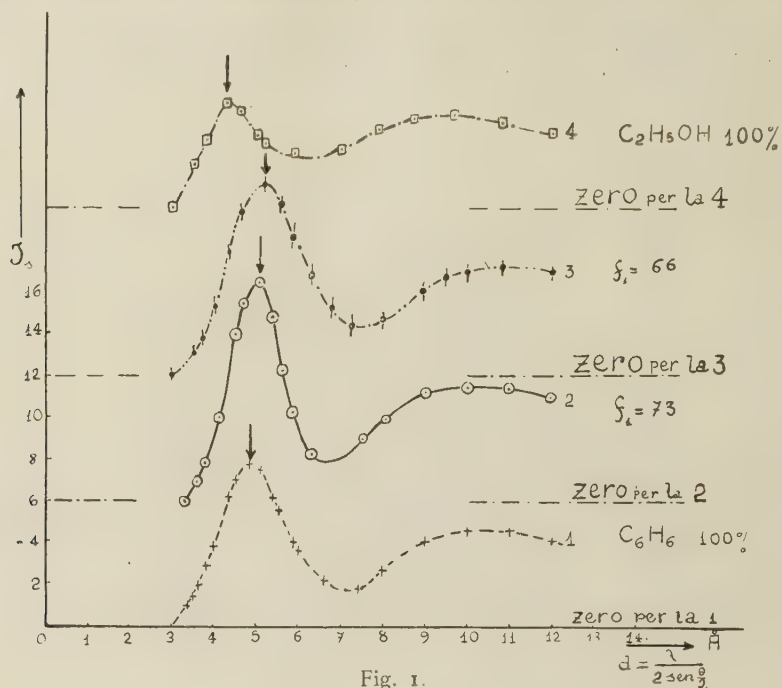


Fig. 1.

nella fig. 1. Come vedesi si ottengono in tutti i casi due massimi (e quasi sempre gli stessi trovati da altri sperimentatori). L'interpretazione dei due massimi per il benzolo non è assolutamente sicura ⁽¹⁾, per l'alcool ⁽²⁾ può con una certa sicurezza

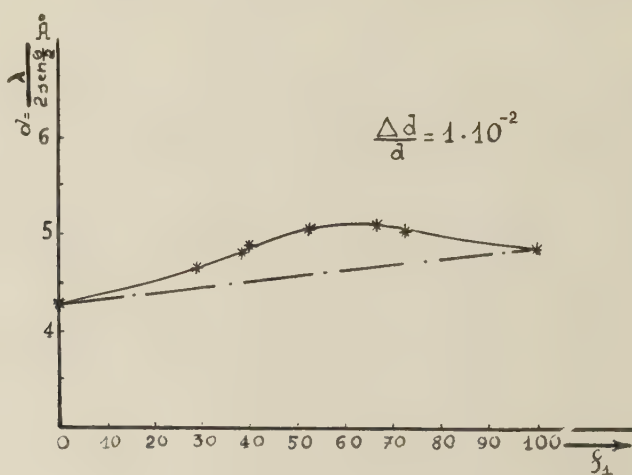


Fig. 2.

(1) KRISHANAMURTI, «Ind. Journ. Phys.», 3, 225 (1929); G. W. STEWART, «Phys. Rev.», 33, 889 (1929).

(2) G. V. STEWART, R. M. MORROV, «Phys. Rev.», 30, 232 (1927).

ritenersi che quello a $4,5 \text{ \AA}$ corrisponde al diametro trasversale della molecola (supposta allungata) e l'altro, a circa $8,5 \text{ \AA}$, alla lunghezza della molecola. La posizione, specie del primo massimo, varia al variare della composizione del miscuglio e l'andamento di questo è riportato in fig. 2. Questa curva contiene le misure relative a tutti i miscugli studiati. Come vedesi non si ha una legge di addittività e la massima variazione si ha per il miscuglio, che è anche anomalo per ciò che riguarda la polarizzabilità ($f_1 = 66,6 \div f_2 = 33,3$).

Analogamente nella fig. 3, curva 1, sono riportate le intensità misurate in corrispondenza del massimo in funzione di f_1 , ed anche qui la legge con cui varia l'intensità del massimo in funzione delle concentrazioni molecolari non è lineare e la più grande deviazione dalla legge di addittività si ha per il miscuglio suddetto

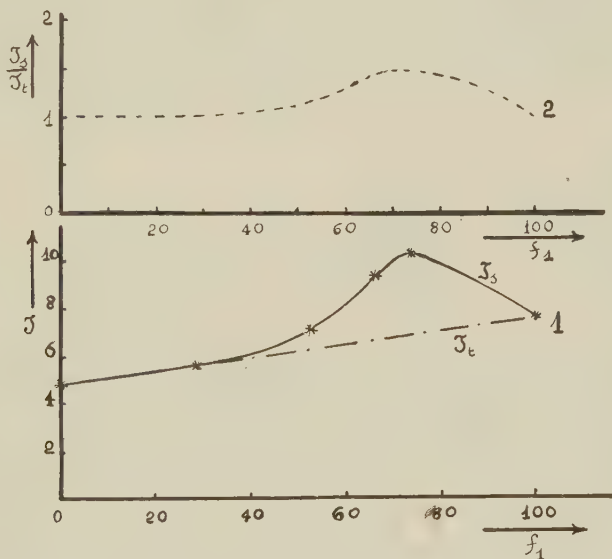


Fig. 3.

(vedi anche curva 2 fig. 3, sulle cui ordinate sono riportati i rapporti tra le intensità misurate e le intensità che si dovrebbero ottenere se l'andamento fosse lineare).

Ora com'è noto, l'interpretazione che può darsi agli aloni di diffrazione dei liquidi è quella di considerarli, fra l'altro, dipendenti da raggruppamenti di limitate estensioni di molecole quasi-ordinate (ipotesi cibotattica). Nel caso dei miscugli se si ha una deviazione dalla legge di addittività per ciò che riguarda l'intensità ciò significa evidentemente che è variato il numero dei raggruppamenti cibotattici.

Ora questi raggruppamenti, essendo a e b i componenti del miscuglio, possono essere di tipo (a e b) oppure (ab). Nel nostro caso (e cioè miscugli alcool-benzolo) si hanno altri elementi che possono forse lumeggiare la questione.

Infatti da ricerche precedenti sull'andamento della luce Raman nelle immediate vicinanze della riga eccitatrice nei miscugli alcool-benzolo, si è potuto stabilire che il continuo, caratteristico del benzolo puro, aumenta anziché diminuire col dimi-

nuire del numero di molecole di benzolo presenti, fino a raggiungere un massimo in corrispondenza del miscuglio al 66 % di benzolo (3).

D'altra parte Gross e Vuks (4) hanno studiato l'effetto Raman in cristalli di benzolo e nelle immediate vicinanze della riga eccitatrice hanno trovato un gruppo di righe Raman, numerose e sfumate, le quali quando la sostanza passa allo stato liquido si allargano ancora di più dando origine al continuo suddetto. Queste frequenze sarebbero dovute, secondo gli Autori, a legami intermolecolari del tutto definiti nel caso del solido e non perfettamente tali nel liquido. L'aumento notevole del continuo da noi riscontrato in effetto Raman in corrispondenza del miscuglio col 66 % di benzolo dimostra anche che tali legami fra le molecole del benzolo sono in certo modo aumentati per effetto della presenza dell'alcool e cioè di un liquido polare.

Anche le intensità delle righe Raman caratteristiche del benzolo risentono della presenza di molecole di alcool (5): infatti, mentre le intensità delle righe

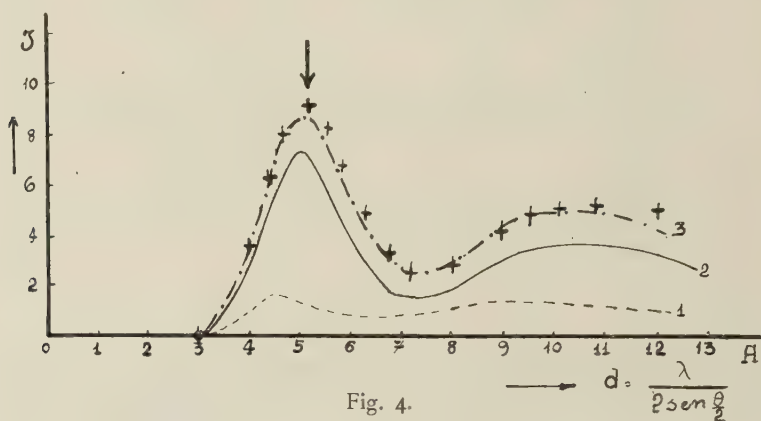


Fig. 4.

Raman caratteristiche dell'alcool variano nei miscugli citati con legge pressoché lineare, le righe Raman caratteristiche dell'anello benzenico presentano tutte uno scarto dalla proporzionalità rispetto al numero delle particelle presenti, e questo scarto è massimo anch'esso in corrispondenza del miscuglio con 66 % di benzolo. Questi risultati evidentemente dimostrano che la presenza delle molecole di alcool fa aumentare il numero di quei raggruppamenti che sono responsabili del continuo in effetto Raman, ed è forse ammissibile ritenere che questi raggruppamenti siano gli stessi di quelli che danno luogo agli aloni di diffrazione riscontrati nei raggi X.

A conferma di tale ipotesi la curva 3 della fig. 4, dà la distribuzione teorica delle intensità di un miscuglio benzolo-alcool etilico ($f_1 = 66,6$; $f_2 = 33,3$). Tale curva è stata ottenuta sommando le ordinate corrispondenti alle curve 1) e 2) della stessa figura, essendo la 1) la curva di distribuzione di intensità ottenuta sperimentalmente per l'alcool (fig. 1, curva 4) ma le cui ordinate sono state

(3) A. CARRELLI, F. CENNAMO, «N. Cimento», A. XIV n. 5, p. 217 (1937).

(4) GROSS e VUKS, «Journal de Physique», 6, 457 (1935).

(5) F. CENNAMO, E. VITALE, «N. Cimento», A. XIII, p. 465 (1936)

moltiplicate per il fattore 0,33 (percento di molecole di C_2H_5OH presenti nel miscuglio) e la 2) invece la curva di distribuzione delle intensità ottenute per il benzolo (fig. 1, curva 1) e le cui ordinate sono state moltiplicate per il fattore $0,66 \times 1,5$ (0,66 è il percento di molecole di C_6H_6 presenti nel miscuglio, ed 1,5 il valore del rapporto J_s/I_s ricavato per il miscuglio in esame).

Nella curva 3 della stessa figura sono inoltre riportati, nella stessa scala, i valori sperimentali ottenuti per il miscuglio in oggetto ed i risultati appaiono in buon accordo con la curva ottenuta nel modo precedentemente descritto; in base a tale risultato sembrerebbe inoltre che lo spostamento riscontrato nella posizione del massimo (fig. 2) sarebbe da considerare non come dipendente da una effettiva variazione delle distanze reticolari nei raggruppamenti cibotattici, ma da un effetto dovuto alla distribuzione di intensità diversa per i vari miscugli.

Il presente lavoro è stato eseguito nell'Istituto di Fisica Sperimentale dell'Università di Napoli. Si ringrazia vivamente il Prof. Antonio Carrelli, Direttore dell'Istituto, per i mezzi messi a disposizione.

Fisica. — *L'induzione elettromagnetica e il principio di relatività.* Nota di MARIO GALLI, presentata (*) dal Corrisp. L. TIERI.

1. Che il fenomeno dell'induzione elettromagnetica sia conforme al principio di relatività è stato notato fin dai primi osservatori⁽¹⁾. Tuttavia nelle esperienze di questo genere abbiamo sempre a che fare con il moto relativo di due circuiti o di un circuito e un magnete. Ma fenomeni d'induzione possono essere provocati (almeno teoricamente) anche dal moto relativo di una carica elettrica e di un circuito e non sembra che nel caso attuale si conservi quella simmetria che indubbiamente sussiste nelle esperienze consuete. Sorge quindi il dubbio che le leggi ordinarie dell'elettromagnetismo non si armonizzino completamente col principio di relatività. L'obiezione si può formulare in termini concreti nel modo seguente. Sia dato un circuito l che per semplicità supporremo piano ed una carica puntiforme e . Supponiamo inoltre che circuito e carica giacciono e si muovano costantemente nel medesimo piano. Se poniamo il circuito fisso e la carica mobile rispetto ad un sistema di riferimento per cui valgano le equazioni di Maxwell, si concatterà con il circuito un flusso magnetico variabile, poichè la carica in moto genera un campo magnetico, da cui una forza elettromotrice e per conseguenza una corrente. Questo risulta irrefutabilmente dalle leggi più elementari. Ma non appare evidente il contrario. Non sembra cioè che, supponendo la carica fissa e la spira mobile, ne debba conseguire in questa una forza elettromotrice. In questo caso infatti il flusso magnetico concatenato con il circuito è costantemente nullo, quindi le leggi dell'induzione non lasciano prevedere alcuna forza elettromotrice. Questa dissimmetria conseguirebbe non soltanto dalle consuete leggi dell'elettro-

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) « Handbuch der experimental Physik », XI, p. 275.

magnetismo, ma anche dalla teoria della relatività. È stato infatti espressamente affermato: « Le trasformazioni relativistiche confermano che il campo magnetico, e per conseguenza una forza elettromotrice, deve esistere in un caso ma non nell'altro » ⁽²⁾.

Poichè la validità universale o almeno la completezza delle leggi fondamentali dell'elettromagnetismo è stata talvolta revocata in dubbio anche da illustri fisici ⁽³⁾, riteniamo non inutile una breve discussione dell'obiezione.

2. In primo luogo giova premettere che l'esperienza addotta è puramente concettuale non pratica. Così che in ogni caso l'obiezione non può pretendere di mostrare una incongruenza tra principi teorici e risultati sperimentali, ma al più tra i principi stessi. Purtroppo, però questi principi non sono chiaramente indicati, mentre ciò sarebbe necessario, poichè i sistemi di elettrodinamica sono numerosi.

Supponiamo di volere risolvere il problema proposto dal punto di vista del sistema di Lorentz. Trattiamo prima il caso diretto. Supponiamo cioè il circuito fisso nel sistema dell'osservatore e la carica elettrica mobile con velocità costante. Vogliamo calcolare la forza elettromotrice operante nel circuito.

I potenziali elettrodinamici di una carica mobile uniformemente su una retta sono stati ricavati con vari metodi. Nell'ipotesi che la traiettoria coincida con l'asse x , essi sono dati dalle equazioni:

$$(1) \quad \varphi = \frac{e}{[(x-vt)^2 + (1-\beta^2)y^2]^{1/2}}; \quad (2) \quad A = \frac{ev}{[(x-vt)^2 + (1-\beta^2)y^2]^{1/2}}.$$

Queste formule sono valide qualunque sia la velocità v .

Da esse si ricavano i campi E ed H secondo le leggi ben note: ⁽⁴⁾

$$(3) \quad E = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}; \quad (4) \quad H = \text{rot } A.$$

Per calcolare la forza elettromotrice operante nel circuito basta considerare il secondo termine di (3); otteniamo così:

$$(5) \quad F = \oint_s E \times ds = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint_s A \times ds = \frac{ev^2}{c^2} \oint_s \frac{(x-vt)}{[(x-vt)^2 + (1-\beta^2)y^2]^{3/2}} \text{vers } v \times ds$$

Trascurando termini di ordine superiore al secondo in v/c e ponendo $x-vt = X$ si può anche scrivere:

$$(5') \quad F = \frac{ev^2}{c^2} \oint_s \frac{X}{[X^2 + y^2]^{3/2}} \text{vers } v \times ds.$$

In ordine ai nostri scopi interessa notare soprattutto che qui abbiamo una forza elettromotrice diversa da zero ma di second'ordine in v/c .

(2) CULLWICK, « Nature », 161, p. 970.

(3) G. GIORGI, « Nuovo Cimento », IV (1927), p. 1.

(4) FRENKEL, *Lehrbuch der Elektrodynamik*, I, p. 172.

Passando al caso inverso, cioè supponendo la carica fissa nel sistema dell'osservatore ed il circuito mobile con velocità $-v$, non c'è affatto da stupire se l'elettrodinamica di Lorentz non prevede alcuna forza elettromotrice. È ben noto, e ciò fu dimostrato dallo stesso Lorentz, che tale elettrodinamica è relativistica, ma solo a condizione di trascurare termini di second'ordine in v/c .

Se quindi l'obiezione è diretta contro l'elettrodinamica di Lorentz, essa è priva di valore. Nessun fisico ritiene oggi che tale sistema sia esatto. Se si continua ad usarlo è perchè nelle comuni esperienze non si raggiunge mai una precisione così elevata da poter mettere in evidenza termini di second'ordine. Per conseguenza se la pretesa dissimmetria segnalata da Cullwick fosse reale avremmo semplicemente un esempio di più per confermare quello che è già noto, cioè che l'elettrodinamica di Lorentz è relativistica limitatamente al prim'ordine. Niente vi sarebbe da cambiare nelle opinioni correnti.

3. Tuttavia studiando accuratamente il problema, si conclude, almeno con grande probabilità, che tale pretesa dissimmetria non si verifichi, anche giudicando dal punto di vista dell'elettrodinamica di Lorentz. È vero che quando un circuito si muove nel campo di una carica elettrica quiescente, il flusso magnetico concatenato è costantemente nullo, quindi è nulla la forza elettromotrice; ma ciò è vero solo se ci si limita a considerare il campo primario. Tuttavia è chiaro che, se vogliamo essere perfettamente rigorosi, bisogna tenere conto anche del campo secondario. Ed infatti, quando la carica ed il circuito sono rispettivamente fissa ed immobile nel sistema dell'osservatore, dobbiamo fare attenzione al fatto che la carica, per induzione elettrostatica, genera sulla superficie del conduttore mobile una densità elettrica variabile col tempo. Tali cariche d'induzione, per il fatto che il conduttore è mobile, sono capaci di generare un campo magnetico. Come risultato si ha un flusso magnetico concatenato con il circuito mobile variabile col tempo, quindi una forza elettromotrice. Questa spiegazione è molto seducente e considerazioni qualitative assai agevoli, sulle quali peraltro non insistiamo, contribuiscono a renderla verosimile.

Purtroppo è estremamente difficile controllare questa ipotesi con un calcolo rigoroso. Volendo giungere ad una spiegazione quantitativa, il primo passo consisterebbe nel risolvere un problema di Dirichlet. È ben noto, che salvo casi eccezionali, limitati a superficie molto regolari, il problema non ammette una soluzione rigorosa.

G. W. O. Howe⁽⁵⁾ tenta di dare una spiegazione semiquantitativa basandosi proprio sull'effetto delle cariche indotte, ma secondo il nostro parere, la spiegazione è troppo imperfetta per essere soddisfacente.

Del resto la trattazione del problema da questo punto di vista non ha molta importanza sotto l'aspetto teorico, poichè l'elettromagnetismo classico non ha la pretesa di essere perfettamente conforme al principio di relatività.

4. Procuriamo invece di vedere che cosa si dovrebbe prevedere basandoci sull'elettrodinamica strettamente relativistica di Einstein e di Minkowski. Per

(5) G. W. O. HOWE, *Wireless Engineer*, Sept. (1948), p. 273.

giungere a conclusioni corrette bisogna avere in mente ben chiaro il significato autentico e le esigenze reali del principio di relatività. Siano dati due sistemi di riferimento $Oxy\zeta$ ed $O'x'y'\zeta'$ disposti nel modo consueto e mobili l'uno rispetto all'altro con velocità v . Ammettiamo che la carica sia quiescente nel sistema di riferimento $Oxy\zeta$ e supponiamo, per semplicità, che la sua posizione coincida con l'origine delle coordinate. Il circuito dato Γ sia invece solidale col sistema mobile $O'x'y'\zeta'$.

Il principio di relatività, nelle condizioni ora precisate, ci assicura che un osservatore Ω' solidale col sistema $O'x'y'\zeta'$ deve osservare il fenomeno così come è stato precedentemente descritto (cfr. n. 2). Ma questa equivalenza non vale sotto tutti i rapporti per l'osservatore Ω solidale col sistema $Oxy\zeta$. Se la velocità di traslazione v fosse paragonabile con c , questi due osservatori troverebbero che le grandezze caratterizzanti il fenomeno sono ben diverse. Se ad esempio, l'osservatore mobile trova che l'intensità di corrente in un dato istante t' è i' , l'osservatore fisso trova che nell'istante corrispondente t l'intensità è $i = i' \sqrt{1 - \beta^2}$. Questo consegue dalla dilatazione temporale. Se in un dato intervallo τ' , misurato dall'osservatore Ω' , n elettroni attraversano una data sezione del conduttore, lo stesso complesso di eventi si verifica per l'osservatore Ω nell'intervallo $\tau = \tau' \sqrt{1 - \beta^2}$. Anche le quantità di calore dissipate nel circuito per effetto Joule sono legate dalla stessa relazione ⁽⁶⁾. Insomma, sebbene le equazioni fondamentali siano le stesse, i risultati della misura di una stessa grandezza fisica saranno generalmente diversi.

Per mostrare che la presunta dissimmetria di cui si è parlato al principio non si può verificare, ricordiamo che nell'elettrodinamica relativistica dei corpi in movimento, le equazioni del campo sono le stesse che le equazioni di Maxwell per i corpi in quiete. In forma tensoriale esse si scrivono ⁽⁷⁾:

$$(6) \quad \frac{\partial H^{ik}}{\partial x_k} = s_i$$

$$(7) \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_e} + \frac{\partial F_{ke}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ei}}{\partial x_k} = 0.$$

Ma le tre importanti relazioni che, per i corpi isotropi, vincolano i vettori del campo alle tre costanti caratterizzanti il comportamento elettromagnetico della materia, ovvero:

$$D = \epsilon E \quad ; \quad B = \mu H \quad ; \quad J = \sigma E$$

sono diverse da quelle stabilite da Maxwell e da Lorentz.

Nell'elettrodinamica dei corpi in movimento di Minkowski le equazioni corrispondenti a quelle ora scritte sono, in forma tensoriale ⁽⁸⁾:

$$(8) \quad H_{ik} v^k = \epsilon F_{ik} v^k$$

$$(9) \quad F_{ik}^* v^k = \mu H_{ik}^* v^k$$

$$(10) \quad s_i + (v^k s_k) v_i = \sigma F_{ik} v^k.$$

(6) R. C. TOLMAN, *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, p. 157.

(7) « Handbuch der Physik », XII, p. 330.

(8) « Handbuch der Physik », XII, p. 330 e 333.

A noi interessa soprattutto l'ultima relazione corrispondente alla legge di Ohm. Essendo una equazione tensoriale, è indubbia la sua conformità al principio relativistico di covarianza delle leggi naturali. Essa è una legge differenziale, che, in forma vettoriale limitandoci a prendere in considerazione la corrente di conduzione j si può scrivere ⁽⁹⁾:

$$(11) \quad J = \frac{\sigma}{V_1 - \beta^2} \left\{ E^* - \frac{v}{c} \left(\frac{v}{c} \times E \right) \right\}$$

dove abbiamo posto: $E^* = E + (1/c) v \wedge H$.

Passando alla legge omologa a quella di Ohm, valida per circuiti chiusi, si ottiene: (indicando con Q la sezione del conduttore) ⁽¹⁰⁾

$$(12) \quad i \sqrt{1 - \beta^2} \oint_S \frac{ds}{Q\sigma} = \oint_S \left\{ (E^* \times ds) + \frac{1}{c^2} (v \times E^*) (v \times ds) \right\}.$$

Da questa formola appare chiaramente che a determinare la corrente di conduzione interviene non soltanto il termine $\oint E^* \times ds$, come nell'elettrodinamica di Lorentz, ma anche il termine $1/c^2 \oint (v \times E^*) (v \times ds)$ sebbene questo sia generalmente trascurabile rispetto al primo. Nel caso che stiamo esaminando si annulla il termine $\oint E^* \times ds$ ma non l'altro, e di questo bisogna tener conto.

Peraltro nell'eseguire l'integrazione bisogna tenere presente che la forma del circuito appare diversa ai due osservatori a causa della contrazione di Lorentz. Per $v \ll c$ questo divario è trascurabile. In questa supposizione si vede che, essendo la carica situata nell'origine, l'integrale in esame si può scrivere nella forma

$$e \frac{v^2}{c^2} \oint \frac{x}{[x^2 + y^2]^{3/2}} (\text{vers } v \times ds)$$

coincidente con l'espressione (5').

Questo rilievo è sufficiente per mettere in evidenza l'infondatezza dell'obiezione. L'illusione della sua efficacia è fondata sull'opinione che, anche per l'osservatore Ω , la forza elettromotrice debba calcolarsi secondo la formula consueta. Ma questa opinione non tiene sufficientemente conto dei principi autentici dell'elettrodinamica relativistica di Einstein e di Minkowski.

5. Tuttavia è doveroso aggiungere che la trattazione strettamente relativistica del problema, se si volesse condurre fino alla fine con perfetto rigore, implicherebbe calcoli molto ardui. Ed infatti noi siamo partiti dall'equazione differenziale (11) e siamo giunti alla legge circuitale (12). Il procedimento è analogo a quello con cui nella teoria classica dalla legge differenziale $J = \sigma E$ si giunge alla legge

(9) W. PAULI, *Enc. d. Math. Wiss.* (1921), Band V₂; Heft 4, p. 658.

(10) M. VON LAUE, *Das Relativitätsprinzip*, Braunschweig (1921), p. 151.

circuitale $Ri = \oint E \times ds$, ed è per conseguenza soggetto alle stesse limitazioni.

Nell'equazione differenziale (11), indipendentemente dalla questione se essa sia esatta, con E dobbiamo intendere il campo totale, ovvero non solo quello primario ma anche quello secondario derivante dalle correnti circolanti nello stesso conduttore in esame. Quando si tratta di correnti rapidamente variabili non sarebbe affatto agevole trattare il problema con rigore. Volendo farlo, bisognerebbe tenere conto della sezione finita del conduttore, seguire la distribuzione dei filetti di corrente (in particolare lo skin effect), tenere conto del ritardo con cui si trasmettono le azioni elettrodinamiche. Schematizzare l'effetto del campo secondario con l'espressione $L(di/dt)$ è generalmente sufficiente ai bisogni della pratica ma non è del tutto rigoroso.

Tuttavia è certo che, sebbene il passaggio dall'equazione differenziale all'equazione circuitale non è possibile con tutto il rigore che sarebbe desiderabile, la soluzione avrà certe determinate proprietà. In particolare possiamo essere sicuri che, essendo relativistico il punto di partenza, sarà certo relativistica la conclusione.

Aggiungiamo inoltre che in generale, volendo studiare un fenomeno elettromagnetico concernente la materia in moto, non è opportuno applicare direttamente le equazioni fondamentali (6) e (7). Questo metodo diretto è comunemente troppo laborioso. È invece preferibile il metodo indiretto, consistente nello studiare il fenomeno in questione dal punto di vista dell'osservatore Ω' rispetto al quale la materia sede del fenomeno è quiescente, e successivamente tradurre i risultati ottenuti in quelli validi per Ω (11). Nel caso attuale, ad esempio, volendo determinare l'intensità di corrente i , si determinerebbe prima i' collocandosi dal punto di vista dell'osservatore Ω' e si ricaverebbe successivamente i dalla relazione dianzi trovata: $i = i' \sqrt{1 - \beta^2}$. La struttura delle equazioni fondamentali ci assicura che i risultati dei metodi diretto e indiretto non possono discordare.

In conclusione, parlare, come fa il Cullwick, di anomalia o di paradosso dell'elettrodinamica non è ammissibile in senso proprio. Possiamo concedere che c'è qualche difficoltà a vedere con precisione, sotto l'aspetto quantitativo, come vadano effettivamente le cose, ma è certo da escludersi anche il semplice sospetto dell'intrinseca coerenza dell'elettrodinamica relativistica.

(11) Come esempio dell'utilità del metodo indiretto citiamo l'ottica dei corpi in movimento. Cfr. a questo riguardo: H. THIRRING, « Handbuch der Physik », XII, p. 339.

Chimica inorganica. — *Sull'ossidazione di complessi dell'argento monovalente a complessi dell'argento bivalente*^(*). Nota di AMEDEO MALAGUTI, presentata^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Mentre dalle ricerche di Arthur A. Noyes⁽¹⁾ e collaboratori era risultato che il potenziale di ossidoriduzione del sistema $\text{Ag}^{++}\text{--Ag}^+$ ha il valore di 1,998 volts in soluzione di acido perclorico e di 1,9287 volts in soluzione di acido nitrico, le ricerche recenti eseguite in questo Istituto da E. Scrocco, G. Marmani e P. Mirone⁽²⁾ hanno accertato che il potenziale di ossidoriduzione dei complessi che l'argento bivalente e l'argento monovalente formano con l' $\alpha\alpha_1$ -dipiridile, ha il valore di 1,45 volts, notevolmente inferiore ai valori trovati da Noyes per gli ioni liberi.

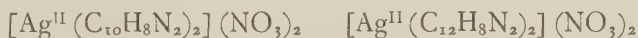
Con questo risultato vanno d'accordo i nuovi fatti chimici che sono descritti in questa Nota e che stanno a provare che la forma bivalente dell'argento è molto più facilmente raggiungibile, quando l'argento fa parte di un catione complesso di quanto non lo sia allo stato di ione libero.

I complessi, che vennero presi in esame, sono quelli che l'argento forma con l' $\alpha\alpha_1$ -dipiridile e con l'o-fenantrolina, e precisamente si sperimentò con il nitrato di argento-dipiridile e con il nitrato di argento-fenantrolina, che hanno le formule



si presentano in lunghi aghi di color giallo-avorio, pochissimo solubili in acqua a freddo, molto più solubili a caldo o in presenza di acido nitrico.

È noto⁽³⁾ che per ossidazione anodica essi vengono trasformati nei composti complessi dell'argento bivalente aventi le formule



che si presentano in bei cristalli lucenti rossobruni, abbastanza stabili, solubili in acqua con intensa colorazione rossobruna e quasi insolubili in presenza di un eccesso di ioni NO_3 . Le esperienze di ossidazione vennero eseguite sopra soluzioni di nitrato di argento-dipiridile (o fenantrolina) $n/100$ preparate con una soluzione $n/10$ di acido nitrico. Gli ossidanti che si fecero agire su dette soluzioni furono biossido di piombo, tetrossido di bismuto, sali del cerio tetravalente, ozono e ossido argentario AgO .

OSSIDAZIONE MEDIANTE BIOSSIDO DI PIOMBO E TETROSSIDO DI BISMUTO. — In un vasetto di vetro a tappo smerigliato si introdussero 100 cc. di una soluzione

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna diretto dal prof. G. B. Bonino.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) « J. Amer. Chem. Soc. », 59, 1326 (1937).

(2) « Bollettino della Facoltà di Chimica Industriale dell'Università di Bologna » (1950).

(3) G. A. BARBIERI, « Rend. Accad. Lincei » [6], XVI, II, 44 (1932).

di nitrato di argento-dipiridile contenente g. 0,482 del composto complesso e g. 0,63 di acido nitrico insieme con circa 2 g. di biossido di piombo, e si agita fortemente per alcuni minuti. Dopo centrifugazione si ottenne una soluzione limpida rossobruna, che per semplice decantazione si poté quasi completamente separare dal biossido di piombo in eccesso. L'azione del biossido di piombo sopra una soluzione di pari contenuto in argento e acido nitrico della precedente risultò senza alcun effetto.

Nella soluzione rossobruna l'aggiunta di una soluzione satura a freddo di perclorato potassico in eccesso determinò la formazione di un composto cristallino rosso-pietra, che all'analisi risultò essere $[Ag^{II}(C_{10}H_8N_2)_2](ClO_4)_2$. Nell'acqua madre di questo sale si trovarono soltanto tracce minime di argento, ciò che prova che l'ossidazione dell'argento-dipiridile con biossido di piombo può essere praticamente quantitativa. Sostituendo al biossido di piombo il tetrossido di bismuto si ottennero risultati analoghi.

OSSIDAZIONE MEDIANTE UN SALE DEL CERIO TETRAVALENTE. - Mentre è noto (4) che lo ione Ag^{++} ossida i sali cerosi a cerici, io ho potuto constatare che la soluzione rossobruna di nitrato di argento-dipiridile non viene decolorata, cioè ridotta, per aggiunta di un sale ceroso. Se ad una soluzione $n/50$ di $[Ag(C_{10}H_8N_2)_2]NO_3$ acida per acido nitrico si aggiunge una soluzione concentrata di nitrato cerico-ammonico $(NH_4)_2Ce(NO_3)_6$ contenente un eccesso di nitrato ammonico dopo alcuni minuti la soluzione cerica rosso-aranciata imbrunisce e dopo alcune ore forma un deposito cristallino rosso-bruno, che all'analisi risultò essere costituito dal complesso dell'argento bivalente $[Ag^{II}(C_{10}H_8N_2)_2](NO_3)_2$. Se si parte da un sale complesso dell'argento monovalente e fenantrolina si ottiene per ossidazione con nitrato cerico-ammonico il complesso dell'argento bivalente con la fenantrolina $[Ag^{II}(C_{12}H_8N_2)_2](NO_3)_2$ in bei cristalli lucenti rossobruniti.

OSSIDAZIONE CON OZONO. - I complessi dell'argento monovalente con dipiridile e con la fenantrolina possono considerarsi reattivi dell'ozono, perchè le loro soluzioni a contatto dell'ozono si colorano intensamente in rosso-bruno. Soluzioni di nitrato di argento nelle stesse condizioni non si colorano con l'ozono.

Si è potuto constatare che l'ossidazione nei complessi è quantitativa determinando nelle soluzioni rosso-brune a titolo noto in argento la quantità di acqua ossigenata $n/100$ necessaria per decolorarle completamente. Si trovò che ad ogni atomo di argento delle soluzioni rosso-brune corrisponde un equivalente di ossigeno attivo.

OSSIDAZIONE MEDIANTE ARGENTO BIVALENTE. - È certo che l'argento bivalente non può ossidare l'argento monovalente, ma se quest'ultimo fa parte di un complesso l'ossidazione diventa possibile. Se ad una soluzione $n/100$ rispetto al composto $[Ag^I(C_{10}H_8N_2)_2]NO_3$ e $n/10$ rispetto all'acido nitrico si aggiunge un po' di ossido argentario Ag_2O e si agita, la soluzione si colora subito e intensamente.

(4) G. A. BARBIERI, « Rend. Accad. Lincei » [5], XV, I, 503 (1906).

amente in rosso-bruno. Siccome l'ossido argentario ottenuto all'anodo nell'elettrolisi del nitrato d'argento, e anche l'ossido argentario ottenuto per azione del persolfato potassico sopra una soluzione di nitrato di argento, contengono, oltre l'ossido dell'argento bivalente, quantità più o meno grandi dell'ossido Ag_2O_3 , non possono venire impiegati nell'ossidazione su descritta. Per ottenere dell'ossido che contenga soltanto l'argento bivalente, bisogna operare in ambiente alcalino. L'ossido da me impiegato venne preparato nel modo seguente: in una bevuta contenente 150 cc. di acqua bollente si sciolsero g. 10 di persolfato potassico g. 10 di bicarbonato sodico, e poi mantenendo la bevuta sopra un bagnomaria bollente vi si aggiunsero a goccia a goccia cc. 25 di una soluzione $n/10$ di nitrato di argento. Si depositò una polvere cristallina nera, che all'analisi mostrò di contenere per ogni atomo di argento un equivalente di ossigeno attivo.

Compio il dovere di ringraziare il prof. G. A. Barbieri, che mi ha guidato in queste ricerche.

Chimica fisica. — *Sulla misura di variazioni di energia interna mediante ultrasuoni.* — *Contributo alla conoscenza della struttura dei liquidi* (*). Nota di FERDINANDO DANUSSO, presentata (**) dal Corrisp. G. NATTA.

Nel numeroso complesso dei mezzi chimico-fisici che attualmente concorrono alla laboriosa soluzione del problema della struttura dei liquidi, hanno assunto crescente importanza anche gli ultrasuoni.

Essi forniscono, nella loro velocità di propagazione, una grandezza facilmente misurabile e sensibile alla natura del mezzo attraversato.

Nella ricerca delle relazioni con la struttura dei liquidi, l'attenzione degli studiosi si è fino ad oggi soffermata, oltrechè sui valori della velocità stessa di propagazione, sull'entità di una funzione di essa avente carattere termodinamico significato indubbiamente interessante (1). È infatti possibile, attraverso la teoria dell'elasticità, nel caso di liquidi omogenei ed isotropi e nell'ipotesi di reversibilità ed adiabaticità del rapido processo di compressione e decompressione dovuto alla propagazione acustica, stabilire la seguente relazione:

$$(1) \quad \beta_{ad} = \frac{1}{\rho u^2}$$

che lega la velocità ultrasonora u nel liquido e la densità ρ alla compressibilità adiabatica β_{ad} , a sua volta definita come variazione specifica del volume rispetto alla pressione ad entropia S costante:

$$(2) \quad \beta_{ad} = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S.$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) L. BERGMANN, *Der Ultraschall und seine Anw. in Wiss. und Techn.*, Hirzel (Zürich 1949) p. 231.

Agli sperimentatori possono interessare anche certe funzioni molecolari del tipo:

$$(3) \quad D = u^{1/n} \frac{M}{\rho}$$

in cui M è la massa molecolare ed n un parametro. Introducendo opportuni valori di n , la (3) può assumere proprietà utili, quali la costanza con la temperatura o l'additività molecolare intesa come possibilità di calcolare la funzione, per una data sostanza, come somma di termini attribuibili ad atomi, gruppi atomici o legami costituenti la molecola⁽²⁾. In particolare la (3) con $n=3$ è nota con la denominazione, anche se impropria, di velocità ultrasonora molecolare⁽³⁾ e con $n=1$ è stata messa in relazione col volume effettivo della molecola⁽⁴⁾. L'importanza sostanziale delle (3) resta però diminuita dal fatto che esse hanno origine unicamente empirica: solo per $n=1$ la (3) ha trovato recentemente una giustificazione teorica⁽⁵⁾.

Alcune considerazioni su miscele liquide, che saranno sviluppate in Note successive, mi hanno portato all'esame di una funzione che, oltre ad avere un carattere energetico, può essere strettamente connessa con grandezze parziali molarie e quindi avere, da un punto di vista termodinamico, un significato sempre ben definito.

Nella presente Nota verrà descritta la derivazione di questa funzione da altre già in uso e brevemente illustrata qualche correlazione tra i valori di essa e la struttura di liquidi puri.

Invero, per il primo e secondo principio della termodinamica, per trasformazioni reversibili che implichino lavori unicamente meccanici, si può scrivere, indicando con U l'energia interna:

$$dU = TdS - pdV.$$

Dividendo per il differenziale della pressione ed operando in condizioni adiabatiche, cioè ad entropia costante, si ottiene:

$$(4) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_S = -p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S.$$

D'altra parte per la (1) e la (2) è:

$$(5) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \frac{V}{\rho u^2}$$

per cui la (4) diviene:

$$(6) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_S = \frac{pV}{\rho u^2}.$$

Queste ultime relazioni valgono, naturalmente, con le premesse enunciate per la (1).

Le (5) e (6) mettono in evidenza la possibilità di determinare due derivate parziali di funzioni termodinamiche con l'aiuto di misure di velocità ultrasonora

(2) F. DANUSSO, «Ricerca Scientifica», 20, 1481 (1950).

(3) M. RAMA RAO, «Ind. J. Phys.», 14, 109 (1940).

(4) W. SCHAAFFS, «Z. Phys. Chemie», 194, 66 (1944).

(5) K. ALTENBURG, «Z. Phys. Chemie», 195, 145 (1950).

esse sono anche le più semplici relazioni tra velocità ultrasonora e derivate termodinamiche ottenibili utilizzando la (1) come punto di partenza.

La (6) merita, a mio avviso, maggior considerazione, poichè la funzione al secondo membro, facilmente calcolabile, *rappresenta l'attitudine del sistema liquido ad accumulare energia per via puramente meccanica, per variazione di pressione in assenza di scambio termico*. Essa ha le dimensioni di un volume ed è, in sostanza, un coefficiente di assorbimento adiabatico di energia meccanica, la cui variabile intensiva è la pressione.

Qualora ci si riferisca all'unità di massa o meglio ad una mole di liquido, si potrà dedurre dalla (6) la rispettiva funzione specifica φ o quella molecolare Φ :

$$(7) \quad \varphi = \frac{p}{\rho^2 u^2}$$

$$(8) \quad \Phi = \frac{pM}{\rho^2 u^2}$$

più adatte a fornire valori di confronto, funzioni entrambe di grandezze di facile misura, tutte indipendenti dall'estensione.

Con analoga deduzione si potrebbero derivare dalla (5) la « compressibilità specifica » o la « compressibilità molecolare ».

TABELLA I.

*Valori di $\Phi = (\partial U / \partial p)_s$ per alcuni liquidi
a 30° C e 760 mm Hg in cal · 10⁻⁶/mole atm.*

| | | | |
|--------------------------|-----|---------------------------------|-----|
| n-eptano | 409 | alcol butilico sec | 187 |
| n-ottano | 412 | » » ter | 233 |
| eptene | 404 | » n-amilico | 197 |
| ottene | 390 | pentanolo-3 | 206 |
| benzolo | 146 | alcol isoamilico sec | 211 |
| toluolo | 175 | » amilico ter | 226 |
| o-xilolo | 192 | » n-ottilico | 252 |
| m-xilolo | 198 | » n-decilico | 289 |
| p-xilolo | 203 | » n-dodecilico | 325 |
| decalina cis | 204 | glicol etilenico | 43 |
| decalina trans | 229 | glicerina | 37 |
| alcol metilico | 102 | acqua | 18 |
| » etilico | 137 | acetone | 168 |
| » propilico | 153 | metiletilchetone | 190 |
| » isopropilico | 180 | etere | 384 |
| » n-butilico | 177 | carbonio tetracloruro | 174 |
| » isobutilico | 196 | solfo carbonio | 88 |

TABELLA II.

Valori di $\Phi = (\partial U / \partial p)_S$ per alcuni composti a molecola base di 6 atomi di carbonio a 30° C e 760 mm Hg in cal. $\cdot 10^{-6}$ /mole atm.

| | | | | |
|-----------------|-------|--|--|--|
| n-esano | 413 | | | |
| esene | 410 | | | |
| alcol n-esilico | 214 | | | |
| cicloesano | 2.6 | | | |
| acido capronico | (207) | | | |
| cicloesene | 186 | | | |
| toluolo | 175 | | | |
| fluorobenzolo | 164 | | | |
| benzolo | 146 | | | |
| clorobenzolo | 138 | | | |
| cicloesanone | 128 | | | |
| bromobenzolo | 127 | | | |
| cicloesanol | 124 | | | |
| iodobenzolo | 121 | | | |
| anisolo | 113 | | | |
| nitrobenzolo | 96 | | | |
| fenolo | (86) | | | |
| anilina | 79,5 | | | |
| fenilidrazina | 72 | | | |

Nella Tabella I sono indicati, a scopo orientativo, i valori di Φ per alcuni liquidi a 30° C ed a pressione normale, calcolati con dati scelti dalla letteratura ⁽⁶⁾ o direttamente misurati. Essi dimostrano che la Φ è una funzione altamente sensibile alla struttura. Se si esaminano, ad esempio, i valori riportati alle stesse condizioni nella Tabella II per composti a molecola base di sei atomi di carbonio, si può facilmente constatare l'influenza esercitata sull'assorbimento di energia meccanica dalla forma più o meno compatta della molecola, dalla presenza di doppi legami, dall'introduzione di ossigeno in vari modi, dalla sostituzione di idrogeno con elementi o gruppi atomici diversi.

Si noti che il confronto ad ugual temperatura presenta una comodità sperimentale, ma non corrisponde ad un criterio particolarmente razionale. D'altra parte l'attuale patrimonio di dati sperimentali non consente un soddisfacente confronto, ad esempio, ad ugual temperatura ridotta: in tali condizioni è prevedibile un sovvertimento di alcune delle regole ora viste.

Il comportamento della Φ in relazione alla struttura presenta evidentemente analogie con quello della compressibilità, data la stretta parentela intercorrente tra le due funzioni; la prima funzione assume però valori più sensibili ed espressivi, dovuti al « peso » che in essa esercita il volume molecolare.

L'influenza delle ramificazioni, o della isomeria di struttura in generale, già visibile nella Tabella I per gli alcoli normali o ramificati, primari o secondari e terziari, per i tre xiloli, per le due decaline, viene maggiormente specificata nella Tabella III, in cui vengono confrontati nove isomeri dell'eptano ⁽⁷⁾, sempre a pressione normale, nei tre modi che ora descriveremo.

TABELLA III.

Isomeri dell'eptano

ρ in gr/cm³ u in m/sec T in °K Φ in cal · 10⁻⁶/mole atm.

| | a 20 °C | | | a T = 0,79 Teb | | | | a V = 146,58 cm ³ | | |
|-----------------------|---------|--------|--------|----------------|----------|--------|--------|------------------------------|----------|--------|
| | ρ | u | Φ | T | ρ | u | Φ | T | u | Φ |
| n-eptano | 0,6836 | 1154 | 370 | 293,0 | 0,6836 | 1154 | 370 | 293 | 1154 | 370 |
| 2-metilesano | 0,6789 | 1120 | 398 | 386,1 | 0,6864 | 1148 | 371 | 288,7 | 1138 | 381 |
| 2,2-dimetilpentano . | 0,6737 | 1080,5 | 435 | 278,4 | 0,6861 | 1143,5 | 374 | 281,4 | 1131 | 386 |
| 2,4-dimetilpentano . | 0,6745 | 1083,5 | 431 | 279,2 | 0,6861 | 1138 | 378 | 282,2 | 1126,5 | 389 |
| 3-metilesano | 0,6870 | 1135,5 | 379 | 287,9 | (0,6913) | 1157,5 | (360) | (297,1) | (1118,5) | (395) |
| 3-etilpentano | 0,6982 | 1169,5 | 346 | 289,0 | 0,7017 | 1187 | 334 | 309,5 | 1098 | 410 |
| 2,3-dimetilpentano . | 0,6942 | 1148,5 | 362 | 286,1 | 0,7002 | 1178,5 | 339 | 305,2 | 1095 | 412 |
| 3,3-dimetilpentano . | 0,6935 | 1129,5 | 375 | 283,3 | (0,7015) | 1170 | (342) | (305) | (1086,5) | (418) |
| 2,2,3-trimetilbutano | 0,6901 | 1101,5 | 399 | 279,2 | 0,7014 | 1157,5 | 350 | 300,9 | 1069,5 | 428 |

(6) L. BERGMANN, loc. cit., p. 263 e sgg.

(7) FREYER, HUBBARD, ANDREWS, « J. A. C. S. », 51, 765 (1929).

a) Alla stessa temperatura: si nota l'effetto esaltante delle ramificazioni terminali sull'assorbimento di energia meccanica accanto ad un effetto deprimente delle ramificazioni più profonde e di maggior lunghezza.

b) Ad una temperatura ottenuta come frazione costante della temperatura assoluta di ebollizione (condizione scelta in assenza di dati sicuri di temperatura critica): si nota un andamento analogo a quello descritto in a), ma con influenza poco sentita delle ramificazioni terminali e molto accentuata per quelle centrali (dati di densità e velocità interpolati).

c) A temperature diverse, ma tali da identificare i volumi molecolari (dati di temperatura e di velocità interpolati): in tali condizioni si nota che la velocità ultrasonora diminuisce gradualmente con l'aumentare del numero, della profondità e della lunghezza delle ramificazioni. Conseguo la regola semplice in senso opposto già osservata sugli stessi isomeri e in condizioni simili per la compressibilità adiabatica⁽⁸⁾, alla quale si uniforma anche la Φ .

L'influenza della temperatura sulla Φ (a pressione normale) può riassumersi, attraverso i dati esistenti, nella relazione:

$$(9) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{\Delta\Phi}{\Delta T} = 0,008 \div 0,010 \quad (T \text{ in } ^\circ K)$$

che si verifica con larga approssimazione per liquidi anche a struttura diversa e per temperature tra 0° e 80° C circa. Fa eccezione l'acqua che ha coefficiente di temperatura leggermente negativo fino a 60° - 65° e quindi positivo fino alla temperatura di ebollizione. Sembrano fare eccezione, con coefficienti però sempre positivi, anche liquidi fortemente associati, come la glicerina, a Φ molto bassa.

Particolarmente interessante può presentarsi l'influenza della pressione, anche se fino ad oggi non siano state eseguite misure di velocità ultrasonora a pressioni diverse da quella atmosferica. In via logica è dato in generale di prevedere una diminuzione continua della compressibilità con l'aumentare della pressione. La Φ , invece, certamente aumenta, in un primo tempo, per la preponderanza del fattore pressione sulla variazione di volume; in un secondo tempo, però, la sempre più esigua variazione di volume potrebbe portare ad una diminuzione dell'energia meccanica assorbita a parità di variazione di pressione. Ciò troverebbe conferma in alcuni dati sperimentali di variazione di densità con la pressione indicati nella letteratura, che darebbero un massimo della curva della Φ , calcolabile per questa via, in funzione della pressione. Data però l'incertezza non solo di tali misure, ma anche della valutazione del rapporto tra i calori specifici, necessario al passaggio da condizioni isoterme a condizioni adiabatiche, non sarebbe prudente togliere del tutto il carattere di ipotesi a queste ultime considerazioni.

Anche se non ci soffermiamo, in questa breve presentazione, sull'interpretazione delle correlazioni riscontrate, che possono essere messe in relazione con fattori di carattere strutturistico, richiamiamo tuttavia l'attenzione degli sperimentatori sulle possibilità offerte da questo mezzo di indagine: esso permette di ricavare in modo rapido un dato energetico meccanico che può risultare più significativo di altri nello studio delle proprietà coesive dei liquidi.

(8) M. BACCAREDDA, «Ricerca Scientifica», 17, 1108 (1947).

CONCLUSIONI. — Dal primo e secondo principio della termodinamica, utilizzando una nota formula valida per liquidi omogenei ed isotropi in condizioni adiabatiche e reversibili, con semplici trasformazioni si ottiene la relazione:

$$(6) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_s = \frac{pV}{\rho u^2}$$

che esprime la variazione dell'energia interna di un liquido rispetto alla pressione, ad entropia costante, in funzione della pressione, del volume, della densità e della velocità ultrasonora.

La funzione del secondo membro, oltre ad avere carattere energetico, non riscontrabile in altre funzioni finora proposte in ricerche connesse con misure di velocità ultrasonora, è suscettibile di essere parzializzata nello studio di miscele liquide. Quest'ultima proprietà verrà sviluppata in Note successive.

Per una mole M di liquido dalla (6) si ottiene l'espressione della corrispondente funzione Φ :

$$(8) \quad \Phi = \frac{pM}{\rho^2 u^2}$$

che è facilmente misurabile ed ha il vantaggio di essere una grandezza molecolare, rappresentando l'energia meccanica assorbita da una grammimolecola di liquido per una variazione unitaria di pressione (in assenza di scambio termico). Nelle tabelle sono stati riportati i valori di essa per alcuni liquidi puri: le regolarità che vengono riscontrate, per quanto analoghe a quelle della compressibilità adiabatica, data la stretta parentela intercorrente tra le due funzioni, appaiono più sensibili a fattori strutturalistici.

L'influenza della temperatura può essere per molti liquidi riassunta con la seguente regola approssimata:

$$(9) \quad \frac{1}{\Phi} \frac{\Delta \Phi}{\Delta T} = 0,008 \div 0,010 \quad (T \text{ in } ^\circ K)$$

mentre l'esame dell'influenza della pressione sulla Φ lascia prevedere la formazione di un massimo nelle curve corrispondenti.

Geologia. — *Notizie preliminari sull'Oligocene di Manerba (Lago di Garda)* (*). Nota di ADRIANA ZINONI, presentata (**) dal Corrisp. A. DESIO.

In uno studio geologico in corso sull'affioramento nummulitico di Manerba, esaminato particolarmente dal punto di vista stratigrafico e paleontologico, ho ottenuto alcuni risultati di un certo interesse, di cui dò qui notizia in forma sommaria.

Della zona di Manerba si erano occupati precedentemente vari studiosi, ma più che altro di sfuggita e senza entrare in dettagli.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia, Paleontologia e Geografia Fisica dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

Taramelli ⁽¹⁾ e Sacco ⁽²⁾ riferiscono all'Eocene i livelli nummulitici della Rocca di Manerba e delle zone adiacenti, ma Sacco pensa che gli strati superiori potrebbero rappresentare l'Oligocene inferiore (Tongriano).

Cozzaglio ⁽³⁾ attribuisce il giacimento all'Eocene, pur non escludendo la presenza del Miocene.

Fabiani e Silvestri ⁽⁴⁾ invece, constatata la presenza di *Nummulites intermedius-fichteli* e di *Lepidocyclina morgani*, lo riferiscono all'Oligocene medio (Rupeliano). Venzo ⁽⁵⁾ pure accenna ad un'età oligocenica.

L'affioramento di Manerba, che occupa una superficie di 1,590 km² comprende le seguenti località: Monte Re (156 m s. l. m.), Rocca di Manerba (218 m), Monte Sasso (142 m), Monte San Giorgio (122 m), Porto Dusano.

Gli strati nummulitici emergono dalla copertura morenica della zona più interna dell'anfiteatro del Garda e formano la parte marginale di una tozza penisola arcuata.

L'affioramento è costituito in massima parte da una brecciola quarzoso-calcareo molto compatta, ricchissima di fossili rappresentati per la quasi totalità da foraminiferi.

Non si notano rilevanti variazioni litologiche nella serie; si può dire soltanto che le brecciole fanno passaggio ad arenarie fossilifere abbastanza compatte, di colore grigio-giallastro.

I fossili da me raccolti nelle brecciole appartengono alle forme seguenti:

Nummulites fichteli Michelotti

Nummulites intermedius d'Archiac

Nummulites boucheri de la Harpe

Nummulites incrassatus de la Harpe

Operculina complanata de France

Lepidocyclina morgani Lemoine e Douvillé

Lepidocyclina marginata Michelotti

Lepidocyclina tournoueri Lemoine e Douvillé.

Se vogliamo ora passare a ricostruire con maggiore dettaglio la stratigrafia, possiamo distinguere tre diversi livelli e precisamente:

LIVELLO INFERIORE. - Divisibile in una parte inferiore ed una superiore. La parte inferiore è rappresentata da una serie di strati emergenti dalle acque del lago, formati da una brecciola quarzoso-calcareo a grana piuttosto minuta, di colore grigio-rosato.

(1) T. TARAMELLI, *Considerazioni geologiche sul Lago di Garda*. «Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett.», ser. II, vol. XXVII, fasc. 3, pp. 148-159, Milano 1894.

(2) F. SACCO, *L'Anfiteatro morenico del Lago di Garda*. *Studio geologico*. «Ann. R. Acc. Agric.», vol. XXXVIII, pp. 54, carta geologica al 10 000, Torino 1896.

(3) A. COZZAGLIO, *Note illustrative della Carta geologica delle Tre Venezie*. Fogli «Peschiera e Mantova», P. I Geologia, pp. 1-138, 7 figg., 5 tav., «Uff. Idrogr. R. Magistrato alle Acque», Padova 1933.

(4) A. SILVESTRI, *Nummuliti oligoceniche della Madonna della Catena, presso Termini Imerese (Palermo)*. «Boll. Soc. Geol. Ital.», vol. XXVII, pp. 593-653, tav. XXI, Roma 1909.

(5) S. VENZO, *I fossili del Neogene trentino, veronese e bresciano*: «Palaeont. Ital.», vol. XXXV, pp. 31-84, tavv. V-VI, Siena 1934.

In questa parte ho potuto identificare i seguenti fossili:

Nummulites boucheri de la Harpe

Nummulites fichteli Mich.

Lepidocyclina tournoueri Lem. e Douv.

grosse *Rotalie*

numerosi frammenti di *Briozoi*, spessore 5 m.

La parte superiore è costituita da arenarie grigiastre più o meno friabili, contenenti fossili in quantità piuttosto scarsa.

Le specie riconosciute sono:

Nummulites boucheri de la Harpe

Nummulites fichteli Mich.

Lepidocyclina tournoueri Lem. e Douv.

Miliolidi

qualche grossa *Rotalia*, spessore 12 m.

LIVELLO MEDIO. — Questo livello è composto in prevalenza da arenarie grigio-giallastre abbastanza friabili, ricchissime di foraminiferi, nelle quali sono intercalate brecciole nummulitiche, compatte, dello stesso colore.

I fossili riconosciuti sono:

Nummulites fichteli Mich.

Nummulites intermedius d'Arch.

Nummulites boucheri de la Harpe

Operculina complanata de France

Lepidocyclina morgani Lem. e Douv. (forme micro e macrosferiche)

Lepidocyclina marginata Mich.

Lepidocyclina tournoueri Lem. e Douv.

Rotalie

Miliolidi, spessore 60 m.

LIVELLO SUPERIORE. — Si presenta con caratteri litologici alquanto variabili. Si tratta di brecciole nummulitiche compatte di colore grigio-giallastro, talora grigie e rossastre esternamente per alterazione, alternate con arenarie grossolane dello stesso colore.

Tra i fossili, molto abbondanti, notiamo la presenza di:

Nummulites fichteli Mich.

Nummulites intermedius d'Arch.

Nummulites incrassatus de la Harpe

Nummulites boucheri de la Harpe

Operculina complanata de France

Lepidocyclina morgani Lem. e Douv. (forme micro e macrosferiche)

Rotalie

Miliolidi, spessore 74 m.

Fra gli strati dei diversi livelli non esiste discordanza stratigrafica; questi hanno immersione prevalente nord-ovest e pendenza di circa 25°.

Le principali distinzioni faunistiche fra gli strati inferiori e superiori dell'affioramento sono date dal fatto che mentre negli strati inferiori il *Nummulites fichteli* ed il *N. intermedius* sono piuttosto scarsi e diffuso il *N. boucheri*, negli

strati superiori *N. fichteli* e *N. intermedius* sono molto abbondanti e scarso il *N. boucheri*. Passando alle *Lepidocyclusinae* noto che *Lepidocyclusina tournoueri* è diffusa prevalentemente negli strati medio-inferiori, mentre *L. morgani* e *L. marginata* si trovano prevalentemente negli strati medio-superiori.

La diffusione cronologica delle varie forme risulta essere la seguente: *Nummulites intermedius* e *N. fichteli* arrivano al Cattiano (Oligocene superiore), ma hanno il massimo sviluppo nel Rupeliano (Oligocene medio).

Le *Nephrolepidinae* in Italia vanno dall'Oligocene medio al Miocene inferiore. Il gruppo del *Nummulites vasca* arriva sino al Cattiano; quindi l'associazione di *N. boucheri* con *Lepidocyclusina tournoueri* nei livelli medio-inferiori, e di *Nummulites fichteli* e *N. intermedius* con *Lepidocyclusina morgani* e *L. marginata* nei livelli medio-superiori, permette senza dubbio di attribuire al Rupeliano (Oligocene medio) tutto l'affioramento.

Si viene così ad escludere la presenza dell'Eocene a cui avevano accennato vari autori, come s'è visto in principio.

Paleontologia. — *Segnalazione di resti di Antracoterio nelle ligniti dei dintorni di Chiuppano (Vicenza) (*)*. Nota di PIERO LEONARDI, presentata (**) dal Corrisp. GIANBATTISTA DAL PIAZ.

Presso Chiuppano, alle falde delle prealpi vicentine, si stende un complesso collinoso costituito quasi completamente da materiali tufacei e basaltici.

Entro questo complesso eruttivo sono intercalate alcune lenti di lignite che in località Marola sono state sfruttate in questi ultimi tempi.

Il Maestro F. Rando, di Chiuppano, che con grande entusiasmo e passione sta da tempo raccogliendo dati per accrescere le conoscenze sul passato della sua bella terra, sorvegliando lo scavo delle ligniti suddette, ebbe campo di raccogliere una certa quantità di resti fossili di grande interesse, che molto gentilmente volle offrire allo scrivente per lo studio.

Il materiale in questione consiste in un certo numero di ossa più o meno piritizzate, appartenenti al cranio e ad altre parti scheletriche di un grosso mammifero che già ad un primo sommario esame si rivela per un *Anthracotherium* di elevata statura.

Il fatto qui segnalato ha un certo interesse, perchè finora nelle Venezie resti di Antracoteri erano stati rinvenuti soltanto nei depositi lignitiferi di Zovencedo e Monteviale, pure nel Vicentino (1).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Ferrara.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

(1) BEGGIATO, *Anthracotherio di Zovencedo e di Monteviale nel Vicentino*. «Mem. Soc. It. Sc. Nat.», Milano 1865, I; HOERNES, *Anthracotherienreste von Zovencedo bei Grancona in Vicentinisches*. «Verhandl. K. K. Geol. Reichsanst.», Vienna 1876, 5; DE ZIGNO, *Anthracotherio di Monteviale*. «Mem. Ist. Veneto», Venezia 1888; GB. DAL PIAZ, *I mammiferi dell'Oligocene Veneto: Anthracotherium monsvialense*. «Mem. Ist. Geol. Univ. Padova», Padova 1932, vol. 10.



Resti di *Anthracotherium* delle ligniti di Chiuppano (Vicenza).

Fig. 1. - M^3 ed M^2 superiori sinistri. Grandezza naturale. - Fig. 2. - M_3 e frammento di M_2 inferiori destri. Grandezza naturale. - Fig. 3. - Rostro e regione sinfisaria di mandibola, visti dal di sotto; $1/2$ circa della grandezza naturale. - 4. - Branche orizzontali di altra mandibola, con M_3 ed M_2 interi, M_1 e P_4 con la corona asportata, e frammenti di P_3 ; $1/2$ della grandezza naturale. - 5. - Epifisi prossimale di omero sinistro, vista dall'alto; $1/2$ della grandezza naturale. - 6. - La stessa vista dal lato esterno; $4,5/10$ della grandezza naturale.

Il rinvenimento in questione è dunque doppiamente importante: per la stratigrafia delle Venezie, in quanto la presenza di resti di antracoteri, che come è noto in Europa sono limitati all'Oligocene, permette di accertare l'età delle ligniti di Chiuppano, e dal punto di vista paleontologico in quanto si tratta di ottimi esemplari che permetteranno di accrescere le nostre conoscenze su questi interessanti animali.

Il materiale è in corso di studio ad opera del prof. Bruno Accordi, che lo illustrerà ampiamente in apposita monografia.

Mineralogia. — *Perrierite, nuovo minerale ritrovato nella sabbia di Nettuno (Roma)* (*). Nota preliminare di STEFANO BONATTI e GLAUCO GOTTARDI, presentata (**) dal Socio G. CAROBBI.

La sabbia di Nettuno, a grana molto fine, presenta la particolarità di essere costituita, oltre che da minerali in granuli e schegge più o meno arrotondate, da frequentissimi cristallotti con le facce ben conservate e completi di forme. La sabbia rappresenta, nella maggior parte dei suoi costituenti, il residuo del disfacimento di tufi; minerali cristallini formati in fase ortomagmatica e dispersi nei tufi sono, selezionati sulla base della loro alterabilità e durezza, concentrati e raccolti nella sabbia stessa. I costituenti più abbondanti sono pirosseni della serie diopside-augite; a questi si accompagnano magnetite, ilmenite, zircone, granato, ecc.

Nel corso di una serie di ricerche sui costituenti mineralogici della sabbia di Nettuno gli Autori hanno identificato granuli e cristallotti di un minerale che deve essere riportato a una specie mineralogica non ancora conosciuta. Questi granuli e cristallotti non superano mai lo spessore massimo di mm. 0,2 e sono molto rari, ma, una volta identificati, sono facilmente riconoscibili per il fortissimo pleocroismo dal giallo all'opaco, per l'abito prismatico tozzo tendente al tabulare con sviluppo maggiore di una faccia del prisma, per la comunissima unione emitropica o parallela di due individui, sempre secondo una faccia prismatica, e per l'alto indice di rifrazione.

L'abito cristallino è molto simile a quello dei minerali del gruppo dell'epidoto, cosicchè in un primo tempo si è cercato se fosse possibile, in vista anche del caratteristico pleocroismo, riferire detto minerale ad una varietà di ortite. Data l'estrema piccolezza dei cristalli, per l'esecuzione delle misure angolari sono stati richiesti perfezionamenti di attrezzatura in un goniometro a un cerchio, già ottimo in partenza, e particolari artifici per le orientazioni delle varie zone. Le misure hanno dato buoni risultati e l'interpretazione cristallografica non presenta alcuna incertezza.

Il minerale cristallizza nel sistema monoclinico, classe prismatica, con sviluppo della zona prismatica intorno all'asse *b* e numerose forme $\{h\ 0\ l\}$. I prismi soli-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Pisa.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

tamente tozzi, più raramente allungati, sono chiusi all'estremità da faccette poco inclinate tra loro; l'estinzione a 0° sulla zona prismatica conferma l'interpretazione cristallografica. Nella zona prismatica intorno a $[010]$ troviamo una successione di valori angolari che può essere avvicinata a quella della corrispondente zona dell'ortite con scarti di valori non eccessivamente forti (per esempio $(100)\widehat{(001)} = 66^\circ 32'$ contro $64^\circ 59'$ dell'ortite). Però i relativi sviluppi delle facce sono ben diversi ed inoltre compaiono forme non conosciute per l'ortite mentre mancano altre in questa comuni. Se passiamo alle facce terminali del prisma, cadono anche

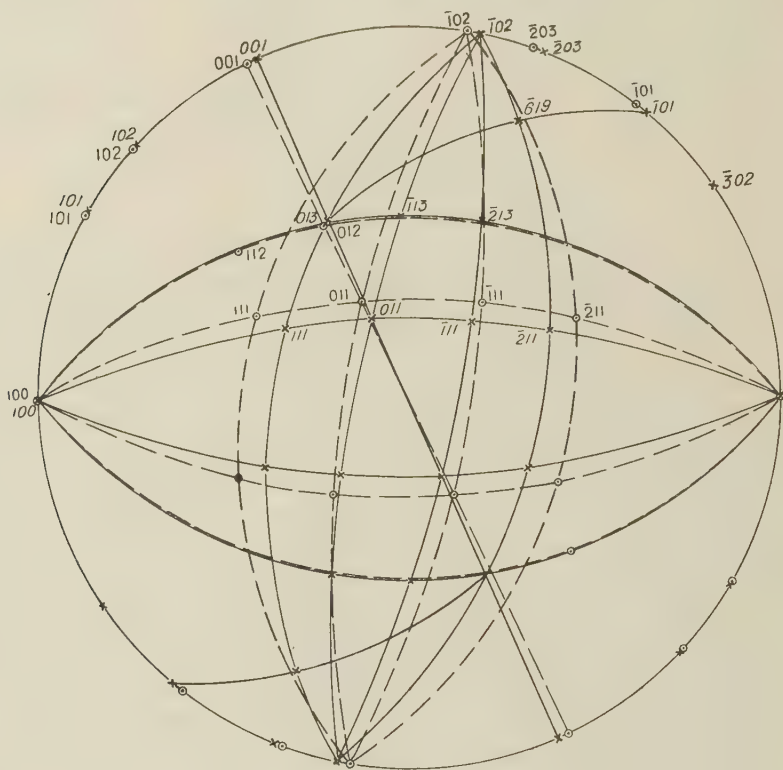


Fig. 1.

Ortite = in tratteggio e indici diritti con facce segnate \odot .

Minerale nuovo = linee continue e indici inclinati con facce segnate X.

le corrispondenze angolari conservandosi solo un andamento simile nella disposizione delle zone. Nella fig. 1 sono messe a confronto le proiezioni stereografiche su (010) dei due minerali. Anche la costituzione chimica e le proprietà ottiche dimostrano, come vedremo in seguito, in modo indubbio che si tratta di due specie mineralogiche ben distinte. Ciò nonostante si è ritenuto utile mettere in evidenza le analogie cristallografiche, conservando l'orientazione che porta agli stessi simboli per le forme analoghe dell'ortite, anche se questa orientazione non ben risponda all'abito cristallino del minerale, inquantochè, ad esempio, fa assegnare l'indice $\{102\}$ alla forma più espansa della zona prismatica e $\{001\}$ a una con sviluppo sempre limitato e porta, per i parametri su x e su z , valori superiori a 2.

Sistema monoclino - Classe prismatica - $2,047 : 1 : 2,380 \beta = 113^\circ 28'$.

Forme presenti:

$\{001\}$; $\{100\}$; $\{011\}$; $\{013\}$; $\{102\}$; $\{101\}$; $\{\bar{1}02\}$;
 $\{\bar{1}01\}$; $\{\bar{3}02\}$; $\{111\}$; $\{\bar{1}11\}$; $\{\bar{2}13\}$; $\{\bar{1}13\}$.

Forme rare: $\{\bar{2}03\}$; $\{\bar{6}19\}$.

Combinazioni più frequenti:

$\{001\}$, $\{100\}$, $\{101\}$, $\{\bar{1}02\}$, $\{111\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{2}11\}$, $\{013\}$; $\{001\}$,
 $\{100\}$, $\{101\}$, $\{102\}$, $\{\bar{1}02\}$, $\{111\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{2}11\}$.

| Angoli misurati | N. | Limiti | Medie | Calcolati |
|----------------------------------|----|-------------------------------|------------------|----------------|
| $(100) \wedge (001)$ | 25 | $66^\circ 25' - 66^\circ 43'$ | $66^\circ 32'^*$ | — |
| $(001) \wedge (\bar{1}01)$ | 25 | $63^\circ 09' - 63^\circ 24'$ | $63^\circ 17'^*$ | — |
| $(001) \wedge (011)$ | 11 | $65^\circ 14' - 65^\circ 35'$ | $65^\circ 24'^*$ | — |
| $(001) \wedge (\bar{1}02)$ | 25 | $34^\circ 36' - 34^\circ 54'$ | $34^\circ 45'$ | $34^\circ 45'$ |
| $(100) \wedge (101)$ | 5 | $30^\circ 18' - 30^\circ 39'$ | $30^\circ 27'$ | $30^\circ 27'$ |
| $(001) \wedge (102)$ | 8 | $23^\circ 17' - 23^\circ 28'$ | $23^\circ 22'$ | $23^\circ 25'$ |
| $(100) \wedge (30\bar{2})$ | 7 | $34^\circ 10' - 34^\circ 29'$ | $34^\circ 19'$ | $34^\circ 17'$ |
| $(\bar{1}02) \wedge (\bar{2}03)$ | 2 | $10^\circ 45' - 10^\circ 55'$ | $10^\circ 50'$ | $11^\circ 03'$ |
| $(100) \wedge (111)$ | 20 | $56^\circ 30' - 56^\circ 43'$ | $56^\circ 36'$ | $56^\circ 37'$ |
| $(100) \wedge (011)$ | 20 | $80^\circ 21' - 80^\circ 35'$ | $80^\circ 29'$ | $80^\circ 27'$ |
| $(100) \wedge (11\bar{1})$ | 20 | $71^\circ 56' - 72^\circ 13'$ | $72^\circ 04'$ | $72^\circ 07'$ |
| $(100) \wedge (21\bar{1})$ | 20 | $50^\circ 41' - 51^\circ 08'$ | $50^\circ 54'$ | $50^\circ 52'$ |
| $(001) \wedge (013)$ | 7 | $36^\circ 00' - 36^\circ 12'$ | $36^\circ 06'$ | $36^\circ 03'$ |
| $(\bar{1}02) \wedge (013)$ | 4 | $48^\circ 02' - 48^\circ 20'$ | $48^\circ 11'$ | $48^\circ 22'$ |
| $(\bar{1}02) \wedge (111)$ | 21 | $77^\circ 40' - 77^\circ 60'$ | $77^\circ 50'$ | $77^\circ 54'$ |
| $(\bar{1}02) \wedge (\bar{2}11)$ | 20 | $65^\circ 15' - 65^\circ 24'$ | $65^\circ 19'$ | $65^\circ 17'$ |
| $(\bar{1}02) \wedge (011)$ | 18 | $69^\circ 53' - 69^\circ 62'$ | $69^\circ 57'$ | $69^\circ 59'$ |
| $(\bar{1}02) \wedge (\bar{1}13)$ | 6 | $39^\circ 58' - 40^\circ 08'$ | $40^\circ 04'$ | $39^\circ 58'$ |
| $(\bar{1}02) \wedge (\bar{6}19)$ | 2 | $17^\circ 30' - 18^\circ 30'$ | 18° | $17^\circ 34'$ |
| $(\bar{1}01) \wedge (\bar{2}13)$ | 8 | $39^\circ 40' - 40^\circ 10'$ | $39^\circ 47'$ | $39^\circ 44'$ |
| $(\bar{1}01) \wedge (011)$ | 22 | $79^\circ 10' - 79^\circ 28'$ | $79^\circ 19'$ | $79^\circ 12'$ |
| $(\bar{1}01) \wedge (\bar{2}11)$ | 22 | $50^\circ 22' - 50^\circ 38'$ | $50^\circ 30'$ | $50^\circ 35'$ |
| $(001) \wedge (111)$ | 12 | $58^\circ 50' - 59^\circ 10'$ | 59° | $58^\circ 57'$ |
| $(001) \wedge (\bar{1}13)$ | 5 | $43^\circ 30' - 43^\circ 45'$ | $43^\circ 38'$ | $43^\circ 46'$ |

La forma a maggiore sviluppo è la $\{\bar{1}02\}$; costantemente ben espansa talvolta fa assumere un aspetto quasi tabulare al cristallo. Frequentissima l'unione di due

È interessante notare che, riportando il rapporto parametrico $2,047 : 1 : 2,380$ all'eguaglianza per il parametro su a con quello dell'ortite ($1,55 : 1 : 1,77$) si ottiene $1,55 : 0,756 : 1,80$, con contrazione di un quarto del parametro su b . Ma, assumendo come riferimento tale rapporto, la zona $(111) (011) (\bar{1}11) (\bar{2}11)$, una delle più importanti del minerale, scomparirebbe diventando zona $(343), (043), (\bar{3}43), (\bar{6}43)$. Come vedremo il minerale risulta essere un silico-titanato di terre rare con torio. Analogie cristallografiche tra minerali del gruppo dell'epidoto e alcuni silico-titanati quali la Johnstrupite, la Mosandrite, la Rinkite, sono già state messe in evidenza da vecchi cristallografi come il Des Cloizeaux e il Brögger; solo un accurato esauriente studio strutturistico potrà mettere in piena luce le eventuali relazioni cristallografiche fra epidoti e il minerale in studio, e assegnare o no un preciso significato cristallochimico a quanto precedentemente abbiamo segnalato sulla sola base dei dati cristallografici morfologici.

Il forte assorbimento, la piccolezza dei cristalli, l'elevato indice di rifrazione rendono difficili e talvolta incerte le determinazioni dei caratteri ottici. Il minerale estingue a zero sulla zona prismatica e pare indubbio che all'asse b corrisponda Z dell'indicatrice. Su cristalli disposti verticalmente secondo $[010]$ si determina un'estinzione (l'altra è del tutto nascosta dall'assorbimento) a circa 24° da a nell'angolo ottuso, senza si possa però decidere se si tratti di X o di Y . Ma, come vedremo, altre determinazioni concordano nell'identificare, con certezza quasi assoluta, che questa estinzione è riferibile a X . Abbiamo quindi $b = Z, a \wedge X = 24^\circ$ circa nell'angolo ottuso.

Facendo riferimento all'indicatrice ottica così orientata, si verifica Z e Y fortemente assorbenti con $Z =$ opaco o marrone scuro, $Y =$ opaco o rossastro violaceo, X molto meno assorbente con colore giallo. Questo tipico pleocroismo, con un solo asse di buona trasparenza, è la principale causa delle difficoltà incontrate in queste prime ricerche ottiche. Dall'esame di schegge e frammenti (non è fin'ora stato possibile ottenere sezioni orientate, nè si notano sfaldature distinte) si determina $2V$ abbastanza piccolo su X e quindi birifrazione negativa e si verifica che l'asse meno assorbente ha indice di rifrazione minore degli altri due e quindi deve riferirsi a X .

Al goniometro, e con tutti i particolari artifici già usati per le misure angolari già riportate, si ottengono immagini rifratte da due coppie di facce: la $(10\bar{2}) (\bar{1}01)$ con angolo prismatico $28^\circ 32'$ e $(\bar{1}02) (00\bar{1})$ con angolo $34^\circ 45'$. La rifrazione visibile di solito è quella \perp a b (vicina ad X); scegliendo tra i cristallotti più piccoli e un po' meno assorbenti, e con forte illuminazione compare anche la rifrazione con vibrazione \parallel a b di forte assorbimento. Si è potuto quindi determinare per i cristalli meno assorbenti valori di Z oscillanti tra $2,02$ e $2,06$. I valori misurati con le rifrazioni \perp a b , ben visibili queste, sulle due coppie di prismi sopradette portano a valori per X variabili tra $1,90$ e $1,95$ ma, benchè si abbiano con questi due prismi i valori di n per due vibrazioni sul piano $X Y$ a distanza angolare abbastanza grande, pure non è possibile ricostruire neppure con una certa approssimazione l'elisse $X Y$ in quanto che le due vibrazioni sono a cavallo dell'asse X , una molto vicina e l'altra ad angolo alquanto maggiore ma non sufficiente per procedere al calcolo di Y , tanto più che, quando in un cristallo

rifrange l'un prisma, comunemente l'altro non dà rifrazioni (è in gioco il relativo sviluppo delle facce) e quindi la variabilità della rifrazione tra cristallo e cristallo, se pur piccola, toglierebbe ogni attendibilità ai risultati di detto calcolo.

Notiamo come per le proprietà ottiche e soprattutto per il valore degli indici di rifrazione molto elevati il minerale si distacchi fortemente da quelli del gruppo dell'epidoto con i quali sembrano esistere invece analogie cristallografiche, e si avvicini piuttosto ai silico-titanati, in particolare, per quanto riguarda la rifrazione, alla titanite.

Una volta stabilito sulla base morfologica e delle proprietà ottiche che il minerale non era riferibile ad alcuna specie mineralogica conosciuta, si è cercato di poterne determinare la costituzione chimica. Abbiamo già detto come della sabbia di Nettuno il minerale sia costituente molto raro. Alquanto più abbondante, ma sempre in un rapporto non superiore di 1 a 1000, lo si ritrova nei concentrati ilmenitici che si trovano tuttora accumulati sulla spiaggia prodotti delle lavorazioni che la Società «Cogne» aveva intrapreso sulla sabbia di Anzio. Con paziente e lungo lavoro, sfruttando i ben noti metodi di separazione magnetica e per densità, abbiamo potuto ottenere circa gr 1,5 di un concentrato pressochè al 95 %. Soprattutto lo zirconio, la monazite e alcuni tipi di spinelli, che hanno la stessa densità e lo stesso comportamento magnetico, presentano grandi difficoltà ad essere estratti del tutto. Su detto concentrato è stata eseguita una serie di determinazioni analitiche che hanno portato alla composizione centesimale seguente:

| | |
|---|--------|
| H ₂ O | ass. |
| SiO ₂ | 18,21 |
| TiO ₂ | 20,71 |
| ThO ₂ | 4,60 |
| (Y, Ce, ecc.) ₂ O ₃ | 43,45 |
| P ₂ O ₅ | 2,07 |
| FeO | 5,47 |
| CaO | 3,85 |
| MgO | 0,92 |
| Na ₂ O | 1,00 |
| | <hr/> |
| | 100,28 |

Il minerale è attaccato lentamente da acido solforico concentrato e a caldo.

Data la scarsità del materiale a disposizione non si sono potute fare determinazioni nè quantitative nè qualitative per il fluoro ed il cloro. Il rimarchevole contenuto in P₂O₅ deve essere, con buona probabilità, attribuito, oltrechè alla monazite, alla presenza di apatite come inclusione nel minerale. Infatti, al microscopio, questo mostra abbondanti inclusioni sotto forma di aghetti a indice di rifrazione nettamente inferiore a quello del minerale e con potenza birifrattiva bassa, in quantochè a nicols incrociati non hanno nessuna influenza sul comportamento ottico del minerale. Anche la separazione delle terre rare tra di loro per

ora non ha potuto essere eseguita, neppure sotto la più semplice forma di isolare le terre del gruppo del cerio da quelle dell'yttrio. Quindi sarebbe intempestivo voler assegnare, a questo punto delle ricerche, la esatta formula del minerale. Evidentemente si tratta di un silico-titanato di terre rare e torio con rapporto $\text{SiO}_2 : \text{TiO}_2 = 1 : 1$. Data la forte differenza di peso atomico tra il cerio e l'yttrio, rimane invece incerto il coefficiente da assegnare agli ossidi di terre rare Tr_2O_3 . Nessun minerale cristallizzato conosciuto corrisponde a questa composizione chimica. Solo la Tscheffkinita, il raro minerale non cristallino ritrovato nei M.ti Ilmen e considerato un prodotto di alterazione molto probabilmente eterogeneo, ha una composizione chimica che si potrebbe avvicinare a quella prevedibile per il nostro minerale sulla base dei dati chimici fin'ora ottenuti.

Geneticamente il minerale deve essere, a nostro parere, considerato come formatosi in fase intratellurica ortomagmatica nelle lave dei vulcani a sud di Roma. Molto probabilmente i petrografi che si sono occupati dello studio delle rocce vulcaniche della regione sopradetta e forse anche di altre regioni, avranno osservato nelle sezioni sottili il minerale quale raro componente accessorio e caratterizzato dall'alto indice di rifrazione e dal forte pleocroismo dal giallo al marrone rossastro scuro, attribuendolo ad altre specie mineralogiche già conosciute, in particolare all'ortite. L'ipotesi genetica da noi prospettata sulla base dei minerali che si ritrovano nella sabbia di Nettuno tra i quali predominanti i cristallotti di pirosseno, tipicamente vulcanici, sembra trovare conferma nella radioattività della sabbia stessa, ed, in particolare, del minerale descritto, che trova riscontro nelle ben note proprietà eccezionalmente radioattive nei tufi della regione stessa.

Considerando completi ed esaurienti i dati cristallografici già ottenuti, le nostre ricerche sono ora indirizzate a completare la conoscenza delle proprietà ottiche e alla determinazione esatta della composizione chimica per poter stabilire con precisione la formula del minerale. A questo scopo è necessario ottenere per lo meno gr. 5 di sostanza perfettamente pura. Ma se è relativamente facile ottenere concentrati al 50-60, o anche più, per cento, le ultime porzioni sono ben difficilmente separabili. Prevediamo che, riottenuto un concentrato analogo a quello sul quale sono stati eseguiti i saggi analitici, le ultime porzioni dovranno essere separate manualmente al binoculare. Al prof. Machatschki che gentilmente si è offerto per tentare l'esecuzione di un cristallo rotante ai raggi X i nostri migliori ringraziamenti. Da nostra parte stiamo apprestando il piccolo quantitativo necessario per l'esecuzione di uno spettro di polvere, ma la preparazione del campione ci è ritardata dalla necessità di dover scegliere i granuli poveri o, possibilmente, privi di inclusioni i quali sono estremamente rari.

Riassumendo quanto è stato riportato in questa Nota preliminare, segnaliamo tra i minerali della sabbia di Nettuno una specie nuova dalla quale sin'ora possono stabilirsi i seguenti dati ⁽¹⁾:

CRISTALLOGRAFIA. — Monoclino prismatico;

$$a : b : c = 2,047 : 1 : 2,380 \quad ; \quad \beta \ 113^\circ 28' \quad ; \quad p_0 : q_0 : r_0 = 1,162 : 2,183 : 1$$

$$r_2 : p_2 : q_2 = 0,458 : 0,532 : 1 \quad ; \quad \mu \ 66^\circ 32' \quad ; \quad p'_0 \ 1,267, q'_0 \ 2,380 \times 0,434.$$

(1) Per le notazioni cfr. DANA, *The System of Mineralogy*. New York, 1946.

FORME. — Ved. tabella p. 363.

ABITO. — Prismatico secondo [010] con maggior sviluppo della $\{102\}$.

GEMINATI. — Frequentissimi i geminati (100) di due individui; pure frequente l'unione parallela secondo la stessa faccia.

PROPRIETÀ FISICHE. — Non si notano sfaldature distinte. Frattura scheggiata concoide. Durezza 5,5. P. sp. 4,3. Nero, marrone, con lucentezza resinosa. Colore della polvere marrone. Poco trasparente. Radioattivo.

PROPRIETÀ OTTICHE. — Fortemente assorbente con $Z \geq Y > X$ con grande differenza tra X e gli altri due. Z = opaco, marrone intenso, Y = opaco, rossastro violaceo, X = giallo. Z = 2,02–2,06, Y = ?, X = 1,90–1,95. Orientazione Z = b, $X^{\wedge}a = 24^{\circ}$ nell'angolo ottuso. 2V piccolo su X. Birifrazione —.

COMPOSIZIONE CHIMICA. — Silico-titanato di terre rare con torio. SiO_2 e TiO_2 in rapporto 1 : 1. Contiene poco ferro, pochissimo calcio e magnesio. Composizione vicina alla Tscheffkinite. Solubile in H_2SO_4 concentrato a caldo.

GIACITURA. — Nella sabbia di Nettuno (Roma) come raro costituente. È accompagnato da pirosseni, granato, ilmenite, magnetite, ecc. Rappresenta quasi certamente uno dei minerali residui del disfacimento dei tufi a sud di Roma, e deve essere considerato come minerale accessorio formatosi in fase ortomagmatica. Molto raro.

ALTERAZIONI. — Non presenta segni di alterazione. Inclusioni bacillari numerose, molto probabilmente di apatite.

Proponiamo che il nuovo minerale venga chiamato « Perrierite » in memoria dell'illustre mineralogista italiano Carlo Perrier.

Botanica. — *Sulla origine delle radici avventizie sul caule in « Senecio angulatus » Linn.* Nota di MARIA VENTURA, presentata (*) dal Socio P. NEGRI.

In *Senecio angulatus* Linn. ho notato lungo i fusti, specialmente in quelli che toccano terra, delle protuberanze dapprima piccolissime, poi sempre più grandi, che finiscono col rompere l'epidermide e venir fuori: si tratta di radici avventizie che si formano o spontaneamente sul caule o, più frequentemente, in seguito allo stimolo del terreno su cui poggiano i cauli o di altri rami con cui vengono a contatto.

Già molti anni fa mi occupai della origine delle radici avventizie che nascono spontaneamente sui cauli di *Salvia Grahami* [10]; così ora mi sono proposta di prendere in esame il caso del *Senecio angulatus*. Dalla bibliografia che ho potuto consultare (molti lavori che avrei voluto leggere non mi è stato possibile averli) non mi risulta che alcuno si sia occupato di questa pianta.

Mangin [4] ha studiato soltanto le Monocotiledoni. Trécul [7] ha preso in esame *Hedera helix*, *Vinca minor*, *Urtica dioica*, *Lamium purpureum*, *Nuphar luteum*,

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

Primula: le ha studiate però superficialmente, senza far rimarcare, secondo quanto dice Lemaire [3], in quale zona di cellule del caule le radici avventizie abbiano origine. Reinke [5] ha preso in esame *Veronica beccabunga* e *Lysimachia nummularia*; Hansen [2] le Crocifere. Posteriormente a questi Autori Lemaire [3] ha studiato un gran numero di piante che sarebbe troppo lungo elencare e per le quali rimando al lavoro citato. In seguito anche Van Tieghem [9] si è occupato dell'origine delle radici laterali, ma ha considerato soltanto radici aventi origine dall'ipocotile, non da cauli adulti come è il mio caso, che non si può quindi paragonare con quelli descritti dal sudetto Autore.

Nella quasi totalità di queste piante la radice avventizia sul caule nasce totalmente dal periciclo; in due il periciclo contribuisce soltanto in parte alla formazione delle radici avventizie e precisamente in *Lotus uliginosus* il solo cilindro centrale è prodotto dal periciclo mentre le altre regioni provengono dalla corteccia del caule, in *Asperula odorata* il cilindro centrale è formato dal cambio e la corteccia e la cuffia si sviluppano a spese del periciclo (Lemaire [3]).

Radici di origine esogena si hanno nelle Crocifere (Hansen [2], Lemaire [3]).

In tre casi, *Viola palustris*, *Viola odorata*, *Vinca major*, i tessuti della radice nascono tutti a spese del cambio mentre il periciclo non entra nella loro produzione (Lemaire [3]). Però Van Tieghem [9], che ha ripreso lo studio di queste piante, nega questo fatto.

Nel 1925 Smith [6], studiando la formazione di radici su talee di *Coleus*, dice che lo sviluppo della radice avventizia si ha dal cambio. In seguito Carlson [1] ha preso di nuovo in esame talee di *Coleus Blumei* ed ha visto invece che lo sviluppo si ha dal periciclo.

Van der Lek [8] in *Ribes nigrum*, *Salix*, *Populus* dice che la radice avventizia è «in connessione col cambio, come una continuazione dei raggi midollari».

Nel 1932 in *Salvia Grahami* [10] trovai che le radici avventizie hanno origine dal cambio interfasciale. Non nego che è facile cadere in errore trattandosi di due file di cellule, cambio e periciclo, che spesso sono a contatto (per esempio tra un fascio vascolare e l'altro); nel caso di *Salvia Grahami* però questo errore non può essere stato commesso perchè, mentre la cerchia del cambio continua a produrre nuovo legno in tutta la sua lunghezza, nel punto dove ha dato origine alla radice la produzione del legno si arresta, cosicchè la base della radice, mentre originariamente si trovava allo stesso livello dell'ultima fila di cellule del legno circostante, dopo un po' di tempo, quando il resto del cambio ha funzionato, si viene a trovare incassata nel legno che è stato formato a destra e a sinistra, sopra e sotto, dal resto del cambio che non ha partecipato alla formazione della radice. In altre parole il cambio, nel punto in cui ha formato la radice, non ha prodotto più legno. Se invece fosse stato il periciclo a formare la radice, il legno si sarebbe prodotto uniformemente lungo la cerchia del cambio e la base della radice sarebbe stata spinta sempre più in fuori dall'accrescimento del legno sottostante, non rimarrebbe incassata in esso.

Anche in *Senecio angulatus* le radici avventizie si formarono tra un fascio e l'altro e sono prodotte dal cambio interfasciale. Ad un certo momento le cellule di questo meristema aumentano di dimensioni, si segmentano e danno

un piccolo abbozzo che, crescendo sempre più, viene a spingere in fuori periciclo, fleoterma e cortecchia fino a romperli e venir fuori. In seguito la giovane radice si mette in rapporto, per mezzo di corte tracheidi, coi fasci vascolari a destra e a sinistra. Anche qui, sebbene non vi sia abbondante struttura secondaria, ho riscontrato che la base della radice, come in *Salvia Grahami*, resta incassata nel legno che si è prodotto intorno per opera del circostante cambio; questo fatto, come ho già accennato, conferma l'origine della radice dal cambio.

CONCLUSIONE. — In *Senecio angulatus* Linn. le radici avventizie sul caule hanno origine dal cambio interfasciale.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] CARLSON M. C., *Origin of adventitious roots in « Coleus » cuttings*. « The botanical Gazette », vol. 87, N. 1, 1929, p. 119.
- [2] HANSEN A., *Vergleichende Untersuchungen ueber Adventivbildungen bei den Pflanzen*. « Abhand. d. Senckenb. naturf. Gesellsch. », XII.
- [3] LEMAIRE A., *Recherches sur l'origine et le développement des racines latérales chez les Dicotylédones*. « Ann. Sc. Nat. Bot. », série VII, T. 3, 1886, p. 163.
- [4] MANGIN L., *Origine et insertion des racines adventives et modification correlative de la tige chez les Monocotylédones*. « Ann. Sc. Nat. », série VI, T. 14, 1882.
- [5] REINKE, *Untersuchungen ueber Wachstumsgechichte und Morphologie der Phanerogamenwurzel*. « Bot. Abhand. von Hanstein », IV, 1871.
- [6] SMITH E. PHILIP, *The origin of adventitious growth in Coleus*. « Trans. and Proc. Bot. Soc. Edin. », 29, 1925, p. 145.
- [7] TRÉCUL, *Origine des racines adventives*. « Ann. Sc. Nat. », série III, t. 5, 6, 1846.
- [8] VAND DER LEK H. A. A., *Over de Wortelvorming van houtige stekken*. H. Veenman and Zonen, Wageningen 1925.
- [9] VAN TIEGHEM P. and DOULLIOT H., *Recherches comparatives sur l'origine des membres endogènes dans les plantes vasculaires*. « Ann. Sc. Nat., Bot. », série VII, t. 8, 1888.
- [10] VENTURA M., *Sull'origine delle radici avventizie nei rami di « Salvia Grahami » Benth.* « Ann. di Bot. », vol. XX, fasc. 1, p. 24, 1933.

Farmacologia. — *Indagini quantitative sul meccanismo d'azione antibatterica dei detergenti* (*). Nota I di P. BENIGNO e T. BERTI, presentata (**) dal Socio E. MENEGHETTI.

I detergenti, assieme a numerose altre sostanze tensioattive (coloranti, sali biliari, fosfolipidi), sono degli elettroliti colloidali: essi uniscono infatti alla natura ionica la caratteristica di dare origine, in determinate concentrazioni, alla formazione di micelle [1]. Queste proprietà fisico-chimiche condizionano la loro attività ed esse acquistano particolare valore in quello stadio dell'azione farmacologica che è caratterizzato dall'instaurarsi di rapporti tra il farmaco e la superficie che separa l'organo dall'ambiente esterno. Nel caso dei detergenti la

(*) Lavoro eseguito nel Centro di studio per la Chemioterapia del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto di Farmacologia dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

tendenza che essi hanno ad accumularsi sulla membrana della cellula [2], [3] può spiegare la comparsa dell'azione antibatterica posseduta da questi composti. Essi possono agire combinandosi con dei recettori superficiali o, come sostengono Kivela e collaboratori [4], esercitando una pressione osmotica molto alta e incompatibile con la vita. Altri Autori [5] pensano invece che l'azione di questi farmaci sia da ricercare in processi specifici di inibizione di particolari enzimi.

Alla soluzione di tali complessi problemi noi abbiamo portato un contributo di dati quantitativi che ci hanno permesso di determinare con sufficiente approssimazione alcune delle modalità attraverso le quali si svolge l'azione antibatterica dei detergenti [6], [7], [8], [9], [10].

In questi esperimenti si sono adoperati composti di natura anionica e cationica⁽¹⁾ e le ricerche sono state condotte sull'*Escherichia coli*⁽²⁾, in terreno sintetico di Fildes. Le prove vennero eseguite contemporaneamente sia in apparecchio di Warburg ($T = 38^{\circ}$; 66 oscillazioni doppie al minuto), sia in termostato ($T = 38^{\circ}$), adoperando la stessa quantità di composto e un uguale volume di terreno (cc. 3); questo fu insemato nei diversi esperimenti con un numero di germi abbastanza alto (superiore a 300 milioni). Adoperando tale inoculum lo sviluppo si osserva solo nei controlli mantenuti in agitazione, mentre in quelli posti in termostato il numero di *E. coli*, per le prime 24 ore, rimane costante. In queste condizioni sperimentali è stato possibile comparare l'azione dei farmaci sui germi in attivo sviluppo e su quelli in stasi moltiplicativa. Il quantitativo dei microrganismi presenti fu stabilito col metodo del conteggio indiretto in piastra all'inizio e poi, con opportuni prelievi, durante e alla fine dell'esperimento.

Per determinare la quantità di detergente fissata dai germi, si allontanarono questi dal terreno per centrifugazione (7.500 giri al minuto) e si eseguì il dosaggio sfruttando un'azione biologica posseduta da tali composti: la lisi delle emazie. Ciò è possibile perchè esiste un rapporto tra quantità di farmaco e numero di globuli rossi che vengono emolizzati [11].

Le variazioni morfologiche furono seguite al microscopio; il volume totale dei batteri presenti nella coltura venne misurato con una apposita provettina capillare, seguendo un metodo analogo a quello del conteggio diretto per centrifugazione.

AZIONE ANTIBATTERICA DEL CTAB. — La fissazione di questo composto ai germi avviene rapidamente, interessa una forte percentuale del farmaco ed è scarsamente influenzata dalla temperatura.

(1) Nel corso delle ricerche riferite furono usate le seguenti sostanze:

A) Sale sodico dell'estere solforico del 3,9 dietil tridecanol 6 (Tergitol 7), detergente anionico.

B) Sale sodico dell'estere solforico del 2 etil-esanol (Tergitol o8), detergente anionico.

C) Sale bisodico dell'estere solforico dell'acido 10-ossistearico, detergente anionico.

D) Sale bisodico dell'acido 9,10 diclorostearico-x-solfonico, detergente anionico.

E) 9,10 diclorostearato di sodio.

F) Bromuro di cetiltrimetilammonio (CTAB), detergente cationico.

(2) In queste ricerche è stato adoperato l'*E. coli* « ceppo Sanarelli » gentilmente fornitoci dall'Istituto di Patologia generale dell'Università di Padova.

TABELLA I.

| CTAB in γ | Temperatura | Tempo di contatto in minuti | CTAB trovato nel liquido ⁽¹⁾ in γ | CTAB fissato dai germi ⁽²⁾ % |
|------------------|-------------|-----------------------------|---|---|
| 1000 | 7° | 5' | 300 | 70 |
| | | 15' | 218 | 78,2 |
| | | 30' | 194 | 80,6 |
| | | 60' | 200 | 80 |
| | 38° | 5' | 240 | 76 |
| | | 15' | 172 | 82,8 |
| | | 30' | 160 | 84 |
| | | 60' | 122 | 87,8 |
| 500 | 38° | 60' | 50 | 90 |
| 2000 | 38° | 60' | 700 | 65 |

(1) Valori ottenuti con metodo biologico.

(2) Valori calcolati.

Numero di *E. coli* usati nell'esperimento = 1.030.000.000.

TABELLA II.

| Quantità di CTAB aggiunta | | Numero iniz. dei germi in milioni | Quantità di CTAB per milione di germi in g. mol. | Numero finale dei germi in milioni | |
|---------------------------|----------------|-----------------------------------|--|------------------------------------|------------|
| in g. mol. | Concentrazione | | | Warburg | Termostato |
| 41,2 · 10 ⁻⁹ | 1 : 200.000 | 3.220 | 12,8 · 10 ⁻¹² | 13.600 | 2.220 |
| | | 1.300 | 30,2 · 10 ⁻¹² | 6.100 | 1 |
| | | 1.050 | 38,5 · 10 ⁻¹² | 6 | 0 |
| 68,7 · 10 ⁻⁹ | 1 : 120.000 | 4.200 | 14,6 · 10 ⁻¹² | 10.000 | 4.250 |
| | | 3.200 | 21,4 · 10 ⁻¹² | 10.500 | 1.850 |
| | | 2.800 | 24,4 · 10 ⁻¹² | 5.700 | 550 |
| | | 2.500 | 27,5 · 10 ⁻¹² | 6.100 | 2 |
| | | 2.100 | 32,9 · 10 ⁻¹² | 8 | 0 |
| 13,7 · 10 ⁻⁸ | 1 : 60.000 | 7.100 | 19,5 · 10 ⁻¹² | 14.500 | 6.400 |
| | | 4.680 | 30,2 · 10 ⁻¹² | 810 | 1 |
| | | 3.830 | 35,7 · 10 ⁻¹² | 0 | 0 |

Durata dell'esperimento: 6 h.

I risultati, raggruppati nella tabella I, sono molto simili a quelli che si ottengono quando si usano dei microrganismi uccisi col calore. Questa analogia indica che nel fenomeno di accumulo del farmaco non sono interessati processi vitali. È probabile che la fissazione del detergente ai microrganismi sia in relazione con la tensioattività di questi composti che, come è noto, si assorbono su substrati diversi [2], [3], [4].

L'attività del CTAB è condizionata dal rapporto tra numero di batteri e concentrazione di farmaco (tabella II).

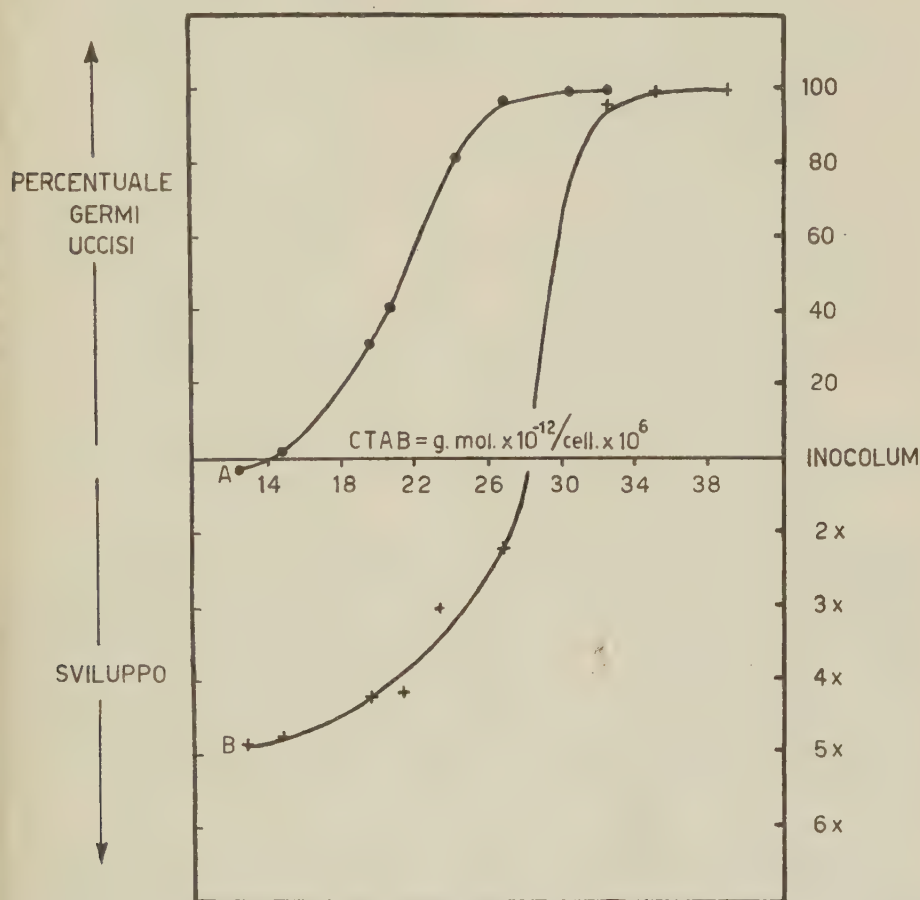


Fig. 1.

Curva A: esperimenti in termostato. Curva B: esperimenti in apparecchio di Warburg.

Quando si adoperano delle concentrazioni ravvicinate è possibile infatti determinare la quantità minima di sostanza che si deve fissare al germe per causarne la morte; per dosi anche di poco inferiori il CTAB diventa inefficace (la curva della fig. 1 mostra che si tratta di un'azione del tipo « tutto o niente »).

L'influenza del quantitativo di *E. coli* presente nel liquido nutritizio risulta evidente quando si versa nel terreno, in periodi successivi di sviluppo, una dose di sostanza attiva sull'inoculum: in queste condizioni sperimentali l'azione antibatterica del CTAB scompare quando il quantitativo di germi, aumentato in

seguito ai processi di moltiplicazione, diventa maggiore di quello minimo che può essere ucciso dalla dose di farmaco aggiunto.

Inoltre l'aggiunta di germi morti ad una coltura in cui era sciolta la quantità minima di farmaco, capace di uccidere i microrganismi presenti nel liquido, rende il detergente inattivo [7].

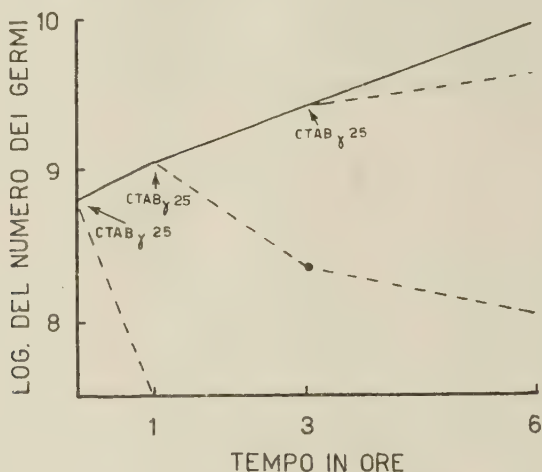


Fig. 2.

Linea continua = sviluppo del controllo.

Linea tratteggiata: variazioni del numero dei germi dopo aggiunta di $\gamma 25$ di CTAB, in diversi periodi dello sviluppo.

Il CTAB, contrariamente a quanto è stato visto per alcuni disinfettanti [12] e chemioterapici [13], è più attivo quando il germe è in condizioni tali da potersi sviluppare; si può infatti stabilire con sufficiente precisione che mentre per uccidere i microrganismi in riposo riproduttivo sono necessarie $17,6 \cdot 10^6$ molecole per germe, questo valore è di $21,5 \cdot 10^6$ quando l'*E. coli* è in attivo sviluppo [7].

La bibliografia sarà riportata alla fine della Nota II.

Biologia (Biochimica). — *Aminazione biologica dei chetoacidi aromatici* (*). Nota di DORIANO CAVALLINI e CARLO DE MARCO, presentata (**) dal Socio G. VERNONI.

L'aminazione dei chetoacidi ad aminoacidi è un processo biochimico assai comune in natura. Gli aminoacidi non essenziali sono infatti sintetizzati a partire da composti che compaiono nel corso del metabolismo, generalmente dei chetoacidi, mentre la maggior parte degli aminoacidi essenziali, ad eccezione della lisina che sembra essere l'unico aminoacido essenziale *sensu stricto* e che deve

(*) Ricerche eseguite nel Centro di studio per la Fisiopatologia del C. N. R. presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

essere somministrato come tale ⁽¹⁾, possono essere sostituiti nella dieta dai rispettivi chetoacidi o ossiacidi ⁽²⁻³⁾.

L'essenzialità di un aminoacido sembra quindi esser dovuta, facendo eccezione per la lisina, all'incapacità dell'organismo di saper sintetizzare la catena carboniosa del chetoacido relativo, ed ogni qual volta che l'animale può disporre del chetoacido, o naturalmente, mediante le consuete operazioni metaboliche a partire da altri composti, o artificialmente per la sua somministrazione con la dieta, sono pronti nei tessuti dei meccanismi che con maggiore o minore velocità lo trasformano nel relativo aminoacido. La insostituibilità di qualche aminoacido con il relativo chetoacido sembra inoltre dovuta, più che ad una eccezione peculiare, ad una particolare instabilità del chetoacido il quale si deteriora con una velocità superiore a quella della sua aminazione,

Se gli esperimenti di nutrizione concordano nel dimostrare quanto affermato sopra, assai poca chiarezza esiste circa i meccanismi messi in gioco dall'organismo per effettuare tale sintesi. La transaminazione non sembra finora avere un valore generale e praticamente solo tre aminoacidi, l'acido aspartico, l'acido glutamico e l'alanina ⁽⁴⁻⁵⁾, possono essere sintetizzati in questo modo dai rispettivi chetoacidi, ognuno di questi potendosi appropriare del gruppo aminico esistente in uno degli altri due aminoacidi. Anche l'aminazione acetilante di Knoop e di du Vigneaud ⁽⁶⁾ non è ancora entrata a far parte definitivamente dei meccanismi di aminazione degli aminoacidi naturali, non solo perchè si rivolge ad un numero assai ristretto di composti, ma anche e specialmente per la difficoltà di interpretare i dati esistenti a suo favore.

In un precedente lavoro gli autori di questa Nota hanno portato un contributo alla risoluzione di questo problema. Infatti è stata dimostrata la possibilità che un nuovo chetoacido, il fenilpiruvico, possa essere aminato biologicamente *in vitro* a fenilalanina a mezzo della poltiglia di fene. L'importanza di questo fatto non risiede tanto nella dimostrazione dell'aminazione di un altro chetoacido oltre a quelli già noti quanto nella impossibilità di far avvenire questa reazione con i modelli enzimatici classici usati per la transaminazione ⁽⁷⁾ e per la esclusione, in questo caso da noi ottenuta, della aminazione acetilante. Dovrebbe quindi trattarsi o di un nuovo tipo di aminazione che escluda le due già note, o di una transaminazione con un enzima specifico, differente da quelli noti e che sia capace di utilizzare almeno in parte la glutamina come donatore di gruppi aminici. Con la presente Nota vogliamo riferire sulle ulteriori ricerche eseguite in questo campo, sulla sua estensione all'aminazione di un altro chetoacido, il *p*-ossifenilpiruvico, e sulla capacità di una altra amide, l'asparagina di favorire l'aminazione biologica di questi due composti.

(1) N. WEISSMAN, R. SCHOENHEIMER, « J. Biol. Chem. », 140, 779 (1941).

(2) D. A. MC. GINTY, H. B. LEWIS, C. S. MARBEL, « J. Biol. Chem. », 62, 75 (1924-25).

(3) E. C. BUBL, J. S. BUTTS, « J. Biol. Chem. », 180, 839 (1949).

(4) P. P. COHEN, « Biochem. J. », 33, 1478 (1939).

(5) D. E. GREEN, L. F. LELOIR, V. NOCITO, « J. Biol. Chem. », 161, 559 (1945).

(6) V. DU VIGNEAUD, O. J. IRISH, « J. Biol. Chem. », 122, 349 (1938).

(7) D. CAVALLINI, C. DE MARCO, « Rend. Acc. Lincei », VII, 264 (1949).

Ci siamo preoccupati dapprima di stabilire il pH optimum per la reazione, che è stato trovato tra 8 e 8,5 per l'aminazione dell'acido fenilpiruvico, e tutti i lavori successivi sono stati pertanto eseguiti in tale campo di pH. È stato quindi preparato l'acido *p*-ossifenilpiruvico secondo Neubauer e Fromherz⁽⁸⁾ e

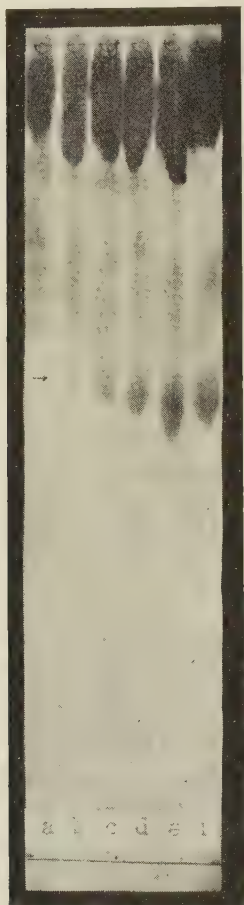


Fig. 1.

a controllo (poltiglia di rene a 39° per 2 h)
b + 20 mg Na fenilpiruvato
c + » » » » + 5 mg glutamina
d + » » » » + 10 » »
e + » » » » + 15 » »
f + » » » » + 20 » »
 la freccia indica la posizione della fenilalanina

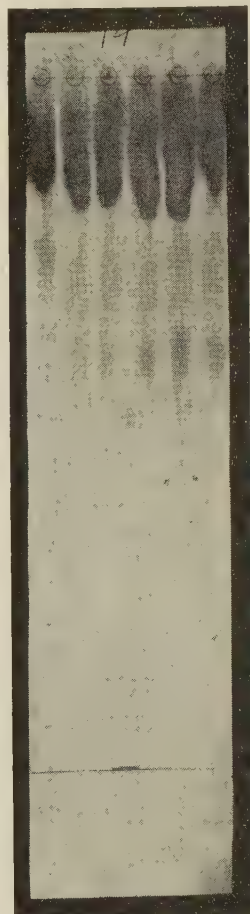


Fig. 2.

Nello stesso ordine come nella fig. 1 ad eccezione che al posto della glutamina si è usata l'asparagina.

ricristallizzato secondo Raper e Wormall⁽⁹⁾ p. f. 215-18°. Quest'ultimo composto messo in contatto con la poltiglia di rene con le stesse modalità descritte nel lavoro precedente, a cui si rimanda per i dettagli di tecnica, ha determinato

(8) O. NEUBAUER, K. FROMHERZ, «Z. Physiol. Chem.», 70, 326 (1910-11).

(9) H. S. RAPER, A. WORMALL, «Biochem. J.», 19, 84 (1925).

la produzione di quantità bene apprezzabili di tirosina e si è ottenuto un aumento di questa produzione a mezzo della glutamina aggiunta in quantità ponderali uguali al chetoacido. Anche in questo caso l'acido glutamico ha esercitato una azione favorente più scarsa della sua amide. Siamo quindi passati a saggiare com-

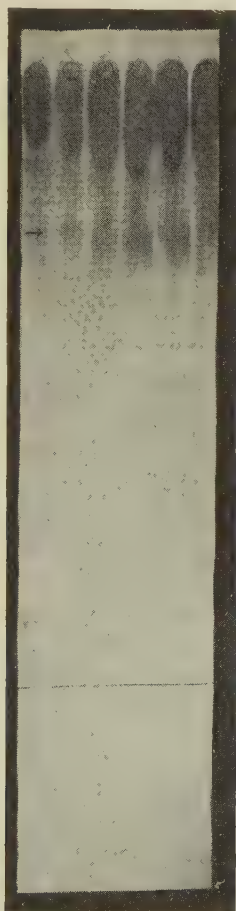


Fig. 3.

- a controllo (poltiglia di rene a 39° per 2 h)
 b + 20 mg Na *p*-ossifenilpiruvato
 c + » » » + 5 mg glutamina
 d + » » » + 10 » »
 e + » » » + 15 » »
 f + » » » + 20 » »

la freccia indica la posizione della tirosina

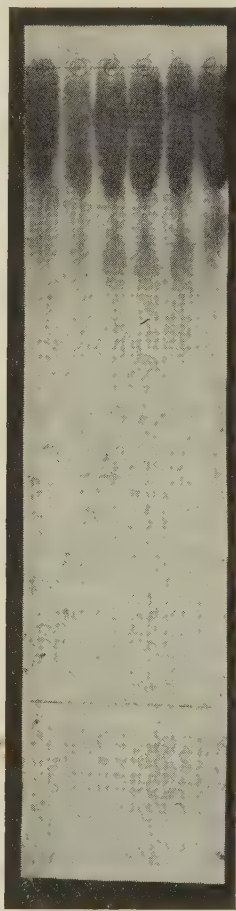


Fig. 4.

Nello stesso ordine come nella fig. 3 ad eccezione che al posto della glutamina si è usata l'asparagina.

parativamente l'effetto della glutamina e della asparagina su ambedue le reazioni aminative. Per ottenere dei risultati più dimostrativi abbiamo pensato di diminuire la velocità della reazione usando una concentrazione di poltiglia renale metà di quella usata nel lavoro precedente ed osservare l'effetto della asparagina e della glutamina aggiunte ai due sistemi a dosi crescenti. Con questo artificio si ottiene infatti che (ved. figure) il chetoacido aggiunto alla poltiglia da solo

determina delle quantità assai scarse di aminoacido mentre in presenza di glutamina o di asparagina se ne formano delle quantità di molto superiori, che sono chiaramente in rapporto alla quantità dell'amide aggiunta. L'azione della asparagina è tuttavia meno efficace di quella della glutamina e l'acido aspartico nelle stesse condizioni è ancora meno attivo della sua amide. L'acido glutamico in tutti e due i casi esercita una attività inferiore o al massimo uguale a quella della glutamina. I seguenti composti si sono invece mostrati del tutto inerti di fronte alle due reazioni aminative: acetamide, formamide, ossalamide, succinamide, nicotinamide, cloruro d'ammonio - quest'ultimo sia da solo che in aggiunta all'acido glutamico. Inoltre la glicina, l'alanina e l'ornitina non possono sostituire la glutamina o l'acido glutamico.

Da quanto sopra possiamo concludere che effettivamente la poltiglia di rene è capace di sintetizzare tanto la fenilalanina come la tirosina a partire dai rispettivi chetoacidi, che la glutamina e la asparagina esercitano un effetto favorente su questa sintesi che è generalmente superiore a quello esercitato dall'acido glutamico ed aspartico, e che un notevole numero di amidi provate non possono sostituire le due naturali. Resta tuttavia aperta la questione se l'effetto favorente dovuto all'acido glutamico sia dovuto ad una vera e propria reazione transaminativa oppure alla produzione di glutamina nel corso della reazione; come anche resta da risolvere il problema se la glutamina (o l'asparagina) entri nella reazione cedendo il suo radicale amidico o quello aminico oppure se debba essere in precedenza idrolizzata ad acido glutamico e quindi parteciparvi per via transaminativa. Per cercare di chiarire questo punto abbiamo preparato dal cuore di maiale la transaminasi col metodo descritto da Cohen⁽¹⁰⁾. Ci siamo accertati della sua attività saggiandola di fronte al sistema acido glutamico-piruvato ed abbiamo inoltre confermata l'incapacità della glutamina di sostituire l'acido glutamico in questo sistema. Messo a contatto questo preparato di fronte alle diverse combinazioni di acido glutamico e glutamina con acido fenilpiruvico e p-ossifenilpiruvico non abbiamo potuto constatare alcuna reazione transaminativa, in accordo con i dati ottenuti in precedenza da Virtanen e Laine⁽¹¹⁾ e Rautanen⁽¹²⁾. Applicando al rene di vitello la stessa tecnica di Cohen per l'estrazione della transaminasi del cuore abbiamo ancora ottenuti dei dati negativi. Abbiamo allora rivolta la nostra attenzione ad una eventuale produzione di glutamina con la poltiglia di rene a partire dall'acido glutamico aggiunto. Anche questi tentativi sono stati infruttuosi; cromatograficamente ed usando un adatto solvente è possibile svelare tracce minime di glutamina che non sono tuttavia comparse incubando acido glutamico con poltiglia renale nelle stesse condizioni e per la stessa durata delle prove di aminazione. Abbiamo inoltre osservato, determinando⁽¹³⁾ cromatograficamente i chetoacidi, che durante la reazione aminativa dell'acido fenilpiruvico a fenilalanina con glutamina si forma una certa quantità di acido α chetoglutarico che non compare incubando la poltiglia con la sola glutamina.

(10) P. P. COHEN, «J. Biol. Chem.», 136, 565 (1940).

(11) A. J. VIRTANEN, T. LAINE, «Biochem. Z.», 308, 213 (1941).

(12) N. RAUTANEN, «J. Biol. Chem.», 163, 687 (1946).

(13) D. CAVALLINI, N. FRONTALI, G. TOSCHI, «Nature», 164, 792 (1949).

I risultati ottenuti stanno evidentemente a dimostrare che in questa reazione aminativa non può escludersi la partecipazione del radicale aminico della glutamina come pensavamo in un primo tempo data la meno efficace azione attivante esercitata dall'acido glutamico. Tuttavia anche ammettendo l'esistenza di una transaminasi renale specifica per l'aminazione dei due chetoacidi aromatici, resta accertato che la glutamina come tale deve avere una importanza particolare per questa reazione. Infatti seguendo cromatograficamente l'idrolisi della glutamina nella poltiglia renale nelle stesse condizioni sperimentali usate per l'aminazione, al termine delle due ore soltanto una frazione, che dall'intensità della macchia possiamo grossolanamente giudicare corrispondente al 50%, era idrolizzata ad acido glutamico. Tenendo ora presente che nelle reazioni transaminative la glutamina non può sostituire l'acido glutamico⁽¹⁾, è evidente che a parità di peso la glutamina avrebbe dovuto esercitare un effetto esaltante inferiore e non superiore a quello dell'acido glutamico.

Biologia. — *Osservazioni sopra la localizzazione dell'abbozzo del telencefalo nella neurula degli anfibî*^(*). Nota di LEO RAUNICH, presentata^(**) dal Corrisp. G. BRUNELLI.

La localizzazione delle varie parti del sistema nervoso centrale durante lo sviluppo embrionale, allo stadio di neurula, è un problema che è stato trattato solo in modo assai incompleto. Dirò che si conosce esattamente solo la topografia dell'abbozzo dell'occhio, secondo le classiche ricerche del Woerdeman⁽¹⁾ e di Manchot⁽²⁾, e quella dell'epifisi, secondo Van De Kamer⁽³⁾. Si sa inoltre approssimativamente che i 2/3 anteriori della piastra midollare costituiranno l'encefalo, mentre il 1/3 posteriore darà il midollo spinale, secondo i dati di Manchot⁽⁴⁾. Per il resto, però, i dati sono oltremodo scarsi. Aggiungerò che non è neppure definitivamente risolto il problema del limite anteriore del sistema nervoso, in quanto è ancora controverso se il cerchione trasverso partecipi o meno alla costituzione dell'encefalo; secondo Woerdeman⁽⁵⁾, e recentemente Fautrez⁽⁶⁾,

(*) Ricerche eseguite presso l'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Bologna, diretto dal prof. P. Pasquini, con l'ausilio di un contributo del C. N. R. (1950).

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1950.

(1) M. W. WOERDEMAN, *Experimentelle Untersuchungen über Lage und Bau der augenbildenden Bezirke in der Medullarplatte beim Axolotl*. «Roux'Arch.», 116, 220 (1929).

(2) E. MANCHOT, *Abgrenzung des Augenmaterials und anderer Teilbezirke in der Medullarplatte; die Teilbewegungen während der Auffaltung (Farbmarkierungsversuche an Keimen von Urodelen)*. «Roux'Arch.», 116, 689 (1929).

(3) J. J. VAN DE KAMER, *Over de Ontwikkeling, de Determinatie en de Betekenis van de Epiphyse en de Paraphyse van de Amphibiën* (1949).

(4) E. MANCHOT, loc. cit.

(5) M. W. WOERDEMAN, loc. cit.

(6) J. FAUTREZ, *La signification de la partie céphalique du bourrelet de la plaque médullaire chez les Urodèles*. «Bull. de l'Acad. Belg. (Sci.)», 28, 391 (1942).

il cercine trasverso non ha nulla a che vedere col sistema nervoso centrale; secondo Hörstadius e Sellman⁽⁷⁾, invece, la parte di cercine prospiciente la piastra midollare darebbe tessuto nervoso, mentre la parte esterna darebbe epidermide, in altri termini: il limite fra epidermide e tessuto nervoso decorrerebbe sulla cresta del cercine trasverso.

Nella presente Nota desidero esporre alcuni dati di fatto, scaturiti da una lunga serie di indagini sperimentali da me condotte sopra la piastra midollare, che contribuiscono a risolvere definitivamente il problema del destino del futuro cercine trasverso. In un lavoro, pubblicato parecchi anni or sono⁽⁸⁾, avevo fatto notare come la rotazione di 180° di una metà, destra o sinistra, di piastra midollare, porta, a partire da un determinato stadio di sviluppo (blastoporo a fessura), alla formazione di un cervello con la metà operata in posizione invertita. È chiaro, quindi, che a seconda della portata del taglio anteriormente, a seconda cioè di quanto volontariamente o involontariamente si lascia in situ, si ottengono parti di encefalo perfettamente normali, ben delimitabili dalla parte invertita, e che possono fornire una assai precisa chiarificazione del problema della localizzazione topografica di alcune regioni dell'encefalo. Dalla esposizione degli esperimenti risulterà più chiaro quanto detto ora.

Gli esperimenti sono stati eseguiti allo stadio di neurula giovane, con cercini appena abbozzati o già nettamente visibili, di *Triton taeniatus*, *Triton alpestris* e *Axolotl*, a uno stadio cioè in cui tutti gli elementi della piastra midollare sono ancora situati in superficie, secondo i dati del Woerdeman⁽⁹⁾. Delle molte centinaia di operazioni di vario tipo eseguite, riporto qui solo quelle che contribuiscono alla risoluzione del problema della localizzazione del telencefalo e del destino del cercine trasverso. Il tipo di operazione, la zona ruotata e tutti gli altri dettagli verranno illustrati trattando di ogni singolo gruppo di esperimenti. Noto però sin d'ora che il lembo ruotato di piastra midollare era sempre puro, senza elementi di tetto archenterico, che è sempre stato lasciato integro. Noto per incidenza che ho pure eseguito numerose operazioni di trapianto di segmenti di cercine neurale e di piccoli tratti di piastra midollare sul fianco di embrioni ospiti; i risultati conseguiti non sono però riusciti chiari ed univoci, per cui in questa Nota non ne faccio cenno.

A) Rotazione dei 3/4 anteriori destri di piastra midollare, con tutta la porzione relativa di cercine neurale (ved. fig. 1). In questo tipo di operazione, senza eccezione alcuna, tutta la metà destra del cervello, dal telencefalo alla fine del midollo allungato, si è differenziata in posizione invertita. Anteriormente, cioè, accanto al telencefalo normale sinistro, sviluppato esattamente a metà, si trova metà midollo allungato, mentre nella regione del rombencefalo si è ben differenziato il telencefalo ruotato.

(7) S. HÖRSTADIUS, S. SELLMAN, *Experimentelle Untersuchungen über die Determination des knorpeligen Kopfskelettes bei Urodelen*. «Nova Acta Reg. Soc. Scient. Upsaliensis», ser. IV, 13, p. 1. (1946).

(8) L. RAUNICH, *Sulla determinazione della piastra midollare negli Urodeli*. «Arch. Zool. Ital.», 26, 69 (1939).

(9) M. W. WOERDEMAN, loc. cit.

B) Rotazione di una striscia mediana di piastra midollare, comprendente un tratto di cercine trasverso, come indicato nella fig. 2. Questo tipo di operazione è importante perchè in tutti i casi (12), senza eccezione, manca completamente il telencefalo dalla parte operata. Sopra i complessissimi fenomeni regolativi che ho riscontrato in questi embrioni operati non è il caso di intrattenersi, perchè ci porterebbero assai al di là del limite prefisso dalla Nota presente; un

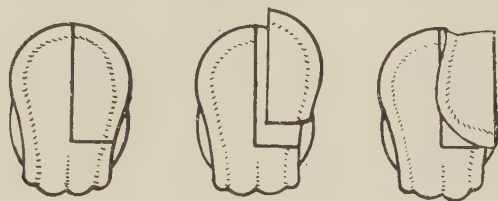


fig. 1

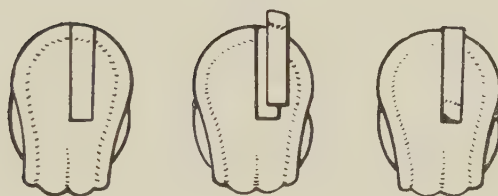


fig. 2

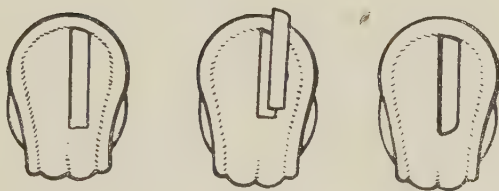


fig. 3

fatto però è interessante, e merita di essere messo in evidenza, riservandomi di entrare in dettagli su tale problema in un prossimo lavoro, ed è la costante assenza dell'occhio dalla parte operata. Si potrà obiettare che la mancanza dell'occhio è conseguenza logica dell'asportazione dell'abbozzo presuntivo, dell'occhio, compreso, secondo i classici schemi di Woerdeman⁽¹⁰⁾ e Manchot⁽¹¹⁾, nella regione ruotata. Tuttavia il problema della determinazione dell'occhio e dei fattori

(10) M. W. WOERDEMAN, loc. cit.

(11) E. MANCHOT, loc. cit.

che intervengono nel suo sviluppo è ancora aperto, e fin d'ora appare di una complessità assai superiore di quanto prospettato sinora. Così nel tipo di operazione successivo (tipo *C*), è pure stato asportato l'abbozzo dell'occhio, ma non si è mai notata la sua assenza dal lato operato; il tipo di operazione *B* e *C* differiscono cioè solo per la piccola porzione di cercine trasverso, che è compreso nella *B*, non compreso nella *C*. Questo fatto richiama l'attenzione sopra il cercine trasverso e sopra la zona subito adiacente di piastra midollare.

C) Rotazione di una striscia mediana di piastra midollare, identica a quella dell'operazione *B*, ma senza il pezzetto di cercine (ved. fig. 3). Il limite anteriore del pezzo ruotato coincideva esattamente col limite anteriore della piastra midollare, e fu posta molta attenzione a non comprendere nel lembo neppure un piccolo tratto di cercine. I risultati di questo tipo di operazione acquistano tutta l'importanza se raffrontati con quelli del tipo precedente (*B*); il telencefalo destro, infatti, a differenza da quanto riscontrato nel tipo *B*, è sempre presente e di aspetto normale. E giova pure notare che anche l'occhio, dalla parte destra, è costantemente presente e normale, anche se talora di dimensioni lievemente più piccole di quello controlaterale.

D) Rotazione dei $3/4$ anteriori destri di piastra midollare, senza cercine (ved. fig. 4). In tutti i casi in cui anteriormente il taglio decorreva esattamente alla base del cercine, il telencefalo destro era presente e normale. Si poteva avere una riduzione di grandezza del telencefalo destro in tutti quei casi in cui nel lembo ruotato (come risulta dal protocollo) era compreso un piccolo tratto di cercine trasverso.

Da quanto esposto risulta chiaramente un fatto: a cercine trasversale integro, il telencefalo risulta normale; a piccole difettosità del cercine trasverso corrisponde una riduzione delle dimensioni del telencefalo relativo; mancando il cercine trasverso manca il telencefalo corrispondente; anzi per aversi la mancanza del telencefalo basta l'asportazione di quel piccolo tratto di cercine trasverso indicato all'operazione *B*. Questo fatto non è altrimenti interpretabile se non ammettendo che nella piccola porzione di cercine trasverso, corrispondente per estensione a circa metà larghezza massima della piastra midollare, sia localizzato l'abbozzo del telencefalo (ved. fig. 5). Questo risultato conferma pienamente quanto prospettato da Hörstadius e Sellman⁽¹²⁾ nel loro accuratissimo lavoro sopra lo sviluppo della cresta neurale negli Urodeli, in base ad esperimenti con contrassegni vitali, e cioè che la porzione anteriore del cercine neurale, cioè il cercine trasverso, dà in primo luogo sostanza nervosa.

Desidero ancora mettere in evidenza un fatto, scaturito casualmente da un gruppo di esperimenti, e che contribuisce, in piccola misura, a mettere in luce i fattori che intervengono nel determinare il differenziamento del telencefalo.

Se si ruota un lembo quadrato di piastra midollare, come indicato alla fig. 6, senza toccare il tetto archenterico, si ottiene la inversione di un tratto di encefalo che comprende il diencefalo e il mesencefalo; talora si ottiene posterior-

(12) S. HÖRSTADIUS e S. SELLMAN, loc. cit.

mente il differenziamento di un piccolo occhio ⁽¹³⁾. Ma quello che importa di mettere in evidenza è il fatto che il telencefalo, in tutte queste operazioni, è risultato impari, senza alcuna eccezione. Questo fatto è importante perchè la imparità degli organi nervosi e di senso craniali era sempre stata ottenuta mediante alterazioni del tetto archenterico sottostante: la bibliografia sull'argomento è vastissima e ben nota. Ma nei miei esperimenti il tetto archenterico, come è posto in evidenza, non è stato

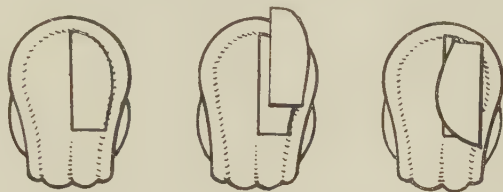


fig. 4



fig. 5

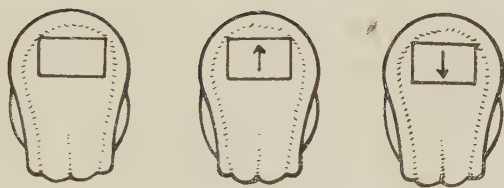


fig. 6

toccato, per cui occorre necessariamente concludere che il differenziamento bilaterale del telencefalo viene influenzato dalle regioni adiacenti della piastra midollare.

In conclusione, quindi, dai presenti esperimenti risulta chiaramente che il cerchione trasverso dà origine al telencefalo, e che la bilateralità di quest'ultimo non è dipendente da influenze che partono dal tetto dell'archenteron, bensì da influenze che vengono esercitate dalle regioni adiacenti della piastra midollare.

(13) È noto che questo genere di esperimento, classico e riportato in tutti i trattati di Embriologia sperimentale, fu ideato ed eseguito dallo Spemann nel 1912; tuttavia lo Spemann ruotò anche tutto il tetto archenterico sottostante, di cui è ben nota l'importanza nella determinazione della piastra midollare, per cui i suoi risultati valevano solo per il complesso piastra midollare + substrato.

Biologia. — *Studio comparativo della massa di Giardina nei «Dytiscidae»* (*). Nota di ENRICO URBANI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Nel dibattuto problema della origine dell'oocite, delle cellule nutrici e delle cellule follicolari negli Insetti (Stein, Lubbock, Tichomiroff ed altri) spetta a Giardina (1901)⁽¹⁾ il merito di aver stabilito nel *Dytiscus marginalis* come da un solo oogonio si originino un oocite e quindici cellule nutrici. Il processo si realizza attraverso quattro mitosi particolari che l'A. chiama « differenziali » nelle quali la cromatina nucleare, anzichè ripartirsi egualmente nelle cellule figlie, rimane in gran parte concentrata, in ognuna delle quattro mitosi, in una sola cellula: il preoocite. L'oocite riceve così la maggior parte di sostanza nucleare sotto forma di un corpo che prende il nome di anello di Giardina, o massa di Giardina, o corpo cromatico o massa cromatica.

Il corpo cromatico con l'accrescimento dell'oocite si disgrega e perde la sua fisionomia morfologica. Tale corpo può, in un certo senso, essere considerato come un determinante germinale benchè discrimini l'oocite dalle cellule nutrici e non, come si intende comunemente per i determinanti germinali, la linea somatica dalla linea germinale.

Partendo dalla ipotesi di Cotronei (1949, 1950)^(2,3) sulla importanza degli acidi nucleici nel problema dei determinanti germinali mi sono proposto di studiare la ripartizione degli acidi desossiribonucleico e ribonucleico nella oogenesi del Dytisco con particolare riguardo alla natura e alla funzione della massa di Giardina ed ai rapporti tra cellule nutrici ed oocite. I risultati da me ottenuti sono stati oggetto di due Note e una Memoria (1950)⁽⁴⁾ ed ho confermato le osservazioni di altri Autori sulla esistenza di acido desossiribonucleico e dimostrato la presenza nella massa cromatica di acido ribonucleico. Le tecniche da me usate mi hanno permesso di stabilire che la massa cromatica è in un primo tempo prevalentemente costituita di acido desossiribonucleico mentre in un secondo tempo, quando l'oocite si accresce e questa inizia la sua disgregazione, si può dimostrare una forte prevalenza di acido ribonucleico. La estinzione in luce U. V. permetterà di stabilire come variano i rapporti quantitativi dei due tipi di acidi durante l'evoluzione e la disgregazione della massa cromatica. Le mie osservazioni hanno inoltre dimostrato stretti rapporti tra gli acidi nucleici della massa di Giardina e l'acido ribonucleico ooplasmatico durante l'accrescimento dell'oocite.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) A. GIARDINA, «Intern. Monatsch. für Anat. und Physiol.», 18, 417 (1901).

(2) G. COTRONEI, «Riv. di Biologia», 41, 387 (1949).

(3) G. COTRONEI, «Acc. Naz. Lincei» Rendiconto della adunanza solenne del 4 giugno 1950, vol. V, p. 189.

(4) E. URBANI, «Rivista di Biologia», 42, 413 (1950).

Nella Memoria (1950)⁽⁴⁾ sulla massa di Giardina dell'oocite di *Dytiscus marginalis* ho prospettato l'utilità di un lavoro comparativo sulla oogenesi di diversi Ditiscidi. Questo studio può condurre a conclusioni di due ordini concettuali. *Primo*: l'esame comparativo in diverse specie di Ditiscidi sulla presenza o meno della massa cromatica può illuminare sulla funzione e sul significato di questa formazione nucleare. Dall'esame della letteratura risulta che nel *Dytiscidae*, *Cybister tripunctatus*, Vardé (1930)⁽⁵⁾ non ha trovato la massa cromatica ma dei grossi nucleoli che questo A. ritiene possano sostituire questa formazione che avrebbe il valore di trofocromatina. Già Buchner (1910)⁽⁶⁾ nel suo studio sulla *Sagitta* aveva avanzato l'ipotesi che la sfera reticolata che si trova nell'uovo di questa specie, uovo il nucleo del quale è sprovvisto di nucleolo, avesse il valore di sostanza nucleoloide e ravvicinava la sfera reticolata alla massa cromatica del Ditisco, animale anche questo con oociti sprovvisti di un vero nucleolo (cfr. E. B. Wilson 1925)⁽⁷⁾. Da queste premesse è chiara la natura delle ipotesi e delle deduzioni che si possono ricavare dagli accertamenti obbiettivi. *Secondo*: lo studio comparativo mira a vedere i rapporti tra una determinata formazione citologica e la omogeneità sistematica delle diverse forme della Famiglia dei *Dytiscidae*.

Oggetto della presente Nota è la esposizione di una prima serie di osservazioni da me effettuate su quindici specie (ed una aberrazione) della famiglia dei *Dytiscidae*. In questa prima Nota viene presa solamente in considerazione la presenza o l'assenza della massa cromatica nei preoociti della zona di differenziazione dell'ovaio e negli oociti prescindendo dal numero delle divisioni differenziali*; queste, come è noto, nel *D. marginalis* sono quattro e si hanno un oocite e quindici cellule nutrici. In un altro coleottero acquatico, il *Gyrinidae Dineutes nigror* (Gen. *Dineutes* Aubé 1838) Hegner e Russel (1916)⁽⁸⁾ hanno visto che si hanno solamente tre divisioni differenziali e si originano da un oogonio un oocite e sette cellule nutrici. Con uno studio ulteriore potrò precisare quali specie da me esaminate abbiano identità di comportamento nel numero delle divisioni riduzionali e nel numero delle cellule nutrici formate con il *D. marginalis* assunto come prototipo dei fenomeni in questione.

Gli esemplari che saranno appresso indicati sono stati quasi tutti da me raccolti nei dintorni di Roma (località Due Ponti, Grottarossa, Lavinio, Villaggio Colonna, Acilia), ad eccezione di alcuni inviati dai Dottori Bacci e Battaglia della Stazione Zoologica di Napoli che vivamente ringrazio. Gli esemplari sono stati dissezionati al binoculare e gli ovai fissati in Bouin, Zenker acetico o formolico, Carnoy, Flemming, Sanfelice. Le osservazioni di cui alla presente Nota si riferiscono esclusivamente a materiale fissato in Bouin o Zenker acetico, sezionato in paraffina e trattato con ematossilina ferrica-verde luce o con il reattivo di Feulgen-verde luce. La classificazione delle specie è stata fatta sull'opera del Porta

(5) V. P. VARDÉ, « Année Biologique », p. 640 (1931).

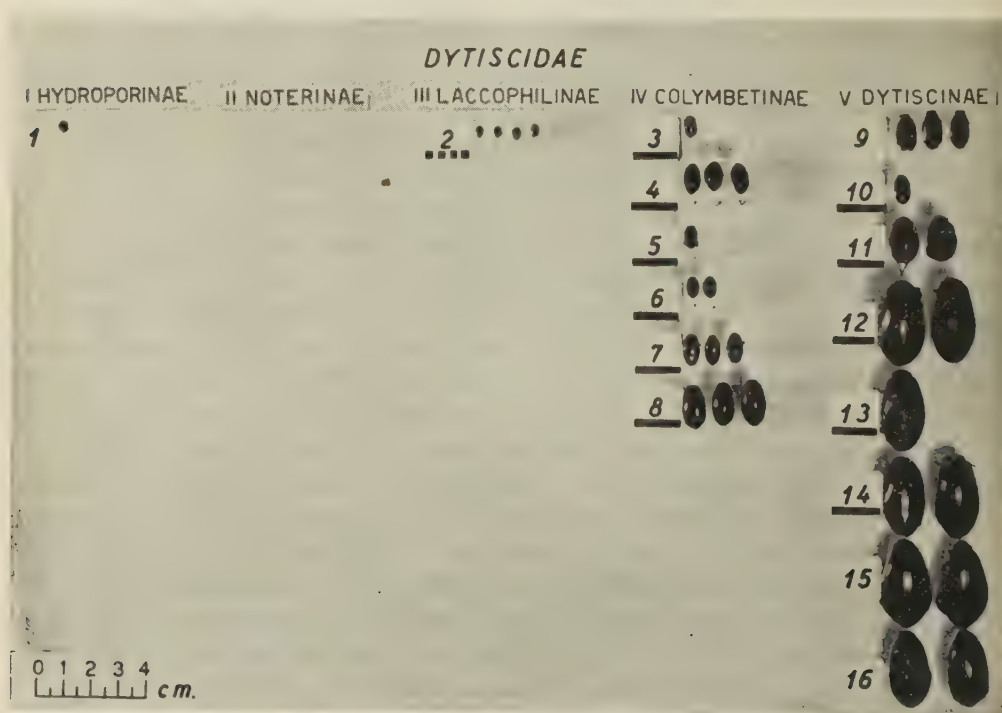
(6) P. BUCHNER, « Arch. für Zellf. », 6, 329 (1911).

(7) E. B. WILSON, *The cell in development and heredity*, Mac Millan 1925.

(8) R. W. HEGNER e C. P. RUSSEL, « Proc. National. Accad. Sci. U. S. A. », 2, 356 (1916).

* Nota: Le specie contrassegnate da asterisco non sono state oggetto di studio, in questo senso, da parte di altri Autori.

(1923)⁽⁹⁾ e su quella del Guignot (1931-1933)⁽¹⁰⁾ nonché sul Ganglbauer (1892)⁽¹¹⁾. Ho potuto anche, grazie alla cortesia della Direzione del Museo Civico di Zoologia di Roma che ringrazio, largamente consultare la raccolta di Coleotteri di P. Luigioni. Ringrazio anche il Sig. Marcello Cerruti che gentilmente ha voluto controllare la posizione sistematica di alcuni esemplari. Le fotografie delle specie da me studiate sono state raccolte nella Tav. I, mentre nella Tav. II è riportata la documentazione fotografica di quanto verrà detto a proposito della presenza o assenza della massa cromatica. I numeri progressivi delle due Tavole corrispondono al numero di elenco delle specie nella esposizione. Sotto ogni fotogramma della Tav. II è



Tav. I.

riportata una riga nera (su fondo bianco) indicante la lunghezza dell'esemplare in questione, l'ultimo fotogramma della stessa tavola porta in basso una scala ogni unità della quale ha il valore di 10 *micron* e che vale per tutti i sedici fotogrammi che sono stati fatti allo stesso ingrandimento.

OSSERVAZIONI PERSONALI. - La Famiglia dei *Dytiscidae* si divide in cinque Tribù (Porta) o Sottofamiglie (Guignot). Sono state esaminate una specie della I Tribù: *Hydroporinae*, nessuna specie della II: *Noterinae*, una specie della III:

(9) A. PORTA, *Fauna Coleopterorum Italica*, vol. I, 1923, Stab. Tipografico Piacentino, Piacenza.

(10) F. GUIGNOT, *Les Hydrocanthares de France*, Ed. Douladoure, Toulouse 1931-1933.

(11) L. GANGLBAUER, *Die Käfer von Mitteleuropa*, Erster Band, Carl Gerold's Sohn, Wien 1892.

Laccophilinae, sei specie della IV: *Colymbetinae*, sette specie ed una aberrazione della V: *Dytiscinae*.

1. *Hyphydrus Aubei* Ganglb.* (Dintorni di Roma, Tav. I, 1). Le sezioni di ovaio non mostrano nella zona di differenziazione nessun preocite od oocite con la massa di Giardina. Il nucleo degli oociti presenta un fine reticolo Feulgen positivo, nelle mitosi esaminate (Tav. II, Fig. 1, freccia) sono visibili solamente il fuso e i cromosomi in metafase-anafase. Negli oociti accresciuti la vescicola germinativa è Feulgen negativa mentre la stessa reazione è fortemente positiva a livello dei nuclei delle cellule follicolari e nutrici. Quest'ultimo reperto è stato uguale per tutte le specie studiate, quindi non verrà ripetuto per ogni specie che sarà illustrata.

2. *Laccophilus hyalinus*. De Geer.* (Dintorni di Roma, Tav. I, 2). Nella zona di differenziazione dell'ovaio sono visibili alcuni preociti od oociti nel nucleo dei quali è visibile, Feulgen-positiva, una massa sferica, distinta da granulazioni e filamenti cromatinici pure Feulgen-positivi. Strettamente addossate all'oocite si vedono le cellule nutrici (Tav. II, Fig. 2, frecce). La massa sferica che si vede nei due preparati della fotografia 2 potrebbe essere considerata come la massa di Giardina o come un rappresentante di questa, per quanto la sua evoluzione non sia finora chiara dato che nei preparati studiati non ho potuto sorprendere nessuna mitosi a carattere differenziale.

3. *Agabus nebulosus* Forst.* (Dintorni di Roma, Tav. I, 3). Nella zona di differenziazione degli ovaia sono visibili numerosi preociti e poi oociti con la massa di Giardina Feulgen-positiva in vari stadi della sua evoluzione (Tav. II, Fig. 3).

4. *Agabus bipustulatus* L.* (Dintorni di Roma, Tav. I, 4). La massa di Giardina è presente nei preociti ed oociti, Feulgen positiva (Tav. II, Fig. 4) si disgrega e perde la sua fisionomia morfologica negli oociti accresciuti.

5. *Agabus brunneus* F.* (Dintorni di Roma, Tav. I, 5). Nei preociti ed oociti è visibile la massa cromatica, particolarmente evidente lo stadio di sinapsi differenziale (Giardina) (Tav. II, Fig. 5). La massa cromatica si disgrega negli oociti in accrescimento.

6. *Agabus dydimus* Oliv.* (Dintorni di Roma, Tav. I, 6). Nei preociti ed oociti è visibile la massa cromatica (Tav. II, Fig. 6) Feulgen positiva che si disgrega negli oociti in accrescimento.

7. *Rhantus punctatus* Fourcr. (Dintorni di Roma, Tav. I, 7). Nei preociti ed oociti è visibile la massa cromatica (Tav. II, Fig. 7) Feulgen-positiva che si disgrega negli oociti in accrescimento. In questo genere (sp?) la massa di Giardina è stata già vista da Vardé (1930).

8. *Colymbetes fuscus* L. (Dintorni di Roma, Tav. I, 8). Nei preociti della zona di differenziazione e negli oociti è visibile la massa cromatica Feulgen positiva (Tav. II, Fig. 8) in tutti gli stadi della sua evoluzione. La massa di Giardina è stata vista in questa specie da Will (1885) il quale però non aveva riconosciuto il meccanismo delle mitosi differenziali, e poi ampiamente studiata da Günthert (1910) il quale ha anche esaminato il *C. notatus*.

9. *Eretes sticticus* L.* (Dintorni di Roma, Tav. I, 9). Non è visibile nei preociti ed oociti di questa specie la massa cromatica sotto nessuna forma. Il nucleo degli oociti è caratterizzato da un reticolo cromatico molto fine, Feulgen positivo (Tav. II, Fig. 9). La Feulgen positività scompare negli oociti accresciuti. Ho potuto esaminare soltanto due esemplari negli ovaia dei quali è però chiarissima l'assenza della massa cromatica, ma non ho sorpreso nessuna delle mitosi che (secondo lo schema del *D. marginalis*) dovrebbero dare origine all'oocite e alle cellule nutrici.

10. *Hydaticus Leander* Rossi*. (Dintorni di Roma, Tav. I, 10). Nei preociti ed oociti è visibile la massa cromatica (Tav. II, Fig. 10) che si disgrega negli oociti in accrescimento.

11. *Acilius sulcatus* L. (Dintorni di Roma, Tav. I, 11). Ho potuto esaminare un solo esemplare ma è evidentissima, negli ovaia di questo la massa di Giardina Feulgen positiva, in tutti gli stadi della sua evoluzione (Tav. II, Fig. 11). La massa si disgrega negli oociti in accrescimento. La formazione in questione era già stata vista in questa specie da Debaisieux (1909), Günthert, *Acilius* sp? (1910), Frederikse (1922).

12. *Dytiscus marginalis* L. (Dintorni di Roma, Napoli, Tav. I, 12). La massa cromatica è presente (Tav. II, Fig. 12) come già visto da Kouiawski (1898), Giardina (1901), Debaisieux (1909), Günthert (1910), Nusbaum-Hylarowicz (1918), Frederikse (1922), Vardé (1930), Bauer (1933), Jacquiart (1935), Urbani (1950).

13. *Dytiscus marginalis* L. ab. ♀ *conformis* Kunze.* (Dintorni di Roma, Tav. I, 13). Questa aberrazione distingue la femmina del *marginalis* ad elitre lisce anziché striate. La massa di Giardina è presente con le caratteristiche della specie (Tav. II, Fig. 13).

14. *Dytiscus circumflexus* F.* (Dintorni di Roma, Tav. I, 14). La massa di Giardina è presente con gli stessi caratteri generali del *D. marginalis* (Tav. II, Fig. 14).

15. *Cybister lateralimarginalis* De Geer.* (Dintorni di Roma, Napoli, Tav. I, 15) questa specie molto vicina al *D. marginalis* e al *D. circumflexus* non presenta la massa cromatica. Nella zona di differenziazione dell'ovaio si vedono molti preociti in cariocinesi circondati da alcune cellule nutrici. I cromosomi sono Feulgen positivi e ben visibili (Tav. II, Fig. 15). Negli oociti in accrescimento sono a volte visibili uno o più nucleoli che si colorano intensamente con il verde luce, le cellule nutrici presentano il nucleo fortemente Feulgen-positivo mentre la vescicola germinativa dell'oocite accresciuto è negativa rispetto alla stessa reazione.

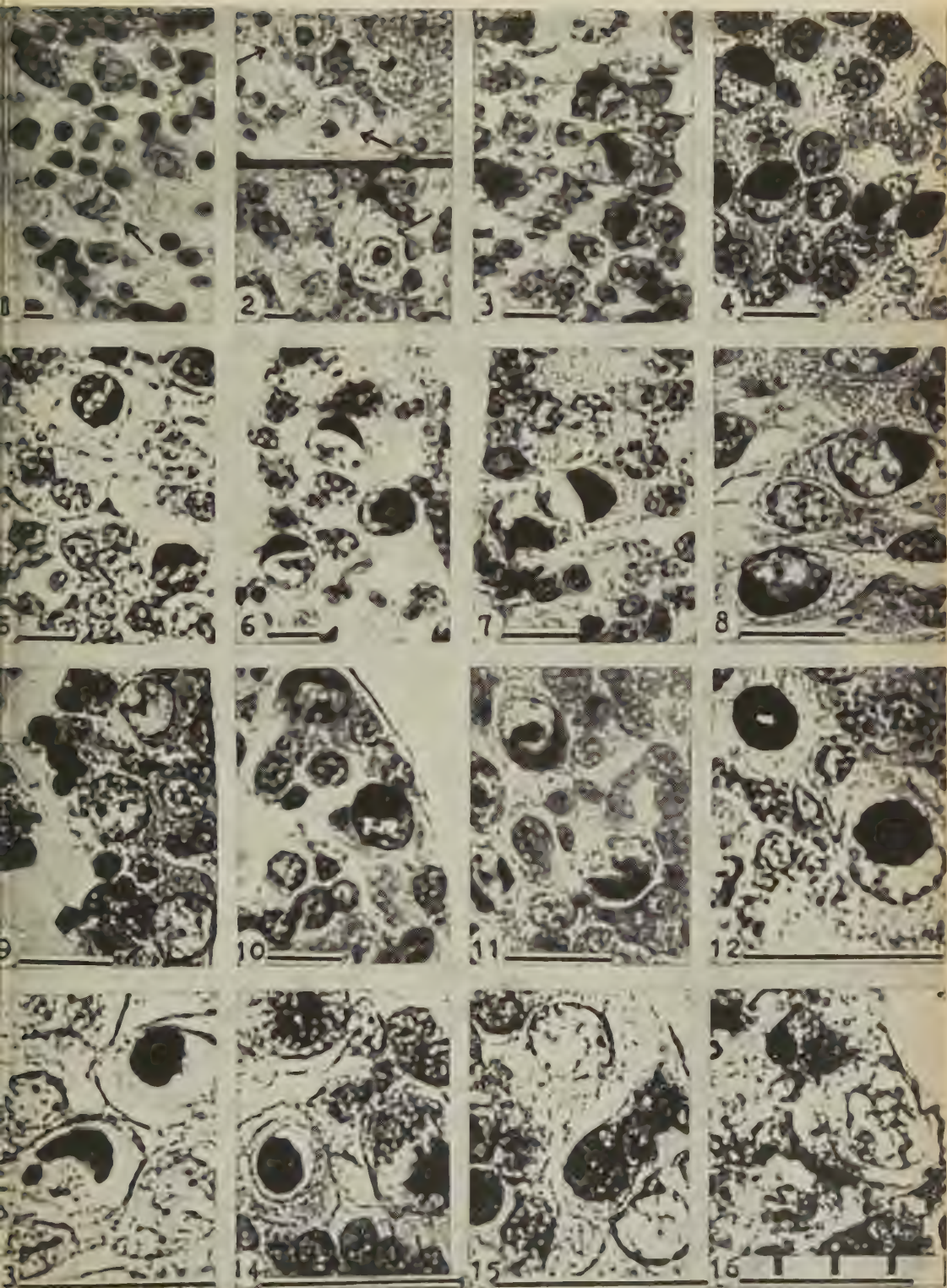
16. *Cybister tripunctatus* Oliv. (Napoli, Tav. I, 16). Questa specie è stata studiata da Vardè (1930) il quale ha visto che i preociti non presentano la massa di Giardina. Le mie osservazioni confermano quelle di questo Autore poichè anche io negli ovaî dell'unico esemplare che ho potuto esaminare non ho potuto scorgere la massa cromatica (Tav. II, Fig. 16). La morfologia e la citologia dell'ovaio sono pressochè simili a quelle del *C. lateralimarginalis*. Sono ben visibili preociti in cariocinesi con cromosomi Feulgen positivi ben distinguibili, e nei nuclei a riposo uno o più nucleoli che secondo Vardè hanno grande attività secretoria. Nella vescicola germinativa degli oociti accresciuti, come in tutte le specie da me esaminate, la reazione di Feulgen diviene negativa mentre rimane fortemente positiva a livello dei nuclei delle cellule follicolari e nutrici.

CONCLUSIONI. - Le mie osservazioni hanno mostrato che la massa cromatica, intesa nelle sue note caratteristiche morfologiche, pur riscontrandosi in Tribù diverse, non è presente in tutte le specie della Famiglia dei *Dytiscidae*. In una specie di *Hydroporinae* essa è assente. In una specie di *Laccophilinae* si vede una formazione sferica che ha dei punti di contatto con la tipica massa di Giardina, ma poichè non è stata sorpresa nessuna mitosi differenziale non si può con sicurezza affermare che intervenga nella formazione dell'oocite con lo stesso meccanismo illustrato da Giardina nel *D. marginalis*. Le sei specie appartenenti a tre generi dei *Colymbetinae* presentano tutte la massa di Giardina. Nella Tribù dei *Dytiscinae* tra le sette specie ed una aberrazione esaminate, l'*Eretes sticticus*, il *Cybister lateralimarginalis* e il *Cybister tripunctatus* non presentano la massa di Giardina: rispetto a questa formazione, perciò, la Tribù dei *Colymbetinae* si rivela più omogenea di quella dei *Dytiscinae*. Per dare una idea generale della distribuzione della massa di Giardina nelle specie esaminate, nella Tavola I è stata tracciata una riga nera sotto il numero di riferimento degli esemplari che presentano la massa cromatica (tratteggiata per il *Laccophilus hyalinus* per le ragioni prima dette).

Secondo il Guignot l'*Eretes* è il genere dei *Dytiscinae* che ha conservato i caratteri più arcaici, mentre il genere *Cybister* è il più evoluto, ebbene tanto l'uno che l'altro non presentano la massa di Giardina!

Ciò, ammesso che si vogliano tener presenti le considerazioni filogenetiche del Guignot, esclude che la massa cromatica possa venire considerata sia come segno di perfezionamento, sia come una formazione ancestrale.

I nucleoli del *Cybister tripunctatus*, meno evidenti nel *Cybister lateralimarginalis* potrebbero forse, ma la questione merita uno studio morfologico e citochimico approfondito, essere considerati i rappresentanti della massa cromatica in queste forme. Un dato positivo che può ricavarsi da questo mio primo contributo è che



la massa di Giardina dei *Dytiscidae*, intesa come formazione morfologica del meccanismo oogenetico di questi Coleotteri acquatici, rappresenta uno di quegli « indicatori » sul valore e significato dei quali tanto ha insistito Cotronei, che possono esserci utili e talora indispensabili quando, con una determinata tecnica, ci accingiamo allo studio di alcuni fenomeni particolari del metabolismo cellulare.

Altro dato positivo, di carattere sistematico, che risulta dalle presenti osservazioni è che alcune forme che i criteri sistematici hanno posto molto vicine (*Eretes*, *Dytiscus*, *Cybister*) rivelano alla indagine citologica precisi caratteri differenziali. Da questo risulta la utilità di un metodo citologico comparativo da usare in appoggio agli usuali metodi sistematici.

Per poter prospettare una organica revisione, operata in questo senso, della Famiglia dei *Dytiscidae*, è necessario però esaminare un numero di specie ancora maggiore, di quanto io abbia potuto fare finora, di questi Coleotteri acquatici.

Fisiologia umana. — *Il comportamento delle soglie di udibilità in montagna di media altezza*^(*). (Osservazioni audiometriche preliminari). Nota di GAETANO LIVREA e LUIGI CAMPANELLI^(**), presentata^(***) dal Corrisp. G. AMANTEA.

Il comportamento delle funzioni vegetative nel clima d'altezza è stato oggetto di numerose ricerche, da parte di numerosi Autori, con risultati conclusivi ed, invero, troppo ben noti per essere riportati qui.

Il comportamento degli apparecchi nervosi, che regolano le funzioni della vita di relazione, è stato invece meno investigato.

Su questa lacuna, da alcuni anni, hanno soffermato la loro attenzione E. Grandjean e coll.⁽¹⁾, i quali hanno apportato una serie di contributi, fra cui particolarmente interessanti sono quelli ottenuti mercè l'impiego di nuovi apparecchi, appositamente concepiti per la misura quantitativa di diverse funzioni del sistema nervoso cerebro-spinale (riflesso patellare, mantenimento dell'equilibrio statico, ecc.).

Riassuntivamente si può dire che le loro ricerche « hanno messo in evidenza il fatto che a 3450 m. di altezza le sensibilità tattile e gustativa aumentano, il riflesso patellare si esalta, l'equilibrio statico migliora e il tempo di reazione ottica si accorcia » (E. Grandjean).

Secondo l'A., queste modificazioni svelerebbero un eccitamento del sistema nervoso cerebro-spinale, o meglio, « uno stato di accresciuta reattività dell'orga-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma e, sul Terminillo, presso il Centro Appenninico di Studi Biologici.

(**) Il piano delle ricerche e la stesura della Nota appartengono al prof. G. Livrea, le osservazioni sono state eseguite in collaborazione (G. Amantea).

(***) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) E. GRANDJEAN, « *Helv. Physiol. Acta* », 6, 489-515 (1948). È una chiara sintesi, corredata di letteratura, degli studi compiuti dall'A. e dai collaboratori circa gli effetti del clima d'altezza sulle funzioni nervose.

nismo, il quale gli permette di porre in opera le funzioni animali con più rapidità ed efficacia » (E. Grandjean).

In accordo con la concezione di Hess ⁽²⁾, secondo la quale il sistema nervoso cerebro-spinale è in una certa misura subordinato al sistema nervoso vegetativo, Grandjean ha supposto, ed ha fornito alcune prove in appoggio, che l'eccitamento di tutte le anzidette funzioni animali sia la conseguenza di una transitoria ipertonìa del simpatico, espressione questa, a sua volta, degli sforzi di adattamento all'ipossia di altezza.

Ci è sembrato interessante stabilire se, a media altezza, la sensibilità acustica era coinvolta in questo asserito stato di eccitamento del sistema nervoso cerebro-spinale.

A questo scopo, poichè gli audiogrammi correttamente ottenuti con un moderno audiometro possono considerarsi come lo specchio fedele, espresso in decibels, della soglia acustica individuale alle varie frequenze comunemente esaminate, ci è sembrato sufficiente, come meglio sarà detto più innanzi, condurre ripetute ricerche di questa soglia su alcuni soggetti, sia in pianura che in montagna, e paragonare la media dei valori audiometrici ottenuti in pianura con quella dei valori ottenuti in montagna.

Secondo le nostre conoscenze, nè Grandjean e coll., nè altri hanno condotto ricerche audiometriche a media altezza.

Come già detto, le nostre ricerche sono state condotte a Roma e sul Terminillo (1790 m.), presso il Centro Appenninico di Studi Biologici diretto dal Prof. C. Jucci.

I soggetti esaminati sono stati cinque, tre studenti universitari, di cui due donne, e due medici.

L'audiometro adoperato è stato sempre lo stesso e cioè un audiometro tipo F1 della Maico. È stata nostra cura assicurarci della costanza della calibrazione originaria dell'apparecchio, e a tale uopo abbiamo eseguito, a distanza di tempo, accurate prove audiometriche su noi stessi, senza scoprire, nelle diverse prove, variazioni significative delle nostre soglie di udibilità.

Ogni audiogramma è stato ricavato, in città e in montagna, nelle migliori condizioni possibili di silenzio, comunque sicuramente più che adeguate ai fini di un'accurata ricerca audiometrica (livello medio dei rumori ambientali circa tra 24 e 35 decibels).

È noto che con una sola misurazione di soglia si hanno 85 possibilità su 100 di commettere un errore di misura aggirantesi intorno a ± 5 *db*s ed è noto pure, invece, che con la media di tre soglie ci si può avvicinare, nel 95,6% dei casi, alla soglia reale con un errore decisamente inferiore a ± 5 *db*s. Pertanto noi abbiamo effettuato, sia in pianura che in montagna, tre misurazioni a diversi giorni d'intervallo e di queste misurazioni abbiamo preso appunto la media.

Le determinazioni a media altezza sono state eseguite al 2°, 5°, e 7° giorno di soggiorno. Durante questi, le condizioni climatiche sono state le seguenti ⁽³⁾:

(2) W. R. Hess, «Schweiz. Arch. Neurol.», 15 (1924); 16 (1925); «Klin. Wschz.», 9 (1930).

(3) L'attuale mancanza presso il C. A. di Studi Biologici, tuttora in via di organizzazione, di adatte apparecchiature non ha consentito la determinazione dell'O₂ e del CO₂ atmosferico e dell'intensità delle radiazioni solari.

TABELLA I.

| Giorno | Dati meteorologici | Valori massimi | Valori minimi |
|----------------|--|----------------|---------------|
| 7 agosto 1950 | Pressione in mb (x) | 814.5 | 812.2 |
| | Temperatura | 18.6 | 11.4 |
| | Umidità relativa | 83 | 58 |
| | Direzione del vento e velocità in Km/h | 14.4 da ESE | Calma |
| 10 agosto 1950 | Pressione | 819.2 | 816.7 |
| | Temperatura | 20.4 | 13.0 |
| | Umidità relativa | 96 | 56 |
| | Direzione del vento e velocità in Km/h | 6.4 da N | Calma |
| 12 agosto 1950 | Pressione | 818.5 | 817.6 |
| | Temperatura | 16.4 | 12.2 |
| | Umidità relativa | 89 | 77 |
| | Direzione del vento e velocità in Km/h | 18.0 da E | Calma |

(x) L'unità di pressione usata dai meteorologi sotto il nome di *bar* (da non confondersi con la *baria*, unità C. G. S.) è pari a 10⁵ unità M. K. S. Il *millibar* è pari dunque a 100 unità M. K. S. Si ha infine 1 mm. di mercurio = 1,3332 millibar. La pressione atmosferica normale è abbastanza vicina a un *bar*.

Nel caso dei soggetti maschi, riteniamo di esserci avvicinati con quasi certezza alla cifra reale (teorica) di soglia, in quanto nelle tre singole determinazioni, sia in pianura che in montagna, abbiamo osservato fluttuazioni della sensibilità uditiva del tutto insignificanti, inferiori in media a ± 5 *dfs*.

Nel caso delle due donne, invece, abbiamo avuto delle fluttuazioni superiori (± 10 *dfs*) alle fluttuazioni normali, il che ha portato ad una certa dispersione dei risultati. Poichè le misurazioni sono state eseguite per tutti i soggetti, maschi e femmine, sempre nelle stesse condizioni di stato atmosferico, di riposo, di digestione, ecc., noi abbiamo fondato motivo per supporre che tali fluttuazioni siano da porre in conto del variabile stato neurovegetativo in rapporto col variabile stato ormonale proprio della donna.

Nella tavola annessa sono riportate, affiancate, le medie dei valori audiometrici, in decibels, alle varie frequenze, esibiti dai soggetti nelle 3 diverse determinazioni, sia in pianura che in altezza. Riportiamo pure due curve di totalizzazione delle soglie di udibilità (fig. 1 e 2).

Dal confronto delle medie e delle curve appare che in tutti i soggetti esaminati, per effetto del soggiorno a media altezza, si è avuto un aumento della sensibilità acustica. Tale aumento nei soggetti di sesso maschile è stato più netto ed esteso, cioè ha interessato quasi tutte le frequenze esaminate; nei soggetti di sesso femminile, invece, è stato prevalente per i toni bassi.

| | | | 125 | | 250 | | 500 | | | |
|---|--|------|------|-------------------|------|-------------------|------|-------------------|------|-------------------|
| | | | Roma | Termini- nillo | Roma | Termini- nillo | Roma | Termini- nillo | Roma | Termini- nillo |
| Soggetto C. C. sesso femminile età 23 | Soglia di udibilità in <i>ab s</i> | Au D | 5,3 | 0 | -1,6 | -10 | -5 | -10 | -3,3 | |
| | | Au S | 12,3 | -1 | 8,3 | -10 | 3,3 | -10 | -5 | |
| | Calcolo dello abbassamento (<i>ab</i>) o dell'elevazione (<i>el</i>) della soglia | Au D | | 5,3 <i>ab</i> | | 8,4 <i>ab</i> | | 5 <i>ab</i> | | |
| | | Au S | | 13,3 <i>ab</i> | | 18,3 <i>ab</i> | | 13,3 <i>ab</i> | | |
| Soggetto C. G. sesso femminile età 24 | Soglia di udibilità in <i>ab s</i> | Au D | 7,6 | -5 | -2,6 | -7 | 0 | -10 | 4,3 | |
| | | Au S | 5 | 1,3 | 1,6 | -10 | 1,6 | -10 | 0 | |
| | Calcolo dello abbassamento (<i>ab</i>) o dell'elevazione (<i>el</i>) della soglia | Au D | | 12,6 <i>ab</i> | | 4,4 <i>ab</i> | | 10 <i>ab</i> | | |
| | | Au S | | 3,7 <i>ab</i> | | 11,6 <i>ab</i> | | 11,6 <i>ab</i> | | |
| Soggetto V. G. sesso maschile età 25 | Soglia di udibilità in <i>ab s</i> | Au D | 11,6 | 2,5 | 2,3 | -10 | 3,3 | -10 | 1,6 | |
| | | Au S | 10 | 3,3 | 1,6 | -10 | 0 | -10 | 1,6 | |
| | Calcolo dello abbassamento (<i>ab</i>) o dell'elevazione (<i>el</i>) della soglia | Au D | | 9,1 <i>ab</i> | | 12,3 <i>ab</i> | | 6,7 <i>ab</i> | | |
| | | Au S | | 6,7 <i>ab</i> | | 8,4 <i>ab</i> | | 10 <i>ab</i> | | |
| Soggetto L. G. sesso maschile età 41 | Soglia di udibilità in <i>ab s</i> | Au D | 11,6 | 5 | 5,6 | -10 | 2,3 | -10 | -2,6 | |
| | | Au S | 6,6 | 3,3 | -0,6 | -10 | -0,6 | -10 | -7 | |
| | Calcolo dello abbassamento (<i>ab</i>) o dell'elevazione (<i>el</i>) della soglia | Au D | | 6,6 <i>ab</i> | | 15,6 <i>ab</i> | | 12,3 <i>ab</i> | | |
| | | Au S | | 3,3 <i>ab</i> | | 9,4 <i>ab</i> | | 9,4 <i>ab</i> | | |
| Soggetto C. L. sesso maschile età 46 | Soglia di udibilità in <i>ab s</i> | Au D | 8,3 | 2,5 | 3,3 | -10 | 5 | -2 | 5 | |
| | | Au S | 10 | 1,6 | 1,6 | -10 | 3,3 | 8,3 | 5,6 | |
| | Calcolo dello abbassamento (<i>ab</i>) o dell'elevazione (<i>el</i>) della soglia | Au D | | 5,8 <i>ab</i> | | 13,3 <i>ab</i> | | 7 <i>ab</i> | | |
| | | Au S | | 8,4 <i>ab</i> | | 11,6 <i>ab</i> | | 5 <i>el</i> | | |

TAVOLA.

FREQUENZE

| | 2000 | 3000 | 4000 | 6000 | 8000 | 12000 |
|-------------------|------|-------------------|------|-------------------|------|-------------------|
| LOCALITÀ | | | | | | |
| Termini- nillo | Roma | Termini- nillo | Roma | Termini- nillo | Roma | Termini- nillo |
| -10 | -8,3 | 2,5 | -10 | -10 | -8,3 | -5 |
| -1 | -3,3 | -2 | -8,3 | -10 | -6,6 | -7,5 |
| 7 ab | | 10,8 el | | 0 | | 3,3 el |
| 6 el | | 1,3 el | | 1,7 ab | | 0,9 ab |
| -10 | -4 | -9,5 | -6,6 | -10 | -4,3 | -9 |
| 9,3 | -6,6 | -10 | -10 | -10 | -6,6 | -3,3 |
| 10 ab | | 5,5 ab | | 3,4 ab | | 4,7 ab |
| 7 ab | | 3,4 ab | | 0 | | 3,3 el |
| -10 | -5 | -7,5 | -8,3 | -10 | -3,3 | -4 |
| -10 | 0 | -6,6 | -6,3 | -7,3 | -6,6 | -7,3 |
| 7 ab | | 2,5 ab | | 1,7 ab | | 0,7 ab |
| 5 ab | | 6,6 ab | | 1 ab | | 0,7 ab |
| -10 | -1 | -7,5 | -8,3 | -10 | -3,3 | -10 |
| -10 | -2,3 | -6,6 | -7,6 | -8,3 | 7 | 5 |
| 7 ab | | 6,5 ab | | 1,7 ab | | 6,7 ab |
| 4 ab | | 4,3 ab | | 0,7 ab | | 2 ab |
| 0 | 6,6 | 5 | -10 | -10 | -5,6 | -9 |
| -5 | -2 | -5 | -10 | -10 | -2,6 | 1,3 |
| 3 ab | | 1,6 ab | | 0 | | 3,4 ab |
| ab | | 3 ab | | 0 | | 3,9 el |

L'aumento acquista maggiore significato, se si tien conto del fatto che sul Terminillo i limiti massimi superiori del nostro audiometro si sono sempre mostrati nettamente inferiori ai limiti massimi superiori dei soggetti. Nei protocolli abbiamo indicato questo fatto, ponendo una freccia rivolta all'in su accanto al valore medio corrispondente al limite massimo superiore dell'audiometro.

Non ci nascondiamo che il numero dei casi da noi studiati sia esiguo, ma, in base all'estrema accuratezza con cui ci siamo sforzati di condurre le determinazioni e alla concordanza dei risultati ottenuti, crediamo di poter concludere

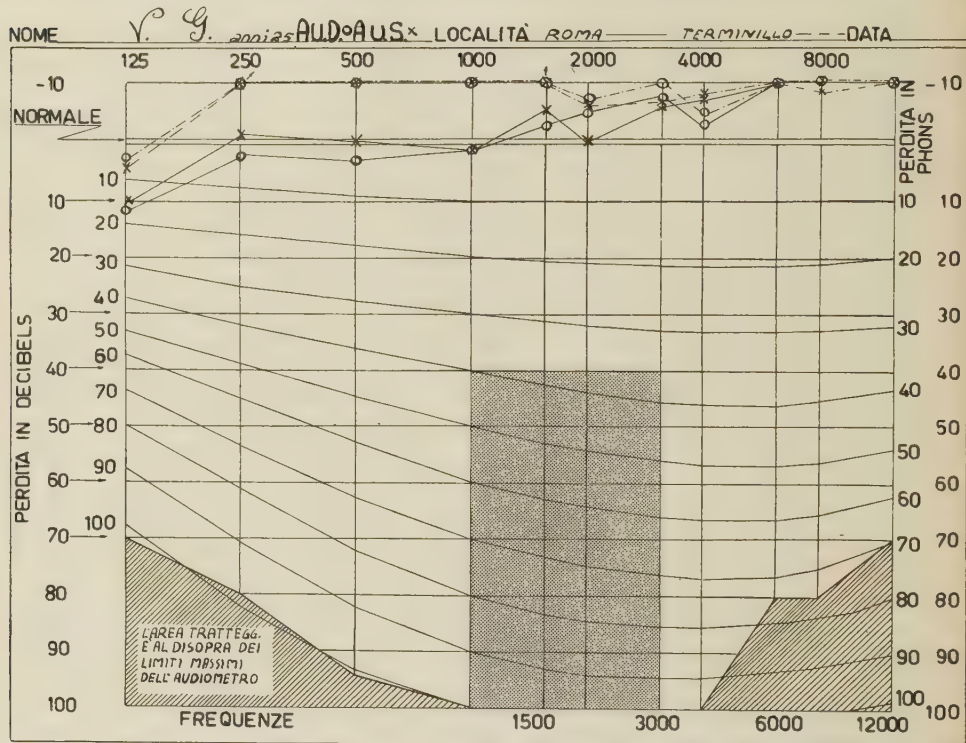


Fig. 1.

con fondamento che, per effetto del soggiorno a media altezza (1790 m.), si ha una diminuzione della soglia della sensibilità acustica, cioè un aumento della sensibilità acustica.

Tale aumento va a porsi accanto all'aumento della sensibilità tattile e gustativa e agli altri effetti già descritti da Grandjean e coll., e da noi prima ricordati, e può forse interpretarsi alla stessa stregua.

Comunque sull'interpretazione di questa iperacusia da altezza noi ritorneremo, allorquando avremo espletato le ricerche, già in corso, suggeriteci e giustificate dal risultato di queste nostre osservazioni preliminari e cioè:

a) l'estensione delle osservazioni ad un più ampio numero di soggetti, di diverso sesso e nelle più diverse epoche della vita, allo scopo di convincerci dell'esistenza di rapporti tra stato ormonico e sensibilità acustica;

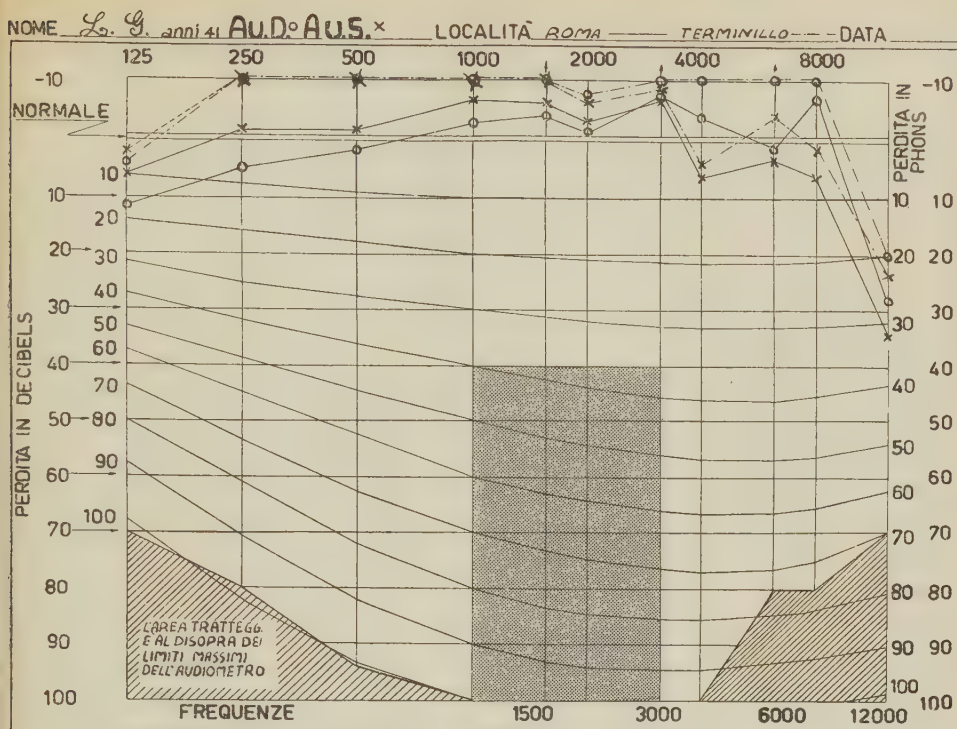


Fig. 2.

b) la condotta contemporanea di osservazioni audiometriche in condizioni di ipossia artificiale nella camera a pressione, allo scopo di chiarire se la diminuita tensione parziale di ossigeno è l'elemento determinante dell'iperacusia a media altezza;

c) la condotta di osservazioni audiometriche nel corso dell'azione di farmaci neurovegetativi, allo scopo di chiarire se lo spostamento farmacologicamente provocato dell'equilibrio neurovegetativo si riflette sulla funzione acustica.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Luigi Berzolari.

Letta (*) dal Socio ENRICO BOMPIANI.

La notte sull'11 dicembre 1949 si spegneva il nostro Socio Nazionale, LUIGI BERZOLARI ⁽¹⁾.

La consuetudine accademica vuole che si commemorino i Soci scomparsi, quasi a fissare il posto che ad essi compete nel divenire della Scienza.

Questo compito, troppo arduo per un individuo, spetta piuttosto al tempo: ciò che si può chiedere a chi ha avuto con Essi una qualche consuetudine è di fissarne la figura umana, che, specie in una vita spesa nella ricerca scientifica, non rimane documentata dalla produzione individuale ⁽²⁾.

È perciò che nel parlarVi, per incarico della Presidenza, di Luigi Berzolari, il mio pensiero va spontaneamente all'anno 1913, quando io Lo conobbi. Arrivavo a Pavia quale professore interno nell'Istituto Matematico dell'Università da Lui diretto: con Lui trascorsi, in quotidiana consuetudine di lavoro nella stessa stanza, i due anni accademici che ci separavano dall'entrata dell'Italia nella prima guerra mondiale (1915).

Io credo che quelli siano stati per Luigi Berzolari gli anni più felici.

In un'Italia modesta e rispettata, da cui era lontano anche il pensiero di ricorrenti minacce, solo anelante ad una più compiuta unità, nella tranquilla Pavia ch'Egli aveva scelto a Sua sede e ove l'avevano già raggiunto onori accademici, circondato dalla stima e dall'affetto di colleghi e di allievi, Egli lasciava nel 1913 il rettorato ⁽³⁾ per ritornare interamente ai Suoi studi. Alle lunghe ore di lavoro passate nell'Istituto era sollievo fisico la passeggiata che ogni sera, con puntualità kantiana, faceva dal Castello al Ticino e sollievo spirituale e conforto il sereno ambiente familiare che aveva saputo creare intorno a Lui la Sua sposa Elisa Citterio e la festosa giovinezza delle Sue tre figlie ⁽⁴⁾.

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1950.

(1) Socio Corrispondente dal 10 ottobre 1919; Nazionale dal 6 maggio 1935.

(2) Le notizie non di mia conoscenza diretta mi sono state fornite dalla famiglia o dal prof. L. Brusotti, che qui ringrazio. Pure al Brusotti è dovuto l'elenco delle pubblicazioni riportato in fine, tratto dalla commemorazione da lui pubblicata nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », ser. III, anno V, pp. 1-19.

(3) Fu rettore dell'Università di Pavia dal 1909 al 1913 e dal 1920 al 1922; preside della Facoltà di scienze nei periodi 1907-1909, 1916-1920, 1925-1929. Fu direttore dell'Istituto Matematico dal 1900 fino alla morte.

(4) Mi piace riprodurre qui, e per la delicatezza dei sentimenti che esprime e per la limpidezza della prosa, parte della lettera-testamento diretta dal Berzolari alle figlie:

« Quanto io posseggo è dovuto esclusivamente al mio lavoro e alla ferma, oculata, sapiente amministrazione della compianta amatissima mia consorte Elisa Citterio. Allorchè ci sposammo,

Egli poteva riguardare con intimo compiacimento al mezzo secolo di vita trascorso e ai frutti della Sua ordinata attività costruttiva nella scienza, nella scuola, nella famiglia. Compiacimento tanto maggiore in quanto Egli sapeva di dovere unicamente a sè, alla Sua volontà, al Suo ingegno, al Suo carattere la posizione raggiunta. Chè la sorte non l'aveva circondato di circostanze ritenute generalmente favorevoli: al contrario; la durezza tragica della infanzia e della prima giovinezza aveva affinato e temprato in Lui le doti naturali alle quali unicamente doveva ricorrere per affrontare la vita.

Discendente da un ceppo di patrioti lombardi, che col sacrificio della vita avevano silenziosamente affermato la volontà di risorgimento dell'Italia, Luigi Berzolari era nato a Napoli il 1° maggio 1863 da Angelo, di Cremona, e da Rosa Rossi, di Mortara. Il padre, volontario nell'esercito piemontese, aveva combattuto le guerre d'indipendenza dal 1848 al 1861: ferito gravemente all'assedio di Gaeta, morì a Napoli nel 1867. La mamma ritornò col suo unico figlioletto nella natia Mortara, ove il Berzolari frequentò poi le elementari e le prime quattro classi del ginnasio. Da Mortara il Berzolari passò a Pavia per terminarvi gli studi classici: e fu gran ventura, perchè ivi ebbe a maestro Salvatore Pincherle, allora insegnante al liceo.

La morte della mamma, nel 1881, lo lasciava diciottenne solo nella vita: ma già l'anno prima, vinto un posto di studio al Collegio Ghislieri, s'era procurato il mezzo per accedere agli studi universitari.

Prima di seguirLo in questi, fermiamoci a considerare il Berzolari in quella che i francesi chiamano l'«*epoque Tainienne*», l'età felice in cui, al saggio di un ordine di studi armonico e vasto come quello classico, sbocciano e si rivelano all'individuo, che ne acquista piena coscienza, le proprie tendenze intellettuali.

la piccola somma che negli anni precedenti io avevo potuto mettere in serbo fu spesa nell'impianto della casa, e dovette anzi essere integrata contraendo un debito di qualche migliaio di lire. Ma in meno di un anno, e senza imporci alcuna privazione, il debito fu estinto col frutto di lezioni private e per la saggia amministrazione della mia Lisetta.

«La quale, nel lungo periodo della nostra unione, fu moglie e madre impareggiabile. Assunse sopra di sè, con serena spontanea abnegazione tutte le cure della famiglia; e se non fossero ben noti i miracoli di cui è capace l'amore, sarebbe sorprendente come, una giovinetta appena ventiduenne, cresciuta in un ambiente di tutt'altra natura, abbia avuto un così immediato e lucido intuito delle condizioni sì materiali che spirituali in cui si svolge la vita di un uomo di studio, e abbia saputo secondarla con tanta semplice, costante, affettuosa sollecitudine e con così intima comprensione.

«Modesta, giudiziosa, di una limpida, ingenua, assoluta onestà, portava in ogni suo atto una buona volontà che riusciva veramente commovente, senza mai chiedere nè desiderare nulla per sè, ma tutta ed esclusivamente sollecita del bene della propria famiglia. In ogni circostanza dava prova di un criterio così diritto e sicuro come raramente avviene di riscontrare nelle persone, e la sua grande tenera bontà, per la quale trovava la massima soddisfazione nel prodigarsi a vantaggio altrui, non faceva velo al senso di giustizia che in lei era una seconda natura.

«Dal giorno in cui le nostre sorti si unirono, Ella è stata la luce della mia vita. A lei debbo di aver potuto attendere agli studi con tranquillità; a Lei, alla sua ispirazione che proveniva dalla sua indole eletta, quel poco di buono che per avventura posso aver fatto.

«Sia per sempre raccomandata a tutti i miei cari la Sua memoria benedetta!».

Vorrei sfruttare di quest'occasione e dell'esempio (non unico) del Berzolari per due osservazioni dedicate a coloro che reggono la Scuola:

1° la prima è che la Matematica - *humani generis decus* secondo lo Jacobi - non è un'attività inferiore dello spirito (come forse taluni di quelli credono), ma si colloca sullo stesso piano delle lettere e delle arti per coloro che sentono il valore della bellezza e dell'armonia;

2° la seconda è che molti dei nostri più grandi matematici si sono formati nel liceo classico e che quindi esso non è da escludere - come ce n'è stata la minaccia - dai tipi di scuola media che danno accesso alla Facoltà di scienze.

Come ho detto, il Berzolari ebbe la ventura negli ultimi anni di Liceo di avere come insegnante di matematica il Pincherle il cui insegnamento influì certamente sulla scelta dei successivi studi del Berzolari: ma non fu questo il solo ad attrarlo. Durante la preparazione alla licenza liceale compose una tragedia in versi, in cinque atti, ispirata al modello allora a Lui caro dell'Alfieri.

Dagli studi classici, compiuti con alta distinzione, portò nella vita un costante amore per la cultura intesa nel più elevato senso umanistico. E anche quando le matematiche lo assorbirono più completamente la lettura dei classici e dei maggiori autori moderni, italiani e stranieri, non fu mai da Lui trascurata. Di questa Sua viva ammirazione e passione per le lettere risentirono il Suo scrivere e il Suo dire, che ebbero sempre il pregio di una grande proprietà e chiarezza e non furono privi di ornamento.

Particolare amore ebbe per il Leopardi, i cui versi declamava spesso, specialmente quando gli spettacoli della natura, di cui sentì il fascino profondamente, lo commuovevano nell'intimo.

Altro Suo idolo fu il Tolstoj, specialmente il Tolstoj di « *Guerra e Pace* ». Aiutato da una memoria eccezionale ⁽⁵⁾, ripeteva spesso brani interi dei capolavori tolstoiani in cui tutti gli aspetti della natura umana, nel male e nel bene, trovava raffigurati al massimo della potenza ⁽⁶⁾.

Delle altre arti sentì acutamente la musica. Era dotato di udito sensibilissimo e di gusto naturalmente raffinato. Fu tra i primi nel nostro Paese ad intendere ed ammirare Wagner, pur avendo il culto e subendo il fascino dei nostri autori maggiori, il Bellini della *Norma* e il Donizetti della *Lucia* in primo luogo.

Del periodo dei Suoi studi universitari il Berzolari ricorda (nella commemorazione del Bertini) i cari compagni, l'amicizia dei quali leniva la solitudine d'affetti dell'orfano, e i maestri Beltrami, Bertini, Casorati « da noi amati ed ammirati per la loro semplice affabilità, per l'inarrivabile efficacia del loro insegnamento, per il prestigio che l'alta rinomanza scientifica ad essi conferiva ».

(5) Questa si manifestò fin dalla prima infanzia. Del periodo passato a Napoli (che lasciò a quattro anni) conservava qualche nitido ricordo, per esempio quello di un anziano studente di legge che si preparava ad esami su un piccolo fascicolo ingiallito. E già apparisce in tale ricordo quella *vis comica* che fu caratteristica del Berzolari.

(6) Altra espressione dell'interesse del Berzolari per le lettere fu la Sua amicizia col poeta ticinese Francesco Chiesa. Ebbe occasione d'incontrarlo al Liceo Cantonale di Lugano (di cui il Chiesa fu preside) ove il Berzolari era spesso chiamato quale commissario agli esami.

Dell'influenza di questi maestri sul Berzolari dirò poi.

Conseguita la laurea con lode nel 1884, il Berzolari rimase al Collegio Ghislieri per un periodo di perfezionamento: ma non vi compì l'anno perchè il collegio fu chiuso per ragioni disciplinari. Esso era divenuto infatti centro di attività irredentista: e il Berzolari, e per le tradizioni familiari e per la naturale vivacità non mai mortificata dalla austera condotta di vita impostasi, prese parte a quelle agitazioni che culminarono con la proclamazione – inefficace – della repubblica italiana.

La passione per l'Italia fu sempre viva nel Berzolari: ed io ricordo con quale commozione assistesse ad un'orazione incitatrice di Cesare Battisti in Pavia, poco prima che questi si offrisse olocausto per il compimento dell'unità d'Italia.

La stessa commozione esprese il Berzolari in nobile forma inaugurando il monumento ai professori e agli studenti dell'Ateneo pavese caduti nella grande guerra, al termine del suo secondo periodo rettorale (1922).

Nel 1885 cominciò il Berzolari il Suo insegnamento: dapprima (1885-87) nel ginnasio di Pavia, ove ebbe allievo il nostro consocio Ugo Amaldi, poi (1887) nel liceo di Vigevano e (1888) in quello di Pavia ove ebbe scolari Luigi Brusotti, poi Suo assistente e Suo collega, e Duilio Gigli, poi suo genero e collaboratore nell'Enciclopedia di Matematiche elementari.

Insegnante efficacissimo, preciso, circondato da generale rispetto e da illimitata stima e devozione, Egli personificava per gli allievi, la assoluta certezza del sapere matematico.

Nel 1888 aveva conseguita l'abilitazione all'insegnamento, nel 1892 la libera docenza in Geometria analitica e proiettiva; nel 1893, riuscito primo in un concorso di Geometria proiettiva e descrittiva, salì la cattedra dell'Università di Torino.

Mi sia concessa un'altra osservazione pure diretta all'attenzione dei reggenti della Scuola.

Il Berzolari, come il Bertini, il Pincherle, il Brusotti già nominati, e molti altri che non sto a nominare per brevità, arrivarono all'Università provenendo dalla scuola media ed onorarono l'una e l'altra.

Oggi purtroppo questa nobile tradizione è spezzata. Perchè i nostri reggenti, preoccupati più della finanza che della scuola, hanno generosamente gravato sugli insegnanti medi fino a depauperarli di ogni energia, e, ignari dell'ansia quotidiana per il mantenimento della famiglia, li costringono ad altre numerose ore di martellamento sulle teste più dure in ripetizioni private.

A Torino il Berzolari giunse trentenne: quando entrava in aula con i Suoi quattro assistenti (fra cui Mario Pieri) più anziani di Lui, il D'Ovidio soleva dire «ecco Berzolari con i Suoi antenati».

Nella nuova sede, oltre Giuseppe Peano e Vito Volterra, il Berzolari avvicinò Enrico D'Ovidio e Corrado Segre: con quest'ultimo, Suo coetaneo, che già dal 1888 copriva la cattedra di Geometria superiore, strinse particolare amicizia. L'ambiente così ricco di suggestioni geometriche (vi era passato Guido Castelnuovo dal 1887 al 1891) lasciò la sua traccia fecondatrice anche nella produzione del Berzolari.

Nel 1899 si trasferì alla cattedra di Analisi algebrica e Geometria analitica a Pavia ove rimase fino alla morte ⁽⁷⁾.

È difficile render conto brevemente del frutto di un'attività durata instancabile per sessantacinque anni. La produzione scientifica originale del Berzolari va dalla sua tesi di laurea del 1884 (pubblicata nel 1885), agli ultimi lavori apparsi dopo la sua morte. Essa tuttavia, per quanto numerosa, non rappresenta che una piccola parte dei servizi resi alla matematica dal Berzolari.

Di questi dirò in seguito; conviene ora, senza entrare in dettagli, inquadrare rapidamente la produzione del Berzolari.

Fra le agitazioni e le lotte per il risorgimento nazionale si veniva rapidamente creando in Italia, nella seconda metà del secolo passato, per merito di G. Battaglini, E. Beltrami, E. Betti, F. Brioschi, F. Casorati e Luigi Cremona, una scuola matematica italiana degna della ricostituita unità nazionale.

Nel ventennio che va dalla pubblicazione della *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (1862) del Cremona a quella della *Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projiciren und Schneiden* (1882) del Veronese si può dire che si siano posti i fondamenti della futura scuola geometrica italiana.

A porli parteciparono (oltre i nominati), il D'Ovidio e il Bertini; subito dopo s'inizia l'attività di Corrado Segre (1884) che assorbe nella nuova geometria i risultati degli algebristi tedeschi (Weierstrass, Kronecker, Frobenius) mentre Pasquale Del Pezzo esplora per primo in senso differenziale i nuovi enti iperspaziali.

È in questa atmosfera di viva rinascita del pensiero geometrico in Italia che s'inizia l'opera di L. Berzolari. Essa è nettamente legata a quella dei Suoi maestri Beltrami, Casorati e soprattutto Bertini.

Dal Bertini Egli trasse l'interesse per le proprietà degli enti geometrici rispetto al gruppo proiettivo che domina la maggior parte della Sua produzione; dal Casorati, allievo del Brioschi, e dal Beltrami l'interesse per le forme algebriche, al loro algoritmo invariantivo e alle interpretazioni geometriche dei risultati di esso; al Beltrami (e al Casorati) si può far risalire l'interesse per le questioni differenziali.

La promettente ricchezza dei risultati conseguiti col metodo sintetico, la varietà delle configurazioni e dei loro rapporti offerti alla contemplazione dei geometri esercitarono sul Berzolari un fascino che si protrasse per tutta la Sua vita, anche quando indirizzi più vasti, e che pure il Berzolari seguiva nella Sua eccezionale cultura, ne attenuarono la portata e l'interesse. Ma è da osservare che questi non sarebbero forse nati se i risultati accumulati nel campo proiettivo non avessero mostrata la necessità di punti di vista più elevati nello studio degli enti algebrici e fornito il materiale di controllo necessario alle nuove costruzioni.

(7) Nel 1927 passò alla cattedra di Analisi algebrica e infinitesimale. Nella Università di Pavia ebbe incarichi di Statica grafica, di Matematiche superiori e di Geometria superiore. Nel triennio 1925-28 ebbe anche l'incarico di Geometria analitica proiettiva e descrittiva nel Politecnico di Milano.

Allo studio di particolari enti algebrici è dedicata la tesi di laurea del Berzolari sulla superficie del 4° ordine con conica doppia in cui, nonostante i numerosi lavori precedenti sull'argomento, riesce all'A. di assegnare con metodo sintetico molte nuove proprietà relative alla configurazione delle sue rette e inaspettate analogie con le superficie del 3° ordine. È da notare sin da questo primo lavoro, la limpidezza dell'esposizione e la esatta e copiosa documentazione bibliografica, qualità caratteristica di tutt'i lavori del Berzolari.

Allo stesso indirizzo (enti e configurazioni speciali) vanno ascritte le ricerche, susseguitesi in vario ordine di tempo, sulle curve sghembe razionali del 4° e del 5° ordine e più in generale sulle curve razionali in uno spazio qualsiasi, sui sistemi di rette in posizione di Schläfli, sull'estensione agli iperspazi del concetto di tetraedri di Möbius, sulla configurazione di Kummer e su molte altre di rette, di punti, di piani legate sia alla superficie cubica sia alla varietà cubica di S_4 con dieci punti doppi, sulle quadriche passanti per i lati di un quadrilatero sghembo, sulle tangenti comuni a due quadriche, sulle coppie di cubiche sghembe in posizione ottaedrica, sulle relazioni fra la configurazione del pentaedro e del quadrilatero piano.

È questo un insieme di lavori diretti a scoprire e illuminare rapporti imprevisi, ricchi di risultati eleganti che non è possibile riferire in dettaglio.

Sempre relative ad enti algebrici, ma di carattere più vasto e riguardanti alcuni punti fondamentali della loro teoria, sono le ricerche sulle intersezioni di tre superficie algebriche nello spazio ordinario (facilmente estendibili agli iperspazi), sulle condizioni atte a determinare una curva o superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione, sulla generazione proiettiva delle curve piane.

Ancora ad enti algebrici e precisamente a questioni numerative, si riferiscono le ricerche sulle curve di due fasci aventi fra loro contatti assegnati, sulle secanti multiple di una curva algebrica, sul problema degli ombelichi e delle normali di una superficie o varietà, sulle coniche appoggiate a più curve algebriche.

Anche la teoria delle corrispondenze algebriche attrasse l'attenzione del Berzolari; sia in quella delle involuzioni piane che in quella delle corrispondenze fra punti di un iperspazio. Egli dette teoremi generali che includono una quantità di risultati particolari già noti e dovuti ad illustri geometri.

In tutti questi lavori come nell'altro sul gruppo ottaedrico delle collineazioni piane, è notevole il fatto, già rilevato in occasione della tesi, che il Berzolari anche quando si occupa di configurazioni già largamente studiate riesce a scoprire nuove e più riposte proprietà di esse e sempre con mezzi che non sembrano ulteriormente semplificabili.

Un altro indirizzo a cui il Berzolari ha legato il Suo nome è quello della teoria invariante delle forme algebriche binarie: più che per problemi puramente algoritmici Egli se ne servì con singolare maestria, seguendo in parte un'idea già utilizzata da Giulio Pittarelli e che darà poi nuovi frutti con G. Fano e A. Comessatti, e in più larga parte nuove idee proprie per lo studio delle curve razionali e delle numerose configurazioni ad esse collegate.

Non è facile che un geometra che coltivi l'indirizzo algebrico senta interesse per l'indirizzo differenziale: le ricerche nei due campi fanno appello a diverse

qualità intuitive e, almeno nella fase in cui lavorava il Berzolari, i legami fra i due indirizzi, venuti poi sempre più affermandosi, non erano evidenti. Non a questi legami si dedicò il Berzolari; ma come l'insegnamento del Bertini l'aveva indirizzato alla ricerca sintetica e quello del Casorati (e per suo tramite, del Brioschi) l'aveva attratto all'algebra, gli insegnamenti del Beltrami, che aveva pienamente chiarita e resa visibile l'esistenza di spazi non-euclidei, e del Casorati (e per suo tramite del Bordoni) avevano determinato in Lui l'interesse per la geometria differenziale. A questa dedicò solo cinque lavori di cui tre nell'indirizzo metrico e due nell'indirizzo proiettivo: e per quanto numericamente questa produzione costituisca la parte di gran lunga minore essa è, a mio giudizio, forse la più importante nell'attività scientifica originale del Berzolari.

Pochi erano allora (1897) i risultati generali noti sulla geometria degli spazi di Riemann: il Berzolari affronta per primo il problema oggi detto d'immersione di una varietà in uno spazio riemanniano e, secondo la tradizione italiana, con vedute geometriche che si sono perdute negli sviluppi algoritmici successivi⁽⁸⁾.

In sostanza il procedimento da Lui indicato per questi problemi è quello ancor oggi seguito: ed è mia convizione che le idee introdotte dal Berzolari possano ancora dar frutto.

I due lavori di geometria proiettiva differenziale sono fra i primi in questo indirizzo che ha avuto poi i maggiori sviluppi in Italia. A differenza del Del Pezzo, che cominciò con metodo sintetico l'esplorazione dei successivi intorni sulle superficie e varietà onde trarne conseguenze per gli enti algebrici, il Berzolari, seguendo l'Halphen, studia la rappresentazione delle curve iperspeziali nel gruppo proiettivo mediante equazioni differenziali lineari, determina i loro invarianti e il significato geometrico dell'annullarsi di questi. Il Berzolari colse il valore generale dell'idea dell'Halphen, che doveva poi estendersi alle relazioni fra la geometria proiettiva di enti geometrici e le equazioni lineari a derivate parziali.

La produzione originale del Berzolari è lungi dall'esaurire la Sua attività scientifica. Chè anzi essa è di gran lunga superata, sia per l'ampiezza dei campi considerati sia per mole di lavoro, dalla organizzazione in vaste opere enciclopediche del sapere raggiunto.

Questa attività richiede anzitutto il sacrificio del piacere e dell'orgoglio della ricerca scientifica personale per porre la propria dottrina a servizio e a profitto di altri ricercatori; e non dà neppure la soddisfazione che prova l'A. di un libro nel legare il proprio nome ad un'esposizione originale della materia al cui sviluppo abbia contribuito.

Ma oltre a questa mortificazione della propria personalità come ricercatore e come autore, essa richiede una completa conoscenza della materia da raccogliere,

(8) A documentazione di questa mia asserzione mi sia permesso riferirmi ad alcuni trattati di Geometria riemanniana. Nella *Riemannian Geometry* di L. P. EISENHART, manca del tutto il nome del Berzolari; così nel *Ricci-Kalkül* di J. A. SCHOUTEN e nel *Lehrbuch der Differentialgeometrie* di A. DUSCHEK e W. MAYER (Bd. II, W. Mayer). Nei *Grundzüge der mehrdimensionalen Geometrie* di D. J. STRUIK e nella *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* di J. A. SCHOUTEN e D. J. STRUIK i lavori del Berzolari sono citati ma senza il dovuto rilievo.

chiari criteri ordinativi secondo cui raggruppare i prodotti delle varie fantasie individuali, senso di equilibrio onde contemperare le necessità di un'esatta e minuta documentazione bibliografica con l'esigenza di porre in rilievo le idee direttrici, vigilanza continua delle proprie preferenze, obiettività e serenità di giudizio.

Questa attività impegnò il Berzolari per circa mezzo secolo: solo la Sua eccezionale cultura, la Sua memoria ferrea, la Sua instancabile tenacia di lavoro, il Suo disinteresse e la Sua dirittura morale potevano rendere possibile la monumentale opera che ci ha lasciato.

Il frutto di questa Sua attività organizzatrice è distribuito in varie raccolte: il *Repertorium delle matematiche superiori* di E. Pascal (edizione tedesca), l'*Enciclopedia tedesca delle Scienze matematiche*, l'*Enciclopedia italiana Treccani* e l'*Enciclopedia delle Matematiche elementari*.

Al *Repertorium* contribuì con dieci poderosi articoli, che di per sè costituiscono un trattato, sulla teoria delle curve piane algebriche, sulla geometria sopra una curva, sulle corrispondenze fra curve algebriche e fra piani, sulla teoria delle superficie e delle curve algebriche sghembe.

All'*Enciclopedia italiana* dette un eccellente articolo sull'Algebra.

Ma ancora più notevoli dei precedenti sono i tre magistrali articoli, di cui ciascuno è un volume sull'argomento trattato, dell'*Enciclopedia tedesca*: sulla teoria generale delle curve piane algebriche (1906), sulle curve sghembe algebriche (1926)⁽⁹⁾, e sulle trasformazioni e corrispondenze algebriche (1932).

A porre in rilievo l'ardua e complessa fatica di questa costruzione e il valore di essa ripeterò qui le parole con cui Francesco Severi presentò a quest'Accademia il terzo volume:

«L'articolo costituisce addirittura un volume ed è il terzo di una serie di monografie con cui il Berzolari va illustrando lo sviluppo della geometria algebrica. E poichè questa branca di matematica è oggi gloria essenzialmente italiana, l'opera condotta nel modo magistrale con cui la conduce il Berzolari, non può che tornare vantaggiosa, dal punto di vista nazionale ed internazionale, al prestigio della scienza italiana. Pochi matematici avrebbero potuto e saputo accingersi ad un lavoro di tale mole e compierlo con pari scrupolosità, intelligenza e dottrina.

«La immensità delle ricerche bibliografiche, il loro confronto e la messa in prospettiva delle diverse teorie e degli apporti più significativi, sono tali elementi che valutati a priori avrebbero sgomentato chiunque»⁽¹⁰⁾.

Ma ad un'altra grandiosa, e originale, opera enciclopedica il Berzolari ha legato il Suo nome: l'*Enciclopedia delle Matematiche elementari*.

L'idea, espressa da R. Bonola nel 1909, prese corpo durante il quadriennio 1915-1918 in cui il Berzolari tenne la presidenza della «Mathesis».

Scopo principale dell'*Enciclopedia*, fissato fin dall'inizio, era «di diffondere la cultura della Matematica tra quanti, non avendo la fortuna di risiedere in centri

(9) Questo articolo porta anche il nome del Rohn: ma di fatto, avuto l'incarico di condurlo a termine dopo la morte del Rohn, il Berzolari rifiuse completamente il materiale lasciato facendone opera propria.

(10) Si veda anche la bella presentazione dello stesso volume fatta da A. COMMESSATTI nel «Periodico di Matematica» (ser. IV, vol. XIV, 1934).

universitari, non possono facilmente procurarsi materiale di studio, nè possono allargare le proprie cognizioni ed indirizzare proficuamente l'attività personale ».

Il Berzolari, per la Sua esperienza personale nella scuola media, sentiva particolarmente i bisogni intellettuali del nostro corpo insegnante, e per la Sua eccezionale cultura, per la Sua capacità organizzatrice e per la tenacia di lavoro era il più adatto ad organizzare e condurre a termine la grandiosa impresa.

Aiutato inizialmente da G. Vivanti e D. Gigli Egli ne fu sempre (per oltre trent'anni) il vero animatore: Egli non solo fissò il piano dell'opera, scelse i collaboratori e sostituì quelli che la sorte gli veniva sottraendo, contribuì personalmente con articoli all'Enciclopedia, ma di ogni articolo rivide il manoscritto, suggerendo ove necessario modificazioni e rifacimenti, completandone la bibliografia, stabilendone i raccordi con altri articoli. E fino agli ultimissimi giorni corresse personalmente tutte le bozze percorrendole con l'occhio ormai stanco quasi aderente alla carta.

Dai tre volumi progettati si passò a sei⁽¹¹⁾; la logica, l'aritmetica, l'algebra, l'analisi, la geometria nei suoi fondamenti e nei suoi sviluppi, la trigonometria, la meccanica razionale, classica e relativistica, la meccanica celeste, l'ottica geometrica, la topografia e la cristallografia, il calcolo delle probabilità, la statistica e la matematica attuariale, gli indirizzi del pensiero matematico e fisico vi sono passati in rassegna, con ricca documentazione bibliografica.

Questo rapido elenco dell'attività organizzatrice del Berzolari nel campo enciclopedico non può dare che una vaga idea dell'immensità dell'opera da Lui compiuta a beneficio degli studiosi: si pensi che, a prescindere dalla vastità del disegno e dal ripensamento di tante teorie differenti in relazione ad esso, che costituisce la parte più elevata della fatica enciclopedica, le sole citazioni bibliografiche raccolte in questi vari volumi ammontano a decine di migliaia. E anche la premessa materiale necessaria a rendere possibile la consultazione diretta di tanti lavori era stata creata dal Berzolari con l'organizzazione dell'Istituto matematico ch'Egli diresse per quasi mezzo secolo e che vide quotidianamente la Sua grande fatica.

Poichè il Berzolari non accettò mai alcun ufficio per vanità, ma come un dovere nel quale porre a servizio degli altri le sue capacità. Ed è perciò che in ogni carica da lui ricoperta ha lasciato traccia della Sua probità, del Suo equilibrio, della Sua azione costruttiva.

Si è detto di Lui nelle Sue funzioni di direttore d'Istituto, di preside di Facoltà, di rettore di Università (in cui dette nuova vita al Consorzio universitario), di presidente della « Mathesis ». Dell'Istituto Lombardo fu presidente (dal 1925 al 1927; vice-presidente dal 1921 al 1924). Membro della giunta esecutiva del Consiglio Nazionale delle Ricerche per la Matematica (1929-1933) promosse l'inizio della collezione di monografie matematiche che comprende oggi eccellenti volumi di Vitali e Sansone, Sansone, Fano, Ghizzetti e Tricomi.

Dal 1933 al 1948 (salvo una breve interruzione dovuta a ragioni di guerra) fu presidente, e poi presidente onorario nel 1949, dell'Unione Matematica Italiana:

(11) Il primo fu pubblicato nel 1929; l'ultimo pochi giorni dopo la morte del Berzolari e fu l'ultima Sua fatica.

non ostante il periodo eccezionalmente difficile, Egli seppe reggerne le sorti con dignità, estenderne il carattere nazionale, portarla all'attenzione nel campo internazionale, incrementarne il numero dei soci e la pubblicazione del Bollettino.

Durante la Sua presidenza fu decisa la pubblicazione di opere di grandi matematici italiani e iniziato il lavoro per l'attuazione di essa: i volumi delle opere del Dini e del Bianchi attendono da un governo che sappia apprezzare il valore della cultura, anche come strumento nelle competizioni internazionali, i mezzi finanziari per essere pubblicate. L'Unione Matematica Italiana, durante la presidenza del Berzolari, aveva pubblicato, con i soli propri mezzi, il secondo volume delle opere del Ruffini (curato da Ettore Bortolotti) la cui edizione è andata completamente distrutta in un bombardamento di guerra⁽¹²⁾. Sta ora per uscire il primo volume, curato personalmente dal Berzolari (e in parte stampato prima della guerra), delle opere del Casorati, Suo maestro.

Come si vede, in tutta questa attività, sia di enciclopedie che di pubblicazioni di opere, il Berzolari ebbe costantemente di mira di sottrarre all'azione disgregatrice del tempo il risultato della ricerca scientifica e in particolare di quella Italiana, troppo spesso ignorata all'estero: è una fatica titanica, densa di generosi sacrifici, ricca di benemerenze.

« Di queste benemerenze, di questi sacrifici », scrisse il Comessatti, « purtroppo il grosso pubblico non potrà sapere o adeguatamente giudicare »: più doloroso ancora, aggiungo io, è che queste benemerenze e questi sacrifici non abbiano suggerito, a chi ha la tutela della Scuola, provvedimenti atti a sollevarLo dalle angustie di un'onorata vecchiezza⁽¹³⁾.

Ebbe invece il Berzolari riconoscimenti accademici⁽¹⁴⁾ e soprattutto il conforto dell'affetto di amici e discepoli. Nell'insegnamento universitario aveva riversato la Sua larga dottrina, la Sua chiarezza d'esposizione, formando, anche con l'esempio, falangi di educatori e di insegnanti. Il suo magistero si estese al di fuori delle aule scolastiche in cui insegnava, pronto come Egli era a porre le Sue conoscenze a servizio di quanti si rivolgessero a Lui.

Della somma di affetti così creati, niente affatto in contrasto con la serietà e la riservatezza dell'insegnante e dell'esaminatore, Egli ebbe la misura nelle onoranze che Gli furono rese nel 1910 per il venticinquesimo anno d'insegnamento e nel 1936 per il Suo collocamento a riposo⁽¹⁵⁾.

(12) Una copia ne esiste nella Biblioteca dell'Accademia.

(13) Altro indice doloroso dell'incomprensione del « grosso pubblico » già lamentata dal Comessatti: il *Corriere della Sera* non ha dedicato una riga al ricordo di un Presidente della massima istituzione culturale lombarda. Il Berzolari, più generoso verso lo Stato che lo Stato verso di Lui, ha regalato la Sua biblioteca all'Istituto Matematico dell'Università di Pavia e, in caso di duplicati, al Collegio Ghislieri.

(14) Oltre che dell'Accademia dei Lincei e dell'Istituto Lombardo fu Socio dell'Accademia delle Scienze di Torino, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, dell'Accademia Pontaniana di Napoli e della Società Italiana (poi Accademia Nazionale) dei XL.

(15) In questa occasione fu pubblicato in Suo onore un volume di *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari* (Pavia, 1936) che raccoglie articoli di cinquanta Autori italiani.

Questo tuttavia non segnò per il Berzolari (simile anche in ciò al Suo maestro Bertini) la fine della Sua attività didattica: perchè Egli amava la Scuola, amava i giovani per l'intima risonanza con la giovialità del Suo carattere.

La Sua profonda comprensione umana lo faceva allo stesso tempo amico festoso dei bambini e, occorrendo, giudice severo degli uomini. E il sorriso arguto e la battuta tagliente che quasi involontariamente sfuggivano all'abituale rigido controllo del Suo giudizio esprimevano allo stesso tempo il penetrante intuito e il generoso compatimento delle debolezze altrui.

L'Italia dopo tante dolorose esperienze ha più che mai bisogno di scienziati, di educatori, di uomini come Luigi Berzolari.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

1. *Sulla superficie del quarto ordine avente una conica doppia.* « Ann. di mat. » (2), 13, pp. 18-174 (1885).
2. *Ricerche sulle trasformazioni piane, univoche, involutorie, e loro applicazioni alla determinazione delle involuzioni di quinta classe.* Id. (2), 16 pp. 191-275 (1888-89).
3. *Un nuovo teorema sulle involuzioni piane.* « Rend. Palermo », 3, pp. 145-159 (1889).
4. *Sulla curva gobba razionale del quart'ordine.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), 23, pp. 96-106 (1890).
5. *Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba* (due Note). « Rend. Palermo », 5, pp. 9-32 (1891).
6. *Sulla teoria dell'involuzione, specialmente dell'involuzione cubica.* « Rend. Acc. Napoli » (2), 5, pp. 35-40 (1891).
7. *Sull'involuzione cubica.* Id. (2), 5, pp. 71-79 (1891).
8. *Sulle condizioni invariantive perchè due quintiche binarie abbiano quattro radici comuni.* « Ann. di mat. » (2), 19, pp. 269-288 (1891-1892).
9. *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve razionali del quart'ordine.* Id. (2), 30, pp. 101-161 (1892-93).
10. *Sopra alcuni iperboloidi annessi alla curva gobba razionale del quarto ordine.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), 35, pp. 950-971 (1892).
11. *Sulla curva del terz'ordine dotata di un punto doppio.* Id. (2), 25, pp. 1025-1036 (1892).
12. *Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.* « Ann. di mat. » (2), 21, pp. 1-24 (1893).
13. *Sui combinanti dei sistemi lineari di quintiche binarie.* « Rend. Palermo », 7, pp. 5-18 (1893).
14. *Sulla curva gobba razionale di quint'ordine.* « Mem. Acc. Lincei » (4), 7, pp. 305-341 (1893).
15. *Sull'assonometria ortogonale considerata come metodo di rappresentazione.* Pavia, p. 24 (1893).
16. *Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre od a quattro dimensioni.* (Estratto di lettera al prof. C. F. Geiser), « Rend. Palermo » 9, pp. 186-197 (1895).
17. *Sopra un problema che comprende quello di trovare il numero degli ombelichi di una superficie generale d'ordine n .* « Atti Acc. Torino », 30, pp. 756-760 (1895).
18. *Sulle corrispondenze m_1, m_2, m_3 fra i punti di uno spazio lineare di quante si vogliano dimensioni.* « Rend. Acc. Lincei » (5), 4, 2° sem., pp. 148-155 (1895).
19. *Sulle intersezioni di tre superficie algebriche.* « Ann. di mat. » (2), 24, pp. 165-191 (1896).
20. *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano.* « Atti Acc. Torino », 31, pp. 476-484 (1896).

21. *Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni.* « Rend. Acc. Lincei » (5), 5, 1^o sem., pp. 247-254 (1896).
22. *Sugli invarianti differenziali proiettivi delle curve di un iperspazio.* « Ann. di mat. » (2), 26, pp. 1-58 (1897).
23. *Un'osservazione sull'estensione dei teoremi di Eulero e di Meusnier agli iperspazi.* « Rend. Acc. Lincei » (5), 6, 2^o sem., pp. 283-290 (1897).
24. *Ancora sull'estensione dei teoremi di Eulero e di Meusnier agli iperspazi.* Id. (5), 7, 1^o sem., p. 466 (1898).
25. *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque* (due Note). « Atti Acc. Torino », 33, pp. 692-700, 759-778 (1898).
26. *Sur les faisceaux de formes binaires cubiques, pour lesquels on donne une forme du, faisceaux syzégétique déterminé par la jacobienne.* (Lettre adressée a M. Oskar Bolza, à Chicago), « Math. Ann. », 51, pp. 473-477 (1899).
27. *Sulle spinte formate con potenze di una forma binaria quadratica.* « Rend. Palermo », 12, pp. 258-259 (1898).
28. *Sulla teoria delle curve razionali* (lit.), p. 28. Torino 1898.
29. *Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche.* (due Note). « Rend. Ist. Lomb. » (2), 33, pp. 664-674, 809-821.
30. *Sulle curve di ordine n dello spazio ad n dimensioni.* Id. (2), 36, pp. 791-795 (1903).
31. *Sopra un teorema relativo alle collineazioni.* Id. (2), 36, pp. 919-932 (1903).
32. *Sulla Lemniscata proiettiva* (due Note). Id. (2), 37, pp. 277-288, 304-313 (1904).
33. *Sulla omologia di due piramidi in un iperspazio.* « Rend. Acc. Lincei » (5), 13, 1^o sem., pp. 446-451 (1904).
34. *Sulle collineazioni cicliche del quart'ordine determinate da un tetraedro e sul loro legame colla teoria dei tetraedri desmici.* « Rend. Ist. Lomb. » (2), 37, pp. 745-755 (1904).
35. *Sui sistemi di $n+1$ rette dello spazio ad n dimensioni, situate in posizione di Schläfli.* « Rend. Palermo », 20, pp. 229-247 (1905).
36. *Osservazioni alla Nota del prof. E. Ciani: « Sopra le curve gobbe razionali del quinto ordine ».* « Rend. Ist. Lomb. » (2), 38, pp. 446-448 (1905).
37. *Della vita e delle opere di Luigi Cremona.* Id. (2), 39, pp. 95-155 (1906).
38. *Sulle curve gobbe razionali dotate di piani stazionari singolari.* Id. (2), 39, pp. 419-422 (1906).
39. *Sull'estensione del concetto di tetraedri di Möbius agli iperspazi.* « Rend. Palermo », 22, pp. 136-140 (1906).
40. *Alcuni teoremi sulle curve razionali di uno spazio ad r dimensioni dotate di $r+1$ punti d'iperosculazione.* Id. 22, pp. 214-219 (1906).
41. *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven.* « Encycl. der math. Wiss. », Leipzig, 32, pp. 313-455 (giugno 1906).
42. *Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione.* « Rend. Palermo », 24, pp. 1-16 (1907).
43. *Sopra la configurazione di Kummer ed il suo intervento nella teoria delle cubiche gobbe.* « Rend. Acc. Lincei » (5), 16, 1^o sem., pp. 726-731 (1907).
44. FERDINANDO ASCHIERI, « Annuario R. Università di Pavia », pp. 283-285 (1907-1908).
45. EUGENIO BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità.* Pisa, 1907. Recensione in « Boll. Bibl. e storia delle mat. », 10, pp. 37-51 (1907). Id. della 2^a ediz. (Messina, 1923), in « Boll. di mat., sez. st. bibl. » (2), pp. LXXVII-LXXVIII (1924).
46. *Relazione sul concorso al premio di matematica per il 1909.* « Rend. Ist. Lomb » (2), 42, pp. 988-991 (1909).
47. *Allgemeine Theorie der Ebenen algebraischen Kurven.* « Repertorium der höheren Math. », 2 auf. herausg. von H. E. Timerding, Leipzig und Berlin, 1910, 1922, II (Geometrie), Kap. XIII, pp. 270-305.

48. *Die Geometrie auf einer ebenen algebraischen Kurve*. Id., Kap. XIV, pp. 306-341.
49. *Die Punktkorrespondenzen zwischen algebraischen Kurven*. Id., Kap. XV, pp. 342-355.
50. *Algebraische Korrespondenzen zwischen zwei Ebenen*. Id., Kap. XVI, pp. 356-372.
51. *Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen* (Grundlagen). Id., Kap. XXX, pp. 649-675.
52. *Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen* (Weitere Ausführungen). Id., Kap. XXXI, pp. 676-712.
53. *Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen* (Besondere Fragen). Id., Kap. XXXII, pp. 713-740.
54. *Flächen dritter Ordnung*. Id., Kap. XXXIV, pp. 783-849.
55. *Allgemeine Theorie der algebraischen Raumkurven*. Id., Kap. XXXVI, pp. 881-935.
56. *Besondere algebraischen Raumkurven*. Id., Kap. XXXVII, pp. 936-962.
57. *Geometria analitica*, vol. I: *Il metodo delle coordinate*, Milano, Hoepli, 1911; 2^a ediz. (con Appendice sugli elementi del calcolo vettoriale) 1920; 3^a ediz. (c. s.) 1925 (pp. xvi + 459); vol. II: *Curve e superficie del secondo ordine*, Milano, Hoepli, 1916; 2^a ediz. 1922; 3^a ediz. 1942 (pp. xii + 457).
58. *Sulla determinazione di una curva o d'una superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), 47, pp. 556-564 (1914).
59. *Théorie générale des courbes planes algébriques*. « Encycl. des Sciences math. », III, Paris 1915, pp. 257-304.
60. *Sulla polarità rispetto ad un quadrilatero piano completo*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), 49, pp. 463-473 (1916).
61. *Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani*. « Rend. Lincei » (5), 25, 2^o sem., pp. 258-264 (1916).
62. *Proprietà caratteristiche della configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una superficie del terz'ordine*. Id. (5), 25, 2^o sem., pp. 367-372 (1916).
63. *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos*. Id. (5), 26, 1^o sem., pp. 29-34, 102-104 (1917).
64. *Le configurazioni (106, 154) di punti e piani*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), 51, pp. 243-258 (1918).
65. *Sul significato geometrico di alcune identità lineari fra quadrati di forme algebriche*. Id. (2), 51, pp. 431-452 (1918).
66. GIUSEPPE COLOMBO, *Commemorazione*. Id. (2), 54, pp. 90-96 (1921).
67. *Sulle forme binarie del quarto ordine*. Id. (2), 54, pp. 225-238 (1921).
68. MAX NOETHER, *Commemorazione*. Id. (2), 54, pp. 600-603 (1921).
69. *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione* (quattro Note). « Rend. Lincei » (5), 31, 1^o sem., pp. 421-425, 446-450, 489-493; (1922); 2^o sem. pp. 5-9 (1922).
70. *Discorso per l'inaugurazione del monumento ai professori e studenti caduti nella Grande Guerra*. « Annuario Università di Pavia », pp. 215-218 (1922-23).
71. CORRADO SEGRE, *Cenni commemorativi*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), 57, pp. 528-532 (1924) (riprodotti in « Esercitaz. matem. Catania », 4, pp. 105-110) (1924).
72. FELIX KLEIN, *Cenno necrologico*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), 58, pp. 691-694 (1925).
73. *I matematici dello studio pavese*. « Universitatis Ticinensis saecularia undecima », Pavia 1925, pp. 17-20.
74. *Commemorazione di Camillo Golgi*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), 59, pp. 756-762 (1926).
75. *Algebraische Raumkurven und Abwickelbare Flächen* (mit K. Rohn). « Encycl. der math. Wiss. », Leipzig und Berlin, 32, pp. 1229-1436 (luglio 1926).

76. *Algebra*. « Encicl. It. di scienze lettere ed arti (Treccani) », 2, pp. 421-445 (1929).
77. *Calcolo combinatorio*. « Enc. delle matematiche elementari 1₂ », Milano 1932 (a cura di L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli), pp. 1-13.
78. *Elementi della teoria dei gruppi*. Id., pp. 15-69.
79. *Determinanti*. Id., pp. 71-104.
80. *Equazioni lineari*. Id., pp. 105-121.
81. *Sostituzioni lineari, bilineari, quadratiche*. Id., pp. 123-154.
82. EUGENIO BERTINI, *Cenno necrologico*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), 66, pp. 67-68 (1933).
83. EUGENIO BERTINI, *Commemorazione*. Id. (2), 66, pp. 609-635 (1933).
84. EUGENIO BERTINI, *Cenno necrologico*. « Annuario Università di Pavia », pp. 307-311 (1933-34).
85. EUGENIO BERTINI, « Boll. U.M.I. », 12, pp. 121-123 (1933).
86. *Estensione di un teorema di Bertini-Laguerre*. Id., 12, pp. 121-123 (1933).
87. *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*. « Encycl. der math. Wiss. », Leipzig und Berlin, 3a, pp. 1781-2218 (dicembre 1932).
88. ALEXANDER VON BRILL, *Commemorazione*. « Rend. Ist. Lomb. » (2), 68, pp. 488-491.
89. *Relazione sul concorso al premio della Fondazione Pascal*. Id. (2) 68, pp. 1066-1067 (1935).
90. *Sulle quadriche passanti per i lati di un quadrilatero sghembo* (due Note). Id. (2), 69, pp. 513-529 530-552. (1936).
91. SALVATORE PINCHERLE, « Boll. U.M.I. », 15, pp. 149-162 (1936).
92. *Sulle tangenti comuni a due quadriche* (due Note). « Rend. Ist. Lomb. » (3), 70, (Scienze), pp. 261-238, 300-316 (1937).
93. *Sulla configurazione determinata da due cubiche sghembe in posizione ottaedrica* (Sunto). « Boll. U.M.I. » (2), 1, pp. 348-386 (1939).
94. *Sulla configurazione determinata da due cubiche sghembe in posizione ottaedrica*. « Atti Acc. d'Italia, Mem. cl. Scienze », 11, pp. 69-208 (1940).
95. *Su alcune rappresentazioni del sistema di due cubiche sghembe in posizione ottaedrica*. « Atti Acc. Torino », 74, pp. 653-674 (1938-39).
96. GAETANO SCORZA, « Boll. U.M.I. » (2), 1, pp. 401-408 (1939).
97. GAETANO SCORZA, *Commemorazione*. « Rend. Ist. Lomb. » (3), 73 (Parte gen.), pp. 125-145 (1939-40).
98. *Sull'equazione differenziale di un sistema ∞^1 di coniche osculatrici ad una conica data*. « Boll. U.M.I. » (2), 2, pp. 1-10 (1940).
99. ERNESTO PASCAL, *Commemorazione*. « Rend. Ist. Lomb. » (3), 73 (Parte gen.), pp. 162-170 (1939-40).
100. *Sulla curva sghemba del quinto ordine dotata di tre tangenti doppie*. Id. (3), 73, (Scienze) pp. 545-568 (1939-40).
101. *Sui combinanti dei sistemi di forze binarie annessi alle curve razionali*. « Atti Acc. d'Italia, Mem. cl. Scienze », 14, pp. 545-601 (1943).
102. *Sulle relazioni fra la configurazione del pentaedro e quella del quadrilatero piano*. « Rend. Ist. Lomb. » (3), 76 (Scienze), pp. 185-190 (1942-43).
103. *Sui gruppi polari*. « Boll. U.M.I. » (2), 5, pp. 216-219 (1943).
104. *Alcune osservazioni sopra un teorema di H. Grassman relativo alla generazione proiettiva delle curve piane algebriche*. « Rend. Ist. Lomb. » (3), 77 (Scienze), pp. 240-248 (1943-44).
105. *Sopra una risolvante, a coefficienti invarianti, dell'equazione di quinto grado*. Id. (3), 77 (Scienze), pp. 574-578 (1943-44).
106. *Sul gruppo ottaedrico di collineazioni piane*. Id. (3), 78 (Scienze), pp. 401-424 (1944-45).
107. *Sulla curva piana razionale del quarto ordine*. « Ann. di mat. » (4), 24 pp. 13-37 (1945).

108. *Commemorazione del Corrispondente Annibale Comessatti*. « Rend. Acc. Lincei » (8), 1, pp. 810-815 (1946).
109. ANNIBALE COMESSATTI, *Commemorazione*. « Rend. Ist. Lomb. » (3), 79 (Parte gen.), pp. 39-72 (1945-46).
110. *Su un semplice problema di geometria numerativa*. « Boll. U.M.I. » (3), 2, pp. 93-95 (1947).
111. FABIO CONFORTO, *Funzioni abeliane e matrici di Riemann* (Parte 1^a), Roma 1942. Recensione in « Boll. U.M.I. » (3), 3, pp. 172-175 (1948).
112. *Sulle coniche osculanti delle curve razionali normali*. « Atti di Mat. », 4 (28), pp. 13-15 (1949).
113. *Sopra una certa classe di poligoni inscrittibili in una curva algebrica*. Id. (4), 28 pp. 17-20 (1949).
114. *Sulle normali delle varietà algebriche*. « Rend. Acc. Naz. dei XL », (4), 1 (1950).

Osservazione. - Dal precedente elenco sono omissi:

I. I discorsi presidenziali nelle adunanze solenni dell'Istituto Lombardo nel biennio 1925-27 ed i brevi cenni necrologici su Gregorio Ricci Curbastro, Carlo Pascal, Ettore de Ruggieri, Ettore Molinari, Andrea Naccari, Luigi Lucatello, Francesco d'Ovidio, Giacomo Cattaneo (cfr. « Rend. Ist. Lomb. »).

II. I discorsi rettorali per l'inaugurazione dell'anno accademico nei periodi 1909-13, 1920-22 (cfr. « Annuario dell'Università di Pavia »).

III. I discorsi pronunziati come Presidente della « Unione Matematica Italiana » (cfr. « Atti del primo e del secondo Congresso », Firenze 1937, Bologna 1940).

IV. Recensioni in « Scientia » ed in « Boll. U.M.I. », fatta eccezione per (111).

V. I corsi litografici di *Lezioni di Geometria proiettiva* (Torino 1897), *Esercitazioni di geometria proiettiva* (Torino 1897), *Lezioni di Geometria descrittiva* (Torino 1899), *Esercitazioni di geometria descrittiva* (Torino 1899), *Lezioni di Analisi algebrica* (Pavia 1928, Padova 1933), *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Pavia 1931).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà la parola al Socio Bompiani che commemora il compianto Collega LUIGI BERZOLARI ricordandone con commossa parola la nobile figura di uomo e di scienziato.

Il Presidente ringrazia il Socio Bompiani e si unisce a lui nell'esaltazione dello scienziato valoroso ed integerrimo che, dopo aver dedicato tutta la vita alla scuola, agli studi e alla famiglia, ha trascorso gli ultimi anni in condizioni disagiate. Interprete dei sentimenti dell'intera Accademia, invia un riverente saluto alla memoria dell'illustre studioso e dell'amico. Sospende quindi la seduta in segno di lutto.

Il Senatore Castelnovo dà quindi alla Classe la dolorosa notizia della morte del Socio Nazionale Biagio Longo, rientrato a far parte dell'Accademia dal giugno scorso e deceduto in Roma il 29 novembre c. a. Biagio Longo era un botanico di alto valore che onorò la scienza italiana. Nel 1915 gli fu conferito, insieme al compianto Collega Silvestri, il Premio Reale per le scienze biologiche. A nome dell'Accademia il Presidente invia un riverente saluto alla Sua memoria.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa la Classe di aver trasmesso al Ministro della Pubblica Istruzione l'ordine del giorno sulla ricerca scientifica, approvato per acclamazione nella seduta dell'11 novembre e di aver chiesto udienza al Ministro stesso per illustrargli personalmente le necessità alle quali il predetto ordine del giorno si riferisce. Nello stesso tempo e sempre per analoghi fini ha chiesto udienza, insieme al Senatore Ferrabino, Presidente della Commissione senatoriale dell'Istruzione, al Presidente del Consiglio. È dolente però di dover comunicare ai Colleghi di non aver ancora ottenuto le udienze richieste.

Il Socio Cassinis, riferendosi a quanto comunicato dal Presidente in merito all'ordine del giorno sulla ricerca scientifica, osserva che se il Presidente e gli altri Soci appartenenti alle due Camere formassero, di fatto, una Commissione, questa, anche se in un primo tempo non riconosciuta ufficialmente, potrebbe esplicare indubbiamente presso il Governo un'opera assai utile per la definizione dell'urgente problema della ricerca scientifica. Rivolge pertanto viva preghiera in tal senso al Presidente e ai Colleghi parlamentari.

Il Presidente Castelnuovo risponde di ritenere opportuno per ora ottenere l'udienza dal Presidente del Consiglio. Terrà conto in ogni modo della proposta del Collega Cassinis.

Il Presidente comunica che il Socio Signorini, in occasione di un suo recente viaggio negli Stati Uniti, ha incontrato a Baltimora alcuni antichi allievi del compianto Socio Levi-Civita che hanno insistito per la pubblicazione delle Opere complete di Lui ed hanno promesso un contributo finanziario. È già pervenuto all'Accademia un primo assegno col quale si potrà iniziare la pubblicazione.

Il Consiglio di Presidenza, informato della generosa offerta, dopo aver espresso la sua gratitudine agli offerenti, ha deciso che sotto gli auspici dell'Accademia vengano pubblicate le Opere complete del prof. Levi-Civita. Nel tempo stesso il Consiglio ha preso l'iniziativa di pubblicare, sempre sotto gli auspici dell'Accademia, le Opere complete di un altro grande matematico che ha illustrato con i suoi scritti il nostro Paese e che fu, per vari anni, Presidente di questa Accademia: Vito Volterra.

Il Consiglio studierà il piano finanziario di tali pubblicazioni.

Il Socio Crocco, mentre plaude all'iniziativa della Presidenza, osserva che delle citate pubblicazioni sarebbe opportuno fare la traduzione inglese per agevolarne la diffusione in tutto il mondo scientifico.

Il Socio Armellini aderisce a tali proposte.

Il Presidente risponde che per ora le Memorie costituenti le dette Opere complete verranno pubblicate nella lingua in cui furono redatte.

Il Presidente informa i Colleghi che il Socio Abetti si era cortesemente offerto di riferire alla Classe sul suo viaggio e sul suo soggiorno negli Stati

Uniti d'America. Data però l'ora tarda, il Presidente prega il Collega Abetti di voler rimandare la sua relazione alla prossima adunanza.

Il Socio Abetti aderisce senz'altro alla proposta del Presidente.

PLICHI SUGGELLATI

Viene presentato un plico suggellato contenente una memoria scientifica del dott. Aldo Maestri.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico stesso sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

Il Presidente comunica poi che lo scritto del prof. Levaldi, già presentato all'Accademia sotto forma di plico suggellato e aperto nella seduta del 13 maggio, successivamente affidato per l'esame al Socio Edoardo Amaldi e al compianto Collega Giorgi, è stato infine sottoposto all'attenzione del Socio Perucca, il quale, con sua lettera in data 28 novembre, ha comunicato di avere esaminato il lavoro stesso.

Dalla lettera risulta che il predetto Socio ha dato un giudizio complessivamente favorevole sull'opera del prof. Levaldi. Il Presidente assicura che provvederà a dare comunicazione in tal senso all'autore.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Senatore Castelnuovo comunica che il fascicolo dei Rendiconti n. 5 (novembre 1950) è già impaginato e uscirà a giorni.

Presentano Note per i Rendiconti i Soci Fabiani, Cotronei, Negri, Armellini, Dore, Silva e Nobile.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BONINO G. B. e CHIORBOLI P., Effetti di iperconiugazione al legame carbonilico (pres. dal Socio G. B. BONINO).

LOMBROSO U. e ARRIGO L., Sul meccanismo di azione di alcuni fattori lipotropi nella steatosi epatica da florizina (pres. dal Socio U. LOMBROSO).

DEMANGEOT J., Sur l'âge Villafranchien de l'ancien lac Aquilarien (pres. dal Socio R. FABIANI).

FORTINI T., L'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Campo Imperatore sul Gran Sasso d'Italia (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

GIANNUZZI M. A., Sopra l'orbita della σ « Coronae Borealis » (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

UDESCHINI P., Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Nota I (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

UDESCHINI P., Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Nota II (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

Il Socio Picone presenta la Memoria di W. Gröbner dal titolo « Oberflächenwellen von Flüssigkeiten ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Bargellini, anche a nome del Collega Caglioti, legge la relazione sulla Memoria di Roberto Cavanna e Stina Stållberg-Stenhagen dal titolo « Ricerche su composti alifatici superiori otticamente attivi in rapporto con la struttura dell'acido fitomatico ».

Messa ai voti, la relazione, che conclude proponendo la pubblicazione del predetto lavoro nelle Memorie dell'Accademia, è approvata all'unanimità.

Il Presidente accoglie la proposta con le solite riserve di carattere finanziario.

Sarà nominata un'apposita commissione.

Il Segretario Accademico legge quindi l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio U. Amaldi offre in omaggio il primo volume della seconda edizione delle « Lezioni di meccanica razionale » di Tullio Levi-Civita e dello stesso Amaldi e, dopo aver informato che il secondo volume è già impaginato e che si auspica l'uscita del terzo entro il prossimo anno, fa presente che la ristampa dell'opera, che era stata vietata nel 1938 dalle leggi razziali, vuole essere un omaggio alla memoria dell'integerrimo uomo e dell'insigne scienziato.

La Classe si associa alle commosse parole del Socio Amaldi.

Il Socio Abetti offre in omaggio il fascicolo 66 delle Osservazioni e Memorie dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri e ne parla.

Il Socio Fabiani offre in omaggio e illustra un gruppo di sue pubblicazioni concernenti studi geologici e la ricerca petrolifera, un fascicolo dal titolo « Contributi di scienze geologiche con particolare riguardo all'Italia centrale, meridionale e alla Sicilia », edito a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche, al quale hanno collaborato, con il Fabiani, altri numerosi studiosi e varie sue pubblicazioni, tra le quali uno studio dal titolo « Gli odontoceti del miocene inferiore della Sicilia ».

Il Socio Puntoni offre in omaggio il II volume della sua opera « Microbiologia medica » e ricorda che detto volume contiene le tre sezioni della Micologia, della Protozoologia e dei microbi di incerta sistematica e *virus* filtrabili.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno presentato le opere e, successivamente, il Segretario Accademico illustra brevemente le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 9 dicembre 1950

- AMALDI Ugo. — Vedi: LEVI-CIVITA Tullio e AMALDI Ugo.
- CANDIOLI Primo. — *Il Comprensorio Taro-Canal Bianco zona depressa della Provincia di Verona*. Verona, Off. Grafiche Operai Albarelli, 1950. Pp. 27, in-8°.
- CORUZZI Cesare. — *Il problema medico-sociale del reumatismo e delle cardiopatie*. Roma, Ist. di Medicina Sociale, 1950. Pp. 95, in-8°. (Collana di Studi sui Problemi medico-sociali, n. 8).
- DE MENEZES CORRÊA ACCIAIUOLI Luís. — *Bibliografia hidrológica do Imperio Português*. Vol. II. Lisboa, Direcção Geral de Minas e Serviços Geológicos, 1950. Pp. 441, in-8°.
- FABIANI Ramiro. — *Curriculum e pubblicazioni*. Padova, Società Cooperativa Tipografica, 1949. Pp. 24, in-8°.
- *Gli Odontoceti del Miocene inferiore della Sicilia*. Padova, Società Cooperativa Tipografica, 1949. Pp. 32, in-4°, con figg. e tavv.
- *I parchi nazionali*. Estr. da « Rassegna di cultura e vita scolastica », a. IV, 1950, nn. 9-10.
- *Pozzi petroliferi in eruzione*. Estr. da « Scienza e Lavoro », 1949, n. 6.
- *Problemi e metodi della ricerca petrolifera*. Estr. da « La Ricerca Scientifica », a. XX 1950, nn. 8-9.
- *Prospettive per la ricerca di acque nel sottosuolo delle varie provincie della Sicilia*. Estr. da « Agricoltura, Bonifica, Colonizzazione », a. VII, 1943, n. 6.
- *La ricerca del petrolio*. Roma, A.G.I.P., 1950. Pp. 20, in-8°, con figg.
- *Ricerche petrolifere e progresso delle scienze geologiche*. Roma, A.G.I.P., 1950. Pp. 9, in-8°.
- *Sguardo ai principali problemi che interessano le industrie estrattive della Sicilia*. Estr. dal vol. « Contributi di Scienze Geologiche », suppl. a « La Ricerca Scientifica », a. XX, 1950.
- FABIANI Ramiro. — *Sui resti di Odontoceti del Miocene inferiore del Ragusano conservati nel Museo di Geologia dell'Università di Palermo*. Estr. da « Giornale di Scienze Naturali ed Economiche », vol. XLVI, 1949, sezione II.
- FABIANI Ramiro e FACCA G. — *Le scoperte di idrocarburi nella pianura Padana e le prospettive nella pianura Veneta centrale*. Estr. da « Atti del VI Convegno Nazionale per il Metano », Padova, 14-15-16 giugno 1949.
- FACCA G. — Vedi: FABIANI Ramiro e FACCA G.
- ISAAKIDÈS Constantin A. — *Le DDT contre la mouche des olives*. Travaux exécutés à Corfou eu 1947. Estr. da « Comptes Rendus de l'Académie d'Athènes », t. XXII, 1947.
- LEVI-CIVITA Tullio e AMALDI Ugo. — *Lezioni di meccanica razionale*. Vol. I. Cinematica - Principi e statica. Nuova ed. riveduta e corretta. Bologna Zanichelli, 1950. Pp. XVIII-816, in-8°, con figg.
- MIRELLI Eugenio. — *Il sistema monetario matematico*. Teramo. Coop. Tip. « Ars et Labor », 1950. Pp. 49, in-8°, con tavv.
- PUNTONI Vittorio. — *Microbiologia Medica*. 4ª ed. completamente aggiornata. Vol. II. Micologia - Protozoologia - Microbi di incerta sede e virus filtrabili. Roma, Studio Ed. degli Istituti Universitari, 1950. Pp. XIII-447, in-8°, con figg.
- RIEDER Albert. — *Das Wesen des Organischen*. Pfaffenhofen an der Ilm, im Selbstverlage, s. d. Pp. 39, in-8°.
- ZANGHERI Pietro. — *Flora e vegetazione dei terreni « ferrettizzati » del preappennino romagnolo*. Forlì, Stabil. Tip. Pietro Valbonesi, 1950. Pp. 315, in-8°, con tavv. (« Romagna Fitogeografica », 3°).

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

- AMERIO A. — Sulle origini dei raggi cosmici, 9.
 — L'espansione dell'Universo e la pressione della luce, 15.
 ANDREATTA C. e PIRANI R. — I minerali del gruppo dell'Ortler. — I. Actinolite e biotite di Val Madriccio, 320.
 ARDY C., vedi LOMBROSO U.
 ARMELLINI G. — Sopra l'origine del Sistema solare, 135.
 ASCOLI G. — Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità. Nota I, 129.
 — Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità. Nota II, 210.

B

- BAFFONI G. M. e CATTE G. — Il comportamento della cellula di Mauthner di ragnella nella metamorfosi accelerata con somministrazione di tiroide, 282.
 BARBATELLI R. — Determinazione del passo e degli errori del micrometro in declinazione del cerchio meridiano Repsold. Nota I, 170.
 BENIGNO P. e BERTI T. — Indagini quantitative sul meccanismo d'azione antibatterica dei detergenti, 370.
 BERTI T., vedi BENIGNO P.
 BOCHNER S. — Su un teorema di Frobenius per le funzioni di Jacobi, 327.
 BOMPIANI E. — Relazioni sulla conferenza per l'Unione Matematica Internazionale e sul Congresso Internazionale dei Matematici, 205.
 — Commemorazione del Socio Luigi Berzolari, 396.
 BONATTI S. e GOTTARDI G. — Perrierite, nuovo minerale ritrovato nella sabbia di Nettuno (Roma), 361.
 BONINO G. B. e CARASSITI V. — Separazione negli antipodi ottici della β -naftolbenzilamina racemica per cromatografia di partizione su carta, 229.

- BONINO G. B., SCROCCO E. e CHIORBOLI P. — Su una riga Raman caratteristica delle aldeidi e dei chetoni, 17.

C

- CALIFANO L. — Azione del calore sulla liberazione di acido nucleinico dai batteri, 142.
 CAMPANELLI L., vedi LIVREA G.
 CANTELMO P. — Ricerche sulla liberazione da calore di acido nucleinico dei germi, in rapporto alla età delle culture, 104.
 CAPRARO V. — L'influenza della temperatura sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di « Rana esculenta », 193.
 CARASSITI V., vedi BONINO G. B.
 CARDANI C., vedi QUILICO A.
 CASCI C. — Sulla distribuzione delle temperature di un anello in regime permanente e posto in condotti percorsi da correnti gaseose a temperature diverse, 163.
 CAVALLINI D. e DE MARCO C. — Aminazione biologica dei chetoacidi aromatici, 374.
 CATTE G., vedi BAFFONI G. M.
 CECCONI J. — Su di una equazione differenziale di rilassamento, 38.
 CENNAMO F. — Diffrazione dei raggi X nei miscugli alcool etilico-benzolo, 339.
 CHIORBOLI P., vedi BONINO G. B.
 CICALA P. — Sul carico critico di una piastra compressa oltre il limite elastico, 67.
 CIMINO M. — Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota I, 177.

D

- DANUSSO F. — Sulla misura di variazioni di energia interna mediante ultrasuoni. Contributo alla conoscenza della struttura dei liquidi, 351.
 DE GIORGI E. — Un criterio generale di compattezza per lo spazio delle successioni, 238.
 DE MARCO C., vedi CAVALLINI D.

DORE P. - Sugli errori da cui sono affette le livellazioni di precisione, 307.

D'ORGEVAL B. - Observations sur une Note de M. Nollet, 65.

F

FELICI L., vedi MARRE E.

G

GAGLIARDUCCI U., vedi LIVREA G.

GALLI M. - Considerazioni sul II postulato della relatività, 262.

— L'induzione elettromagnetica e il principio di relatività, 343.

GARAVALDI O. - Sulla scomposizione delle funzioni fisiche in elementi di andamento prefissato, 181.

GIALANELLA L. - Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere. Nota III, 175.

GIGANTE D. - Contributo allo studio dell'azoto proteico di tumori umani nei rapporti col tessuto matrice, 115.

GOTTARDI G., vedi BONATTI S.

GUERRITORE D., vedi LEONE E.

L

LEONARDI P. - Segnalazione di resti di Antracotero nelle ligniti dei dintorni di Chiuppano (Vicenza), 360.

LEONE E. e GUERRITORE D. - Sul riboside dell'acido urico. Cromatografia su carta da filtro, 98.

LEPRI F., MORUZZI G. e PANCINI E. - Un generatore di impulsi specialmente adatto per ricerche di elettrofisiologia, 84.

LEVI E. - Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. Nota II, 26.

— Sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili, 242.

LIVREA G. - Contributo alla conoscenza dei rapporti tra tiroide e termoregolazione. (Prime osservazioni sui ratti), 118.

— Gli effetti delle crisi convulsive da elettroshok sul comportamento sessuale del rospo (« Bufo vulgaris »), 268.

— e CAMPANELLI L., Il comportamento delle soglie di udibilità in montagna di media altezza. (Osservazioni audiometriche preliminari), 389.

LIVREA G., CAMPANELLI L., GAGLIARDUCCI U. e VIRGILLO G. - Prime osservazioni sugli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica del cane, 198.

LOMBROSO U. e ARDY C. - I fattori lipotropi di fronte a steatosi epatiche di origine differente. - I. Azione della metionina e del lipocaic sulla steatosi epatica da epatectomia subtotale, 157.

— PONTREMOLI S. - Sull'assorbimento per via peritoneale di emulsioni di grasso in cavie, spancreate e florizinate, 21.

M

MACHNE X. - Sulle relazioni che intercorrono tra la cronassia del muscolo striato e la permeabilità del medesimo all'acqua, 272.

MAJORANA Q. - Coesione, forze nucleari e legge di Newton, 3.

— Sulla composizione relativistica delle velocità, 216.

MALAGUTI A. - Sull'ossidazione di complessi dell'argento monovalente a complessi dell'argento bivalente, 349.

MANNINO G. - Periodo e curva di luce della stella variabile IV Cygni, 336.

MARMANI G., vedi SCROCCO E.

MARRÈ E. e FELICI L. - Curva dell'attività fosforilasi durante il ciclo biologico del tubero di patata, 111.

— Fattori di regolazione dell'attività fosforilasi nella foglia, 188.

MARUSSI A. - Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque dello spazio, 80.

MAZZI V. - Azione indiretta della temperatura sull'ipofisi nel Tritone cretato, 280.

MINEO C. - Superficie sulle quali il triangolo geodetico ha un semplice grado di mobilità, 213.

MONTEFOSCHI S. - Secrezione di acido ribonucleico da parte delle cellule follicolari e suoi rapporti con la spermatogenesi in « Anilocra » (Crust. Isop.), 277.

MORUZZI G., vedi LEPRI F.

N

NOBILE V. - Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo. - I. Rilievi e precisazioni, 299.

P

- PANCINI E., vedi LEPRI F.
 PENSA A. — Particolari morfologici e genetici del bulbo olfattivo, 232.
 PERUCCA E. — Relazione sulle Cerimonie per il cinquantenario della scoperta del Radio, 208.
 PIRANI R., vedi ANDREATTA C.
 PONTREMOLI S., vedi LOMBROSO U.
 PRATELLI A. M. — Sul campo elettromagnetico « ortogonale » nello spazio-tempo. Nota I, 251.
 — Sul campo elettromagnetico « ortogonale » nello spazio-tempo. Nota II, 331.
 PREDONZAN A. — Intorno alle involuzioni piane $I_n^{2(n-1)}$, 32.

Q

- QUILICO A. e CARDANI C., Sulla diffusione dell'echinulina nelle muffe del gruppo dello « *Aspergillus glaucus* », 220.

R

- RAUNICH L., L'azione dell'acido pantotemico sopra i processi rigenerativi. (Esperimenti su larve di Anfibi Anuri), 108.
 — Osservazioni sopra la localizzazione dell'abbozzo del telencefalo nella neurula degli anfibi, 379.
 ROMEO A. — Su alcuni derivati dell'acido para-ammino-salicilico (P. A. S.), 91.
 ROSELLI A. — Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico. Nota I, 233.
 — Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico. Nota II, 324.
 ROTH L. — Su alcune varietà algebriche che contengono un sistema di curve ellittiche, 62.
 — Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue, 246.
 RUSSO A. — Mutazioni migranti per fondare nuove unità sistematiche — Analogie con le « metastasi » delle malignità biologiche, 149.

S

- SABAN G. — Sulle varietà quasi-asintotiche. — II. Varietà subordinate di varietà quasi-asintotiche, 55.

- SBRANA F. — Su un particolare problema al contorno per le equazioni differenziali lineari alle derivate parziali, 54.
 SCROCCO E., vedi BONINO G. B.
 SCROCCO E. e MARMANI G. — Sull'impiego del cloruro cromoso per la determinazione del potenziale di ossidoriduzione dei chinoni alogeno sostituiti, 96.
 SERGI S. — Diagrafo ad uso della cranio-osteografia, 151.
 — Relazione sul Congresso Internazionale di Scienze Preistoriche e Protostoriche, 209.

T

- TEDONE G. — Sul primo problema della cinematica delle superficie, 183.
 TENTORI L. e VIVALDI G. — Sindrome mortale caratterizzata da manifestazioni a carico del sistema nervoso nel ratto alimentato con una dieta altamente purificata contenente solfonamidoguanidina. Nota II, 287.

U

- UDESCHINI P. — Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein, 256.
 URBANI E., Stadio comparativo della massa di *Giardina* nei « *Dytiscidae* », 384.

V

- VARDABASSO S. — Il problema stratigrafico del Cambrico Sardo, 312.
 VENTURA M. — Sulla origine delle radici avventizie sul caule in « *Senecio angulatus* » Linn., 368.
 VINACCIA G. — L'eliomeridioscopio, 72.
 VIOLA T. — Criteri di compattezza per aggregati d'insiemi elementari di uno spazio euclideo, 48.
 VIRGILLO G., vedi LIVREA G.
 VIVALDI G., vedi TENTORI L.

Z

- ZINONI A. — Notizie preliminari sull'Oligocene di Manerba (Lago di₃ Garda), 357.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — Su di una equazione differenziale di rilassamento. J. CECONI, 38.

Analisi matematica. — Un criterio generale di compattezza per lo spazio delle successioni, E. DE GIORGI, 238.

— Sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili. E. LEVI, 242.

Anatomia. — Particolari morfologici e genetici del bulbo olfattivo. A. PENSA, 232.

Antropologia. — Diagrafo ad uso della cranio-osteografia. S. SERGI, 151.

Astrofisica. — L'espansione dell'Universo e la pressione della luce. A. AMERIO, 15.

— Periodo e curva di luce della stella variabile IV Cygni. G. MANNINO, 336.

Astronomia. — Determinazione del passo e degli errori del micrometro in declinazione del cerchio meridiano Repsold. Nota I. R. BARBATELLI, 170.

— Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota I. M. CIMINO, 177.

— Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere. Nota III. L. GIALANELLA, 175.

— Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo.

— I. Rilievi e precisazioni. V. NOBILE, 299.

— L'eliomeridiscopio. G. VINACCIA, 72.

B

Biochimica. — Contributo allo studio dell'azoto proteico di tumori umani nei rapporti col tessuto matrice, D. GIGANTE, 115.

Biologia. — Il comportamento della cellula di Mauthner di raganella nella metamorfosi accelerata con somministrazione di tiroide. G. M. BAFFONI e G. CATTE, 282.

— Aminazione biologica dei chetoacidi aromatici. D. CAVALLINI e C. DE MARCO, 374.

— Azione indiretta della temperatura sull'ipofisi nel Tritone crestato. V. MAZZI, 280.

— Secrezione di acido ribonucleico da parte delle cellule follicolari e suoi rapporti con la spermatogenesi in «Anilocra» (Crust. Isop.). S. MONTEFOSCHI, 277.

— L'azione dell'acido pantotenico sopra i processi rigenerativi. (Esperimenti su larve di Anfibi Anuri). L. RAUNICH, 108.

— Osservazioni sopra la localizzazione dell'abbozzo del telencefalo nelle neurule degli anfibi. L. RAUNICH, 379.

— Sindrome mortale caratterizzata da manifestazioni a carico del sistema nervoso nel ratto alimentato con una dieta altamente purificata contenente solfonamidoguanidina. Nota II. L. TENTORI e G. VIVALDI, 287.

— Stadío comparativi della massa di Giardina nei «Dytiscidae». E. URBANI, 384.

Biologia generale. — Mutazioni migranti per fondare nuove unità sistematiche. — Analogie con le «metastasi» delle malignità biologiche. A. RUSSO, 149.

Botanica. — Sulla origine delle radici avventizie sul caule in «Senecio angulatus» Linn. M. VENTURA, 368.

C

Chimica. — Su alcuni derivati dell'acido para-ammino-salicilico (P. A. S.). A. ROMEO, 91.

Chimica biologica. — Sul riboside dell'acido urico. Cromatografia su carta da filtro. E. LEONE e D. GUERRITORE, 98.

Chimica delle muffe. — Sulla diffusione dell'echinulina nelle muffe del gruppo dello «Aspergillus glaucus». A. QUILICO e C. CARDANI, 220.

Chimica fisica. — Su una riga Raman caratteristica delle aldeidi e dei chetoni. G. B. BONINO, E. SCROCCO e P. CHIORBOLI, 17.

— Sulla misura di variazioni di energia interna mediante ultrasuoni. — Contributo alla conoscenza della struttura dei liquidi. F. DANUSSO, 351.

— Sull'impiego del cloruro cromoso per la determinazione del potenziale di ossidriduzione dei chinoni alogeno sostituiti. E. SCROCCO e G. MARMANI, 96.

Chimica generale. — Separazione negli antipodi ottici della β -naftolbenzilamina racemica per cromatografia di partizione su carta. G. B. BONINO e V. CARASITI, 229.

Chimica inorganica. — Sull'ossidazione di complessi dell'argento monovalente a complessi dell'argento bivalente. A. MALAGUTI, 349.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Luigi Berzolari. E. BOMPIANI, 396.

Comunicazioni varie, 292, 411.

Congressi internazionali. — Relazioni sulla conferenza per l'Unione Matematica Internazionale e sul Congresso Internazionale dei Matematici. E. BOMPIANI, 205.

— Relazione sulle Cerimonie per il cinquantenario della scoperta del Radio. E. PERUCCA, 208.

— Relazione sul Congresso Internazionale di Scienze Preistoriche e Protostoriche. S. SERGI, 209.

Cosmogonia. — Sopra l'origine del Sistema Solare. G. ARMELLINI, 135.

E

Endocrinologia. — Sull'assorbimento per via peritoneale di emulsioni di grasso in cavia spancreate e florizinate. U. LOMBROSO e S. PONTREMOLI, 21.

Enzimologia. — Curva dell'attività fosforilase durante il ciclo biologico del tubero di patata. E. MARRÈ E. e L. FELICI, 111.

— Fattori di regolazione dell'attività fosforilase nella foglia. E. MARRÈ e L. FELICI, 188.

Equazioni differenziali. — Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità. Nota I. G. ASCOLI, 129.

— Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità. Nota II. G. ASCOLI, 210.

— Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. Nota II. E. LEVI, 26.

F

Farmacologia. — Indagini quantitative sul meccanismo d'azione antibatterica dei detergenti. P. BENIGNO e T. BERTI, 370.

Fisica. — Sulle origini dei raggi cosmici. A. AMERIO, 9.

— Diffrazione dei raggi X nei miscugli alcool etilico-benzolo. F. CENNAMO, 339.

— Considerazioni sul II postulato della relatività. M. GALLI, 262.

— L'induzione elettromagnetica e il principio di relatività. M. GALLI, 343.

— Coesione, forze nucleari e legge di Newton. Q. MAJORANA, 3.

— Sulla composizione relativistica delle velocità. Q. MAJORANA, 216.

Fisica applicata. — Un generatore di impulsi specialmente adatto per ricerche di elettrofisiologia. F. LEPRI, G. MORUZZI e E. PANCINI, 84.

Fisica matematica. — Sulla scomposizione delle funzioni fisiche in elementi 181. di andamento prefissato. O. GARAVALLI, — Sul primo problema della cinematica delle superficie. G. TEDONE, 183.

Fisiologia. — L'influenza della temperatura sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di « Rana esculenta ». V. CAPRARO, 193.

— Contributo alla conoscenza dei rapporti tra tiroide e termoregolazione. (Prime osservazioni sui ratti). G. LIVREA, 118.

— Sulle relazioni che intercorrono tra la cronassia del muscolo striato e la permeabilità del medesimo all'acqua. X. MACHNE, 272.

Fisiologia umana. — Gli effetti delle crisi convulsive da elettroshok sul comportamento sessuale del rospo (« Bufo vulgaris »). G. LIVREA, 268.

— Il comportamento delle soglie di udibilità in montagna di media altezza. (Osservazioni audiometriche preliminari). G. LIVREA e L. CAMPANELLI, 389.

— Prime osservazioni sugli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica del cane. G. LIVREA, L. CAMPANELLI, U. GAGLIARDUCCI e G. VIRGILLO, 198.

G

Geodesia. — Sugli errori da cui sono affette le livellazioni di precisione. P. DORE, 307.

— Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque dello spazio. A. MARUSSI, 80.

Geologia. — Il problema stratigrafico del Cambrico Sardo. S. VARDABASSO, 312.

— Notizie preliminari sull'Oligocene di Manerba (Lago di Garda). A. ZINONI, 357.

Geometria. — Superficie sulle quali il triangolo geodetico ha un semplice grado di mobilità. C. MINEO, 213.

— Su alcune varietà algebriche che contengono un sistema di curve ellittiche. L. ROTH, 62.

— Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue. L. ROTH, 246.

— Sulle varietà quasi asintotiche. — II. Varietà subordinate di varietà quasi-asintotiche. G. SABAN, 55.

Geometria algebrica. — Observations sur une Note de M. Nollet. B. D'ORGEVAL, 65.

M

Matematica. — Su un teorema di Frobenius per le funzioni di Jacobi. S. BOCHNER, 327.

— Intorno alle involuzioni piane $I_n^{2(n-1)}$. A. PREDONZAN, 32.

— Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico. Nota I. A. ROSELLI, 233.

— Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico. Nota II. A. ROSELLI, 324.

— Su un particolare problema al contorno per le equazioni differenziali lineari alle derivate parziali. F. SBRANA, 45.

Meccanica. — Sulla distribuzione delle temperature di un anello in regime permanente e posto in condotti percorsi da correnti gaseose a temperature diverse. C. CASCI, 163.

— Sul carico critico di una piastra compressa oltre il limite elastico. P. CICALA, 67.

— Sul campo elettromagnetico « ortogonale » nello spazio-tempo. Nota I. A. M. PRATELLI, 251.

— Sul campo elettromagnetico « ortogonale » nello spazio-tempo. Nota II. A. M. PRATELLI, 331.

— Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. P. UDESCHINI, 256.

Mineralogia. — I minerali del gruppo dell'Ortler. — I. Actinolite e biotite di Val Madriccio. C. ANDREATTA e R. PIRATI, 320.

— Perrierite, nuovo minerale ritrovato nella sabbia di Nettuno (Roma). S. BONATTI e G. GOTTARDI, 361.

Microbiologia. — Azione del calore sulla liberazione di acido nucleinico dai batteri. L. CALIFANO, 142.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 296, 414.

P

Paleontologia. — Segnalazione di resti di Antracoterio nelle ligniti dei dintorni di Chiuppano (Vicenza). P. LEONARDI, 360.

Patologia. — Ricerche sulla liberazione da calore di acido nucleinico dei germi, in rapporto alla età delle culture. P. CANTEMO, 104.

Personale accademico, 291, 410.

Plichi suggellati, 292, 412.

Presentazione di libri, 295, 413.

Presentazione di Note e Memorie, 294, 412.

R

Relazioni di Commissioni, 413.

S

Scienza dell'alimentazione. — I fattori lipotropi di fronte a steatosi epatiche di origine differente. — I. Azione della metionina del lipocaic sulla steatosi epatica da epatectomia subtotala. U. LOMBRoso e C. ARDY, 157.

T

Topologia. — Criteri di compattezza per aggregati d'insiemi elementari di uno spazio euclideo. T. VIOLA, 48.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1-2.

LUGLIO-AGOSTO 1950.

NOTE DI SOCI

| | |
|---|--------|
| MAJORANA Q., Coesione, forze nucleari e legge di Newton | Pag. 3 |
| AMERIO A., Sulle origini dei raggi cosmici | 9 |
| AMERIO A., L'espansione dell'Universo e la pressione della luce | 15 |
| BONINO G. B., SCROCCO E. e CHIORBOLI P., Su una riga Raman caratteristica delle aldeidi e dei chetoni (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>) | 17 |
| LOMBROSO U. e PONTREMOLI S., Sull'assorbimento per via peritoneale di emulsioni di grasso in cavie spancreate e florizinate (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>) | 21 |

NOTE PRESENTATE DA SOCI

| | |
|---|---------|
| LEVI E., Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>G. Ascoli</i>) | Pag. 26 |
| PREDONZAN A., Intorno alle involuzioni piane $I_n^{2(n-1)}$ (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i>) | 32 |
| CECCONI J., Su di una equazione differenziale di rilassamento (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>) | 38 |
| SBRANA F., Su un particolare problema al contorno per le equazioni differenziali lineari alle derivate parziali (pres. dal Corrisp. <i>G. Sansone</i>) | 45 |
| VIOLA T., Criteri di compattezza per aggregati d'insiemi elementari di uno spazio euclideo (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>) | 48 |
| SABAN G., Sulle varietà quasi-asintotiche. - II. Varietà subordinate di varietà quasi-asintotiche (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>) | 55 |
| ROTH L., Su alcune varietà algebriche che contengono un sistema di curve ellittiche (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i>) | 62 |
| D'ORGEVAL B., Observations sur une Note de M. Nollet (pres. dal Socio <i>G. Castelnuovo</i>) | 65 |
| CICALA P., Sul carico critico di una piastra compressa oltre il limite elastico (pres. dal Socio <i>M. Panetti</i>) | 67 |
| VINACCIA G., L'eliomeridioscopio (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>) | 72 |
| MARUSSI A., Sviluppi di Legendre generalizzati per una curva qualunque dello spazio (pres. dal Socio <i>G. Cassinis</i>) | 80 |
| LEPRI F., MORUZZI G. e PANCINI E., Un generatore di impulsi specialmente adatto per ricerche di elettrofisiologia (pres. dal Socio <i>E. Amaldi</i>) | 84 |
| ROMEO A., Su alcuni derivati dell'acido para ammino-salicilico (P. A. S.) (pres. dal Socio <i>G. Bargellini</i>) | 91 |
| SCROCCO E. e MARMANI G., Sull'impiego del cloruro cromoso per la determinazione del potenziale di ossidoriduzione dei chinoni alogeno sostituiti (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>) | 96 |
| LEONE E. e GUERRITORE D., Sul riboside dell'acido urico. Cromatografia su carta da filtro (pres. dal Socio <i>G. Quagliariello</i>) | 98 |

| | |
|--|----------|
| CANTELMO P., Ricerche sulla liberazione da calore di acido nucleinico dei germi, in rapporto alla età delle culture (pres. dal Corrisp. <i>L. Califano</i>) | Pag. 104 |
| RAUNICH L., L'azione dell'acido pantotenico sopra i processi rigenerativi. (Esperimenti su larve di Anfibi Anuri) (pres. dal Corrisp. <i>G. Brunelli</i>) | 108 |
| MARRÉ E. e FELICI L., Curva dell'attività fosforilasi durante il ciclo biologico del tubero di patata (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>) | 111 |
| GIGANTE D., Contributo allo studio dell'azoto proteico di tumori umani nei rapporti col tessuto matrice (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>) | 115 |
| LIVREA G., Contributo alla conoscenza dei rapporti tra tiroide e termoregolazione. (Prime osservazioni sui ratti) (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>) | 118 |

FASCICOLO 3-4.

SETTEMBRE-OTTOBRE 1950.

NOTE DI SOCI

| | |
|--|----------|
| ASCOLI G., Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità. Nota I | Pag. 129 |
| ARMELLINI G., Sopra l'origine del Sistema Solare | 135 |
| CALIFANO L., Azione del calore sulla liberazione di acido nucleinico dai batteri | 142 |
| RUSSO A., Mutazioni migranti per fondare nuove unità sistematiche. - Analogie con le « metastasi » delle malignità biologiche | 149 |
| SERGI S., Diagrafo ad uso della cranio-osteografia | 151 |
| LOMBROSO U. e ARDY C., I fattori lipotropi di fronte a steatosi epatiche di origine differente. - I. Azione della metionina e del lipocaic sulla steatosi epatica da epatectomia subtotale (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>) | 157 |

NOTE PRESENTATE DA SOCI

| | |
|---|----------|
| CASCI C., Sulla distribuzione delle temperature di un anello in regime permanente e posto in condotti percorsi da correnti gaseose a temperature diverse (pres. dal Socio <i>M. Panetti</i>) | Pag. 163 |
| BARBATELLI R., Determinazione del passo e degli errori del micrometro in declinazione del cerchio meridiano Repsold Nota I (pres. dal Socio <i>L. Carnera</i>) | 170 |
| GIALANELLA L., Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere. Nota III (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>) | 175 |
| CIMINO M., Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>) | 177 |
| GARAVALDI O., Sulla scomposizione delle funzioni fisiche in elementi di andamento prefissato (pres. dal Socio <i>G. Giorgi</i>) | 181 |
| TEDONE G., Sul primo problema della cinematica delle superficie (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>) | 183 |
| MARRÉ E. e FELICI L., Fattori di regolazione dell'attività fosforilasi nella foglia (pres. dal Socio <i>U. Lombroso</i>) | 188 |
| CAPRARO V., L'influenza della temperatura sul passaggio dell'acqua attraverso la cute di « Rana esculenta » (pres. dal Corrisp. <i>R. Margaria</i>) | 193 |
| LIVREA G., CAMPANELLI L., GAGLIARDUCCI U. e VIRGILLO G., Prime osservazioni sugli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica del cane (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i>) | 198 |

FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1950.

NOTE DI SOCI

| | |
|--|----------|
| BOMPIANI E., Relazione sulla conferenza per l'Unione Matematica Internazionale e sul Congresso Internazionale dei Matematici | Pag. 205 |
| PERUCCA E., Relazione sulle Cerimonie per il cinquantenario della scoperta del Radio | 208 |
| SERGI S., Relazione sul Congresso Internazionale di Scienze Preistoriche e Protostoriche | 209 |
| ASCOLI G., Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità. Nota II | 210 |
| MINEO C., Superficie sulle quali il triangolo geodetico ha un semplice grado di mobilità | 213 |
| MAJORANA Q., Sulla composizione relativistica delle velocità | 216 |
| QUILICO A. e CARDANI C., Sulla diffusione dell'echinulina nelle muffe del gruppo dello « <i>Aspergillus glaucus</i> (pres. dal Corrisp. A. Quilico) | 220 |
| BONINO G. B. e CARASSITI V., Separazione negli antipodi ottici della β -naftolbenzilamina racemica per cromatografia di partizione su carta (pres. dal Socio G. B. Bonino) | 229 |
| PENSA A., Particolari morfologici e genetici del bulbo olfattivo | 232 |

NOTE PRESENTATE DA SOCI

| | |
|---|----------|
| ROSELLI A., Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico. Nota I (pres. dal Socio G. Castelnuovo) | Pag. 233 |
| DE GIORGI E., Un criterio generale di compattezza per lo spazio delle successioni (pres. dal Socio M. Picone) | 238 |
| LEVI E., Sopra un'applicazione dei polinomi di Bernstein all'approssimazione in media delle funzioni sommabili (pres. dal Corrisp. G. Ascoli) | 242 |
| ROTH L., Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue (pres. dal Socio G. Castelnuovo) | 246 |
| PRATELLI A. M., Sul campo elettromagnetico « ortogonale » nello spazio-tempo. Nota I (pres. dal Corrisp. B. Finzi) | 251 |
| UDESCHINI P., Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein (pres. dal Corrisp. B. Finzi) | 256 |
| GALLI M., Considerazioni sul II postulato della relatività (pres. dal Corrisp. L. Tieri) | 262 |
| LIVREA G., Gli effetti delle crisi convulsive da elettroshok sul comportamento sessuale del rospo (« <i>Bufo vulgaris</i> ») (pres. dal Corrisp. G. Amantea) | 268 |
| MACHNE X., Sulle relazioni che intercorrono tra la cronassia del muscolo striato e la permeabilità del medesimo all'acqua (pres. dal Corrisp. G. Pupilli) | 272 |
| MONTEFOSCHI S., Secrezione di acido ribonucleico da parte delle cellule follicolari e suoi rapporti con la spermatogenesi in « <i>Anilocra</i> » (Crust. Isop.) (pres. dal Socio G. Cotronei) | Pag. 277 |
| MAZZI V., Azione indiretta della temperatura sull'ipofisi nel Tritone crestato (pres. dal Socio N. Beccari) | 280 |
| BAFFONI G. M. e CATTE G., Il comportamento della cellula di Mauthner di raganella nella metamorfosi accelerata con somministrazione di tiroide (pres. dal Socio G. Cotronei) | 282 |
| TENTORI L. e VIVALDI G., Sindrome mortale caratterizzata da manifestazioni a carico del sistema nervoso nel ratto alimentato con una dieta altamente purificata contenente solfonamidoguanidina. Nota II (pres. dal Socio D. Marotta) | 287 |

| | |
|---|----------|
| Personale Accademico | Pag. 291 |
| Plichi suggellati | 292 |
| Comunicazioni varie | 292 |
| Presentazione di Note e Memorie | 294 |
| Presentazione di Libri | 295 |
| Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 novembre 1950 | 296 |

FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1950.

NOTE DI SOCI

| | |
|---|----------|
| NOBILE V., Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo. - I. Rilievi e precisazioni | Pag. 299 |
| DORE P., Sugli errori da cui sono affette le livellazioni di precisione | 307 |
| VARDABASSO S., Il problema stratigrafico del Cambrico Sardo | 312 |
| ANDREATTA C. e PIRANI R., I minerali del gruppo dell'Ortler - I. Actinolite e biotite di Val Madriccio (pres. dal Corrisp. C. Andreatta). | 320 |

NOTE PRESENTATE DA SOCI

| | |
|--|----------|
| ROSELLI A., Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico. Nota II (pres. dal Socio G. Castelnuovo) | Pag. 324 |
| BOCHNER S., Su un teorema di Frobenius per le funzioni di Jacobi (pres. dal Corrisp. B. Segre) | 327 |
| PRATELLI A. M., Sul campo elettromagnetico « ortogonale » nello spazio-tempo. Nota II (pres. dal Corrisp. B. Finzi) | 331 |
| MANNINO G., Periodo e curva di luce della stella variabile IV Cygni (pres. dal Socio G. Silva) | 336 |
| CENNAMO F., Diffrazione dei raggi X nei miscugli alcool etilico-benzolo (pres. dal Socio A. Carrelli) | 339 |
| GALLI M., L'induzione elettromagnetica e il principio di relatività (pres. dal Corrisp. L. Tiersi) | 343 |
| MALAGUTI A., Sull'ossidazione di complessi dell'argento monovalente a complessi dell'argento bivalente (pres. dal Socio G. B. Bonino). | 349 |
| DANUSO F., Sulla misura di variazioni di energia interna mediante ultrasuoni. - Contributo alla conoscenza della struttura dei liquidi (pres. dal Corrisp. G. Natta) | 351 |
| ZINONI A., Notizie preliminari sull'Oligocene di Manerba (Lago di Garda) (pres. dal Corrisp. A. Desio) | 357 |
| LEONARDI P., Segnalazione di resti di Antracoterio nelle ligniti dei dintorni di Chiuppano (Vicenza) (pres. dal Corrisp. G. Dal Piaz). | 360 |
| BONATTI S. e GOTTARDI G., Perrierite, nuovo minerale ritrovato nella sabbia di Nettuno (Roma) (pres. dal Socio G. Carobbi) | 361 |
| VENTURA M., Sulla origine delle radici avventizie sul caule in « Senecio angulatus » Linn. (pres. dal Socio P. Negri). | 368 |
| BENIGNO P. e BERTI T., Indagini quantitative sul meccanismo d'azione antibatterica dei detergenti (pres. dal Socio E. Meneghetti) | 370 |
| CAVALLINI D. e DE MARCO C., Aminazione biologica dei chetoacidi aromatici (pres. dal Socio G. Vernoni). | 374 |

| | |
|--|----------|
| RAUNICH L., Osservazioni sopra la localizzazione dell'abbozzo del telencefalo nella neurula degli anfibî (pres. dal Corresp. <i>G. Brunelli</i>) | Pag. 379 |
| URBANI E., Stadio comparativo della massa di Giardina nei « Dytiscidae » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>) | 384 |
| LIVREA G. e CAMPANELLI L., Il comportamento delle soglie di udibilità in montagna di media altezza. (Osservazioni audiometriche preliminari (pres. dal Corresp. <i>G. Amantea</i>)) | 389 |

COMMEMORAZIONI

| | |
|---|-----|
| BOMPIANI E., Commemorazione del Socio Luigi Berzolari | 396 |
| Personale Accademico | 410 |
| Comunicazioni varie | 411 |
| Plichi suggellati. | 412 |
| Presentazione di Note e Memorie. | 412 |
| Presentazione di Libri. | 413 |
| Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 9 dicembre 1950 | 414 |
| Indice per Autori | 417 |
| Indice per Materie | 421 |
| Indici dei Fascicoli | 425 |

